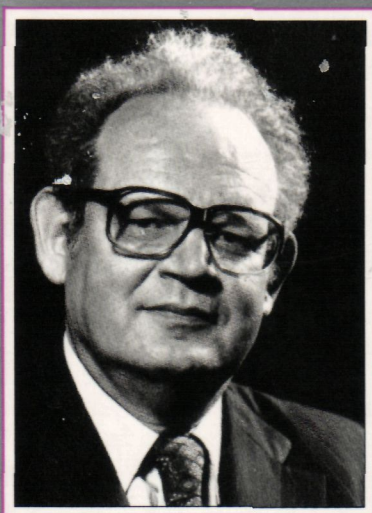


# LA GEOMETRIA FRACTAL de la naturaleza

Benoît Mandelbrot



METATEMAS 49

LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA

**Benoît Mandelbrot** es investigador de IBM en el Centro de Investigación Thomas J. Watson. Graduado en la École Polytechnique, master en aeronáutica y doctor en matemáticas por la Universidad de París, ha sido profesor en varios centros de investigación y universidades europeas y norteamericanas, y ha compaginado su labor en IBM con varios cursos de profesor visitante en, entre otras, las universidades de Harvard, Yale, París y el Massachusetts Institute of Technology. Varias veces conferenciante en el Collège de France desde 1973, dio allí las *leçons* que han dado origen a este libro. **Tusquets Editores** ya publicó en el año 1987 su primera aproximación a la materia que le ha hecho célebre, **Los objetos fractales** (Metatemáticas 13).





Metatemas  
Libros para pensar la ciencia  
Colección dirigida por Jorge Wagensberg

Al cuidado del equipo científico del Museu de la Ciència  
de la Fundació “la Caixa”

\* Alef, símbolo de los números transfinitos de Cantor

Benoît B. Mandelbrot

---

**LA GEOMETRIA FRACTAL  
DE LA NATURALEZA**

Traducción de Josep Llosa

Tusquets Editores

Título original: *The Fractal Geometry of Nature*

1.ª edición: octubre 1997

© 1977, 1982, 1983 by Benoît B. Mandelbrot

© de la traducción: Josep Llosa, 1997

Diseño de la colección: Clotet-Tusquets

Reservados todos los derechos de esta edición para

Tusquets Editores, S.A. - Cesare Cantú, 8 - 08023 Barcelona

ISBN: 84-8310-549-7

Depósito legal: B. 26.908-1997

Fotocomposición: Edition Book - Aragón, 414, entlo. 2ª - 08013 Barcelona

Impreso sobre papel Offset-F Crudo de Leizarán, S.A. - Guipúzcoa

Liberdúplex, S.L. - Constitución, 19 - 08014 Barcelona

Impreso en España

# Indice

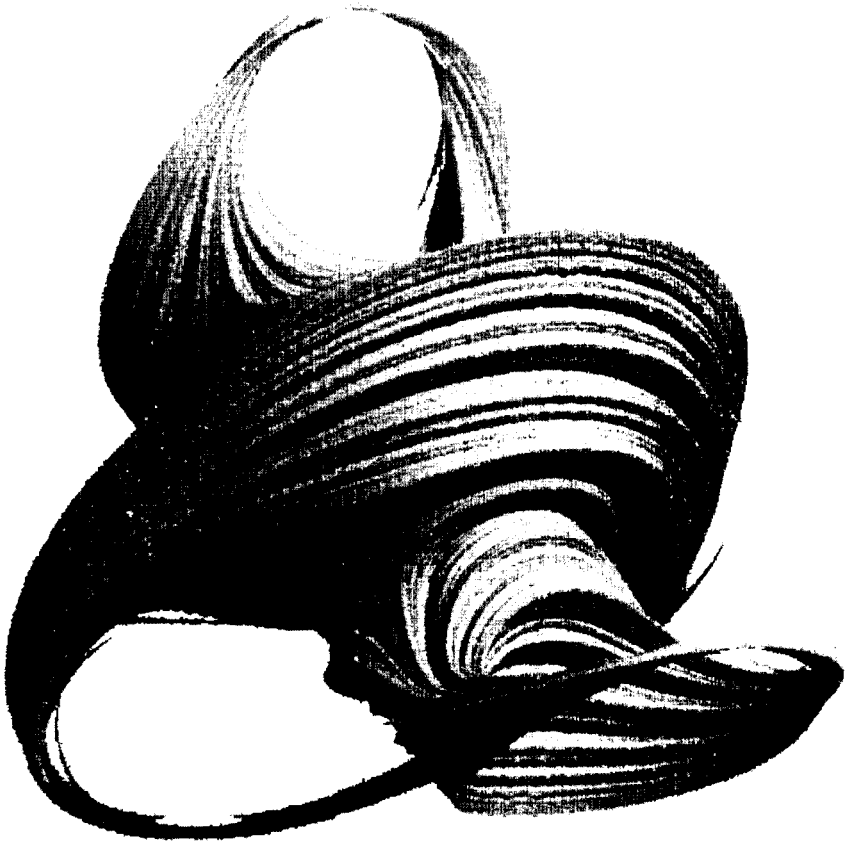
P.	9	<i>Preliminar</i>
		<b>I. Introducción</b>
15	1.	Tema
22	2.	Lo irregular y lo fragmentado en la naturaleza
31	3.	Dimensión, simetría y divergencia
39	4.	Variaciones y renunciaciones
		<b>II. Tres fractales clásicos domesticados</b>
49	5.	¿Cuánto mide la costa de Bretaña?
60	6.	Los copos de nieve y otras curvas de Koch
87	7.	Domando las curvas monstruosas de Peano
109	8.	Sucesos fractales y polvos de Cantor
		<b>III. Galaxias y remolinos</b>
125	9.	Un enfoque fractal de los cúmulos de galaxias
141	10.	La geometría de la turbulencia; la intermitencia
153	11.	Singularidades fractales de las ecuaciones diferenciales
		<b>IV. Fractales escalantes</b>
159	12.	Relaciones entre longitud, área y volumen
169	13.	Islas, racimos y percolación; relaciones diámetro-número
189	14.	Ramificación y redes fractales
		<b>V. Fractales no escalantes</b>
211	15.	Superficies con volumen positivo y la carne
216	16.	Árboles, residuos escalantes y fractales no uniformes
223	17.	Los árboles y el exponente diametral

- VI. Fractales imagen de sí mismos
- 239 18. Fractales autoinversos, redes apolonianas y jabón
- 258 19. Los polvos de Cantor y de Fatou; dragones autocuadráticos
- 275 20. Atractores fractales y evoluciones fractales («caótica»)
- VII. El azar
- 287 21. El azar como útil en la confección de modelos
- 294 22. Estacionariedad condicional y principios cosmográficos
- VIII. Fractales aleatorios estratificados
- 303 23. Coagulaciones aleatorias: racimos de contacto y percolación fractal
- 319 24. Cadenas aleatorias y garabatos
- 329 25. Movimiento browniano y fractales brownianos
- 344 26. Curvas construidas por desplazamiento aleatorio del punto medio
- IX. Fractales brownianos fraccionarios
- 351 27. Caudales fluviales, ruidos y redes escalantes
- 363 28. Relieve y costas
- 384 29. Las áreas de islas, lagos y hondonadas
- 391 30. Superficies isoterma de turbulencia homogénea
- X. Tremas aleatorias; textura
- 397 31. Tremas en un intervalo; polvos de Lévy lineales
- 407 32. Subordinación; polvos de Lévy espaciales; galaxias ordenadas
- 422 33. Cráteres circulares y esféricos: cráteres lunares y galaxias
- 433 34. Textura: huecos y lagunaridad, cirros y subcolaridad
- 445 35. Tremas generales y control de la textura
- XI. Miscelánea
- 457 36. La lógica fractal en la física estadística de redes
- 467 37. Variación de los precios y cambios de escala en economía
- 477 38. Cambios de escala y leyes potenciales sin geometría
- 488 39. Recapitulación matemática y agenda
- XII. De los hombres y las ideas
- 547 40. Esbozos biográficos
- 564 41. Esbozos históricos
- 586 42. Epílogo: La senda hacia los fractales



## Apéndices

593	Actualización añadida en la segunda edición
605	Lista de referencias
643	Agradecimientos
645	Índice de dimensiones escogidas
649	Índice onomástico y de materias



## Preliminar

Esta obra continúa y en gran parte reemplaza mi ensayo de 1977, *Fractales: forma, azar y dimensión*, que siguió y sustituyó con largueza mi ensayo en francés de 1975, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Cada una de estas etapas ha significado técnicas nuevas, borrar algunas cosas, redactar de nuevo casi todas las secciones, añadidos dedicados a mis trabajos anteriores, y —lo más importante— grandes añadidos dedicados a nuevos avances.

Debo a Richard F. Voss una contribución esencial al ensayo de 1977 y a esta obra, especialmente por su diseño de entonces, y su rediseño de ahora, de los copos fractales, de la mayoría de paisajes, y de los planetas. Los programas de muchas de las nuevas y sorprendentes ilustraciones de este ensayo son de V. Alan Norton.

Otros colaboradores próximos e inestimables han sido Sigmund W. Handelman, y después Mark R. Laff, en la informática y los gráficos, además de H. Catharine Dietrich, y luego Janis T. Riznychok, en la edición y mecanografiado.

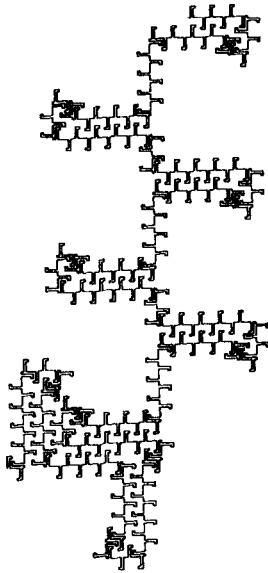
Los agradecimientos individuales por los programas que hay tras las ilustraciones y por otras ayudas particulares se encuentran al final del libro, después de la lista de referencias.

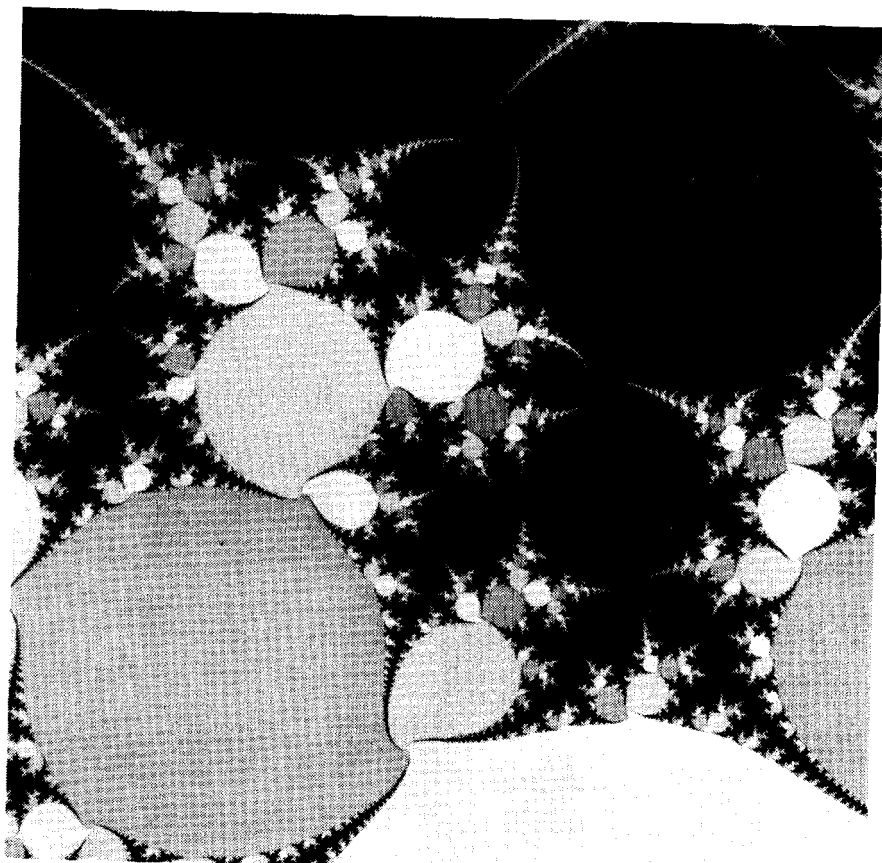
Estoy en deuda con el Centro de Investigación Thomas J. Watson de la International Business Machines Corporation, por su apoyo a mis investigaciones y mis libros. En su condición, primero de director de grupo, luego de director de departamento, y ahora de director de investigación, el vicepresidente de IBM, Ralf E. Gomory, imaginó modos de proteger y respaldar mi trabajo cuando no era más que especulación, y de darle todo el apoyo que pueda necesitar ahora.

Mi primera publicación científica apareció el 30 de abril de 1951. Al cabo de los años, habría podido parecer que mis investigaciones apuntaban en distintas direcciones. Pero este desorden era sólo aparente y escondía una profunda unidad en cuanto al objetivo, que la presente obra pretende desvelar, así como por las dos que la precedieron. Contra lo que hubiera podido parecer en un principio, la mayoría de mis trabajos han resultado ser los dolores del parto de una nueva disciplina científica.

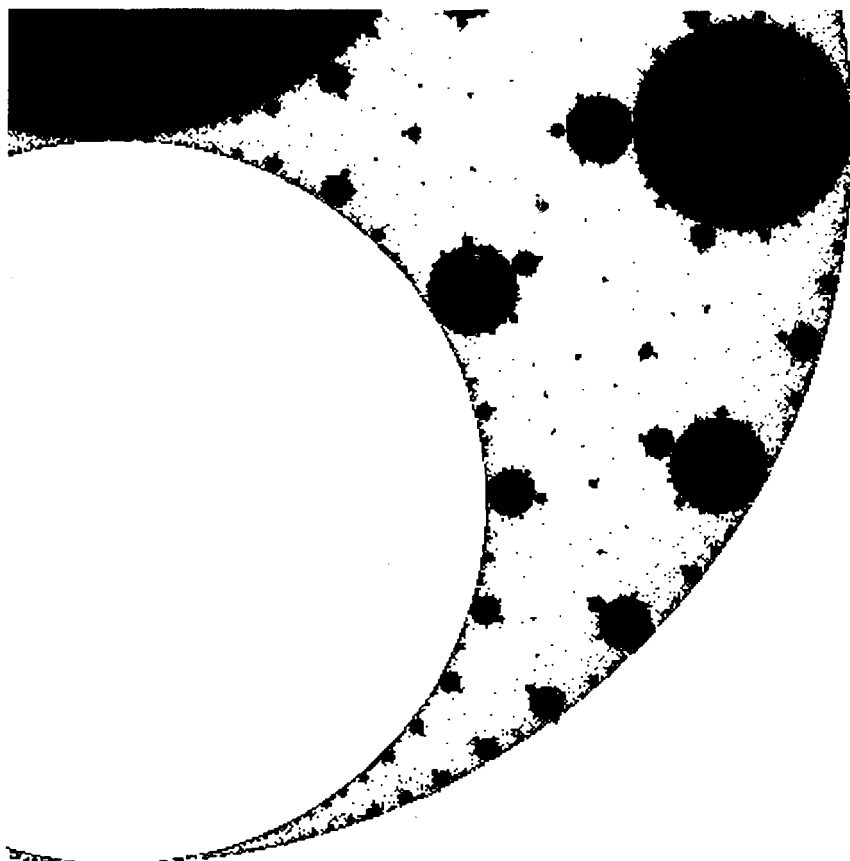


*In memoriam, B. y C.*  
Para Aliette





# I Introducción





# 1 Tema

¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo «frío» y «seco»? Una de las razones es su incapacidad de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol. Ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni la corteza es suave, ni tampoco el rayo es rectilíneo.

En términos más generales, creo que muchas formas naturales son tan irregulares y fragmentadas que, en comparación con *Euclides* —un término que en esta obra denotará todo lo referente a la geometría común, la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad, sino que ésta se da a un nivel completamente diferente. El número de escalas de longitud de las distintas formas naturales es, a efectos prácticos, infinito.

La existencia de estas formas representa un desafío: el estudio de las formas que *Euclides* descarta por «informes», la investigación de la morfología de lo «amorfo». Los matemáticos, sin embargo, han desdeñado este desafío y, cada vez más, han optado por huir de lo natural, ideando teorías que nada tienen que ver con aquello que podemos ver o sentir.

En respuesta a este desafío, concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a usarla en una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías hechas y derechas, identificando una serie de formas que llamo *fractales*. Las más útiles implican *azar*, y tanto sus regularidades como sus irregularidades son estadísticas. Las formas que describo aquí tienden a ser, también, *escalantes*, es decir su grado de irregularidad y/o fragmentación es idéntico a todas las escalas. El concepto de *dimensión fractal* (de Hausdorff) tiene un papel central en esta obra.

Algunos conjuntos fractales son curvas o superficies, otros «polvos» inconexos, y también los hay con formas tan disparatadas que no he encontrado, ni en las ciencias ni en las artes, palabras que los describieran bien. El lector puede hacerse una idea de ello ahora mismo con sólo echar una mirada rápida a las ilustraciones del libro.

Aunque muchas de estas ilustraciones representan formas que nunca antes habían sido consideradas, otras representan, en varios casos por vez primera, construcciones ya conocidas. En efecto, la geometría fractal como tal data de 1975, pero muchos de sus útiles y conceptos son anteriores, y aparecieron para satisfacer objetivos muy distintos de los míos. Mediante esas piedras antiguas encajadas en una estructura recién construida, la geometría fractal pudo «tomar prestada» una base excepcionalmente rigurosa, y pronto planteó preguntas nuevas y compulsivas en el terreno de la matemática.

Sin embargo, esta obra no pretende ser ni abstracta ni general en sí misma, y no es ni un libro de texto ni un tratado de matemáticas. A pesar de su extensión, pretende ser un ensayo científico, pues la he escrito bajo un prisma personal y sin pretensiones de completitud. También, como ocurre con muchos ensayos, tiende a presentar digresiones e interrupciones.

Esta informalidad debiera permitir al lector saltarse aquellos fragmentos que caen fuera de su interés o más allá de su competencia. Hay muchos fragmentos matemáticos «fáciles» dispersos por todo el libro, especialmente hacia el final. La consigna es, *hojear y saltar*, por lo menos en las dos primeras lecturas.

### *Presentación de objetivos*

Este ensayo reúne diversos análisis de distintas ciencias, y estimula una nueva síntesis tanto en lo matemático como en lo filosófico. Así pues, sirve tanto de *sumario* como de *manifiesto*. Además, revela todo un mundo completamente nuevo de belleza plástica.

### *Un sumario científico*

Los abogados llaman «sumario» a una recopilación acerca de casos reales relacionados por un tema común. Esta palabra no tiene un equivalente en la ciencia y sugiero que nos la apropiemos. Los casos importantes merecen que se les preste atención repetidas veces, pero es interesante también comentar los casos menores; a menudo su discusión se abrevia si uno dispone de «antecedentes».

Uno de los casos se refiere a una aplicación muy conocida de unas matemáticas muy conocidas al estudio de un fenómeno natural muy conocido: el modelo geométrico de Wiener del movimiento browniano. Sorprendentemente, no encontramos ninguna otra aplicación directa de los procesos de

Wiener, lo que sugiere que el movimiento browniano sólo es un caso especial, especialmente simple y desestructurado, entre los fenómenos de complejidad superior que vamos a tratar. No obstante, lo incluyo porque muchos fractales útiles son modificaciones cuidadosas del movimiento browniano.

Los otros casos tratan principalmente de mi propio trabajo, de sus antecedentes prefractales y de su ampliación por parte de estudiosos que reaccionaron a los dos ensayos que precedieron a éste. Algunos casos tienen que ver con el mundo visible de las montañas y otros objetos por el estilo, dando por fin contenido a la promesa que encierra la palabra *geometría*. Pero otros casos tratan de sistemas submicroscópicos, el objeto primordial de la física.

El tema en cuestión es a veces esotérico. Otras veces, se trata de un tema corriente, si bien sus aspectos geométricos no habían sido tratados adecuadamente. Ello hace pensar en la observación de Poincaré de que hay preguntas que uno decide plantearse y otras que se plantean por sí solas. Y una pregunta que se ha estado planteando por sí misma y a la que durante mucho tiempo no se le ha encontrado respuesta, tiende a ser dejada para los niños.

Debido a esta dificultad, mis anteriores ensayos insistían machaconamente en que el enfoque fractal es tan efectivo como «natural». Y no sólo era indiscutible, sino que habría que preguntarse cómo se podía haber ido tan lejos sin él. Además, para evitar controversias innecesarias, aquellos textos minimizaban la discontinuidad entre las exposiciones clásicas, los trabajos publicados y la presentación de mis propias ideas y resultados. En este ensayo, por el contrario, reclamo escrupulosamente el mérito que me corresponde.

Bajo ningún concepto considero que el enfoque fractal sea la panacea, y el análisis de cada caso debería juzgarse según criterios basados en su propio campo, es decir, en base sobre todo a su propia capacidad de organización, predicción y explicación, y no como ejemplo de una estructura matemática. Como cada estudio se detiene un poco antes de llegar a los aspectos verdaderamente técnicos, se ofrece al lector una lista de referencias para que pueda proseguir un estudio detallado. A consecuencia de ello (parafraseando a d'Arcy Thompson, 1917), este ensayo es un prefacio de principio a fin. Cualquier especialista que espere más quedará decepcionado.

### *Un manifiesto: la geometría de la naturaleza tiene una cara fractal*

Ahora bien, la razón para reunir todos estos prefacios es que cada uno ayuda a entender los demás, pues comparten una estructura matemática común. He aquí el elocuente resumen de F. J. Dyson:

«*Fractal* es una palabra acuñada por Mandelbrot para reunir bajo un sólo nombre una gran familia de objetos que han [tenido]... un papel histórico... en el desarrollo de la matemática pura. Una gran revolución en las ideas separa la matemática clásica del siglo XIX de la matemática moderna del XX. La matemática clásica está enraizada en las estructuras regulares de la geometría de Euclides y en la evolución continua característica de la dinámica de Newton. La matemática moderna empezó con la teoría de conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el plano. Desde el punto de vista histórico, la revolución se produjo al descubrirse estructuras matemáticas que no encajaban en los patrones de Euclides y Newton. Estas nuevas estructuras fueron consideradas... “patológicas”, ... como “una galería de monstruos”, emparentadas con la pintura cubista y la música atonal, que por aquella época trastornaron las pautas establecidas en el gusto artístico. Los matemáticos creadores de esos monstruos les concedían importancia por cuanto mostraban que el mundo de la matemática pura tiene una riqueza de posibilidades que va mucho más allá de las estructuras sencillas que veían en la naturaleza. La matemática del siglo XX floreció en la creencia de que había trascendido completamente las limitaciones impuestas por sus orígenes naturales.

»Sin embargo, como señala Mandelbrot, la naturaleza ha gastado una broma a los matemáticos. Quizá a los matemáticos del siglo XIX les haya faltado imaginación, pero no así a la naturaleza. Las mismas estructuras patológicas que inventaron los matemáticos para escapar del naturalismo del siglo XIX han resultado ser inherentes a muchos de los objetos que nos rodean.»<sup>1</sup>

En pocas palabras, que he confirmado la observación de Blaise Pascal de que la imaginación se cansa antes que la naturaleza. (*«L'imagination se lassera plutôt de concevoir que la nature de fournir.»*)

No obstante, la geometría fractal *no* es una «aplicación» directa de la matemática del siglo XX. Es una nueva rama nacida tardíamente de la crisis de la matemática que comenzó cuando duBois Reymond (1875) llamó la atención por primera vez sobre una función continua y no diferenciable construida por Weierstrass (capítulos 3, 39 y 41). Dicha crisis duró aproximadamente hasta 1925, siendo los principales actores Cantor, Peano, Lebesgue y Hausdorff. Estos nombres, así como los de Besicovitch, Bolzano, Cesàro, Koch, Osgood, Sierpinski y Urysohn, no suelen aparecer en el estudio empírico de la naturaleza, pero yo afirmo que el impacto de la obra de estos gigantes trasciende, con mucho, los objetivos que se propusieron inicialmente.

1. De «Characterizing Irregularity» de Freeman Dyson, *Science*, 12 de mayo de 1978, vol. 200, nº. 4342, pp. 677-678. Copyright 1978 de la American Association for the Advancement of Science.

Muestro cómo, sin que ni ellos ni las generaciones que les siguieron se dieran cuenta, sus extravagantes creaciones esconden todo un mundo de interés para aquellos que celebran la naturaleza tratando de imitarla.

Una vez más nos sorprende lo que ya era de esperar atendiendo a nuestra experiencia anterior, que «el lenguaje de la matemática resulta increíblemente eficiente en las ciencias naturales..., un regalo maravilloso que ni comprendemos ni merecemos. Deberíamos sentirnos agradecidos por ello y esperar que seguirá valiendo en el futuro, y que, para bien o para mal, para nuestra satisfacción y quizá también para nuestra confusión, se generalizará a muchos campos del saber» (Wigner, 1960).

### *Matemática, naturaleza y estética*

Además, la geometría fractal revela que algunos de los capítulos más austeros y formales de la matemática tienen una cara oculta: todo un mundo de belleza plástica que ni siquiera podíamos sospechar.

### *«Fractal» y otros neologismos*

Según un dicho latino, «nombrar es conocer»: *Nomen is numen*. Antes de emprender su estudio, los conjuntos a los que he aludido en las secciones anteriores no eran lo bastante importantes como para precisar un término que los denotara. Sin embargo, a medida que con mi esfuerzo los monstruos clásicos fueron siendo domados y afeitados, y que nuevos «monstruos» fueron apareciendo, la necesidad de una palabra para designarlos fue cada vez más manifiesta. Se hizo acuciante cuando hubo que buscar un título para el primer antecesor de este ensayo.

Acuñé el término *fractal* a partir del adjetivo latino *fractus*. El verbo correspondiente es *frangere* que significa «romper en pedazos». Es pues razonable, ¡y nos viene de perlas!, que además de «fragmentado» (como en *fracción*) *fractus* signifique también «irregular», confluyendo ambos significados en el término *fragmento*.

La asociación *conjunto fractal* tendrá una definición rigurosa, no así *fractal natural*, que servirá para designar sin demasiada precisión una figura natural que puede ser representada por un conjunto fractal. Por ejemplo, las curvas brownianas son conjuntos fractales, y el movimiento browniano físico es una fractal natural.

(Como *álgebra* procede del árabe *jabara* = unir, atar, ¡*fractal* y *álgebra* son etimológicamente opuestos!)

En términos generales, en mis viajes por tierras recién descubiertas o acabadas de colonizar, he ejercido a menudo el derecho a nombrar los lugares más destacados. Normalmente me ha parecido mejor acuñar un neologismo que dar un nuevo giro a alguna palabra demasiado usada ya por otra parte.

Hay que tener en cuenta, además, que el significado corriente de una palabra está a menudo tan arraigado que no se borra fácilmente con una redefinición. Como observó Voltaire en 1730, «si Newton no hubiera usado la palabra *atracción*, todo el mundo en la Academia [francesa] hubiera abierto los ojos a la luz, pero por desgracia usó en Londres un término que en París tenía un sentido ridiculizado». Además, frases como «la distribución de probabilidad de la distribución de Schwarz en el espacio respecto a la distribución de galaxias» son horribles.

Los términos acuñados en este ensayo evitan este peligro echando mano de raíces griegas o latinas en desuso, como *trema*, y al léxico raramente usado de la tienda, la casa o la granja. ¡Los nombres domésticos facilitan la doma de los monstruos! Así, por ejemplo, he dado significados técnicos a palabras como *polvo*, *coágulo* y *suerdo*. Recomiendo también el uso de «perembaldosado» para indicar una forma minuciosa (= *per*) de embaldosado.

### *Reafirmación de objetivos*

Resumiendo, este ensayo describe las soluciones que propongo para una multitud de problemas concretos, algunos de ellos muy antiguos, con la ayuda de una matemática que en parte es también muy antigua, pero que (aparte de sus aplicaciones al movimiento browniano) nunca se había usado de esta manera. Los casos que esta matemática permite resolver, y las generalizaciones requeridas por éstos, sientan los fundamentos de una nueva disciplina.

Los científicos se sorprenderán y se alegrarán (estoy convencido de ello) de que muchas formas que habían de llamar veteadas, en forma de hidra, llena de granos, pustulosas, ramificadas, en forma de alga, extrañas, enmarañadas, tortuosas, ondulantes, tenues, arrugadas y otras cosas por el estilo, admiten de ahora en adelante un tratamiento riguroso y cuantitativo.

Los matemáticos se sorprenderán y alegrarán (así lo espero) de saber que conjuntos que hasta ahora tenían fama de excepcionales (Carleson, 1967) pasen en cierto sentido a ser lo corriente, que construcciones consideradas patológicas deban darse de modo natural a partir de problemas

muy concretos, y que el estudio de la naturaleza deba ser de gran ayuda en la resolución de viejos problemas y plantee otros nuevos.

No obstante, este ensayo evita todas las dificultades de índole puramente técnica. Está dirigido principalmente a un conjunto amplio de científicos. La presentación de cada tema empieza con casos específicos y concretos. Se pretende que el lector vaya descubriendo gradualmente la naturaleza de los fractales. Y el arte se disfruta por sí solo.

«Toda belleza es relativa... No hemos de... creer que las orillas del mar sean realmente deformes por no tener la forma de un baluarte regular; que las montañas hayan perdido la forma porque no son exactamente como pirámides o conos; ni que las estrellas estén situadas desmañadamente por no estar a una distancia uniforme. Estas irregularidades no son naturales, sino sólo por lo que respecta a nuestro gusto; ni resultan incómodas para los verdaderos usos de la vida y de los designios de la vida del hombre en la tierra.» Esta opinión de Richard Bentley, sabio inglés del siglo xvii (repetida en las frases del comienzo de este ensayo), muestra que la idea de reunir las formas de las costas, las montañas y el cielo para contrastarlas con lo euclídeo viene de antiguo.

### *Del puño y letra de Jean Perrin*

A continuación sintonizamos una voz más próxima en el tiempo y también en el oficio. Para dar más detalles acerca del carácter irregular o fragmentado de las costas, el movimiento browniano y otras estructuras naturales que trataremos en el presente ensayo, permítaseme presentar, en una traducción más o menos libre, unos extractos de Perrin (1906). El trabajo posterior de Jean Perrin sobre el movimiento browniano le valió el premio Nobel y espoleó el desarrollo de la teoría de la probabilidad. Aquí, sin embargo, cito de un manifiesto filosófico anterior que, aunque fue parafraseado posteriormente en el prólogo de Perrin (1913), *pasó desapercibido hasta que apareció citado en la primera versión (francesa) de este ensayo*. Aunque me enteré de su existencia demasiado tarde como para que tuviera un efecto importante sobre mi trabajo, me estimuló en un momento en que me hacía falta, y es de una elocuencia sin par:

«Como sabe todo el mundo, antes de dar una definición rigurosa de continuidad, todo buen maestro demuestra a los principiantes que, de he-



cho, poseen ya la idea subyacente a este concepto. Traza una curva bien definida y, sosteniendo una regla, dice: “Como ven, en cada punto hay una tangente”. O también, al introducir el concepto de velocidad instantánea de un móvil en un punto de su trayectoria, dice: “Vean cómo la velocidad media entre dos puntos próximos no varía apreciablemente al acercarse infinitamente dichos puntos”. Y muchos, sabedores de que para ciertos movimientos corrientes estas afirmaciones parecen ser bastante ciertas, no se dan cuenta de que encierran un número considerable de dificultades.

»Los matemáticos, sin embargo, son muy conscientes de lo pueril de tratar de demostrar, con dibujos solamente, que toda función continua tiene derivada. Aunque las funciones diferenciables son las más simples y las más fáciles de manejar, son una excepción. Hablando en términos geométricos, lo normal son las curvas sin tangente, mientras que las curvas regulares, como el círculo, son casos interesantes pero muy particulares.

»A primera vista, la consideración del caso general parece un mero ejercicio intelectual, ingenioso pero artificial, el deseo de una precisión absoluta llevado a un extremo ridículo. Quienes oyen hablar de curvas sin tangente, o de funciones sin derivadas, piensan a menudo que cosas tan complicadas ni se dan en la naturaleza, ni nos son sugeridas por ella.

»Sin embargo, lo cierto es lo contrario, y la lógica de los matemáticos les ha mantenido más cerca de la realidad que las representaciones prácticas que usan los físicos. Ilustraré esta afirmación considerando algunos datos experimentales sin ninguna idea preconcebida.

»Consideremos, por ejemplo, un copo blanco de los que se obtienen al echar sal al agua jabonosa. De lejos, su contorno puede parecer claramente definido, pero a medida que lo examinamos más y más cerca, esa claridad desaparece. El ojo no ve ya una tangente en cada punto. Una línea que pudiera a primera vista tener esta propiedad resulta, después de un examen más minucioso, ser perpendicular u oblicua al contorno. Y si tomamos una lupa o un microscopio, la incertidumbre se mantiene, pues cada vez que incrementamos el aumento aparecen nuevas irregularidades, y nunca llegamos a tener una imagen clara y nítida, como en el caso, por ejemplo, de una bola de acero. Así pues, si se acepta que este último caso ilustra la forma clásica de la continuidad, el copo anterior podría lógicamente ilustrar el concepto más general de función continua sin derivada.»

Conviene interrumpir aquí la cita para prestar atención a las láminas 25 y 26. Las láminas en blanco y negro se encuentran al final del capítulo en que han sido citadas por primera vez y el número es el de la página co-

respondiente. Las láminas en color forman un capítulo aparte y sus pies son bastante independientes del resto del libro. Y sigue la cita:

«Hay que tener en cuenta que la incertidumbre en la posición de la tangente en un punto no tiene nada que ver con la incertidumbre que uno observa en un mapa de Bretaña. Aunque se obtendría un resultado distinto según la escala del mapa, siempre habría una tangente, pues un mapa es un diagrama convencional. Por el contrario, tanto nuestro copo como la costa presentan la característica esencial de que *sospechamos*, sin verlo absolutamente claro, que en cada escala aparecen detalles que prohíben del todo determinar una tangente.

»Sin abandonar el reino de la realidad experimental, observemos con un microscopio una partícula suspendida en un fluido agitándose por el movimiento browniano [véase la lámina 29 de este ensayo]. Se observa cómo la dirección de la línea recta que une las posiciones de la partícula en dos instantes de tiempo muy próximos cambia de manera absolutamente irregular al disminuir el intervalo de tiempo entre ambos instantes. Para un observador imparcial la conclusión sería que no está tratando con una curva sobre la que se puedan trazar tangentes, sino con una función sin derivada.

»No hay que olvidar que, a pesar de que una observación cada vez más fina de cualquier objeto nos llevaría normalmente al descubrimiento de una estructura muy irregular, a menudo resulta ventajoso aproximar sus propiedades por medio de funciones continuas. Aunque la madera pueda tener una porosidad indefinida, resulta útil considerar que una viga que ha sido serrada y pulida tiene un área finita. Es decir, a ciertas escalas y según para qué métodos de investigación, muchos fenómenos pueden representarse por funciones regulares y continuas, de manera parecida a como se puede envolver una esponja con papel de aluminio sin seguir exactamente el contorno complicado de la misma.

»Si, yendo algo más lejos..., atribuimos a la materia la estructura *infinitamente* granular que plantea la teoría atómica, la posibilidad de aplicar a la realidad el concepto matemático *riguroso* de continuidad sufrirá un serio revés.

»Consideremos, por ejemplo, la definición de la densidad del aire en un punto y en un instante dados. Nos representamos una esfera de volumen  $v$  con centro en ese punto. Si la masa del aire contenido es  $m$ , el cociente  $m/v$  es la densidad media en el interior de esa esfera, y llamamos densidad *verdadera* a un cierto valor límite de dicho cociente. Esta definición implica, sin embargo, que, en el momento considerado, la densidad media es prácticamente constante para todas las esferas de un ta-

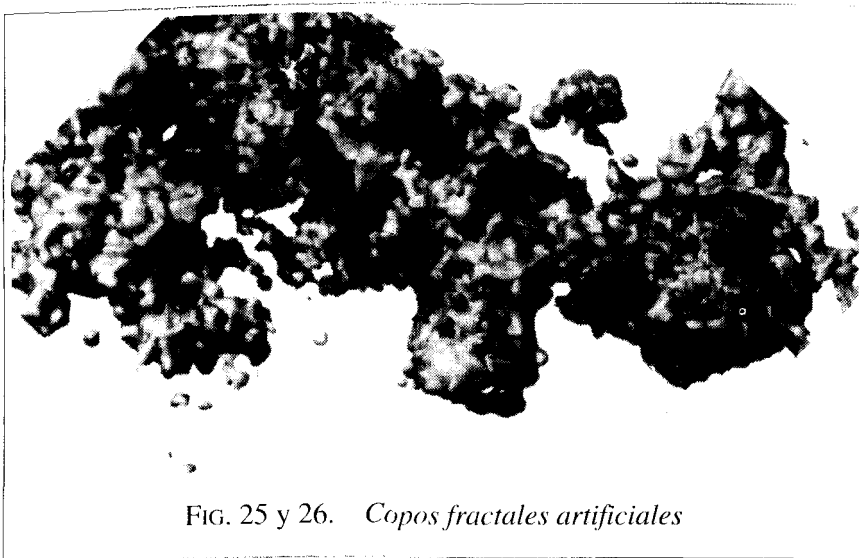


FIG. 25 y 26. *Copos fractales artificiales*

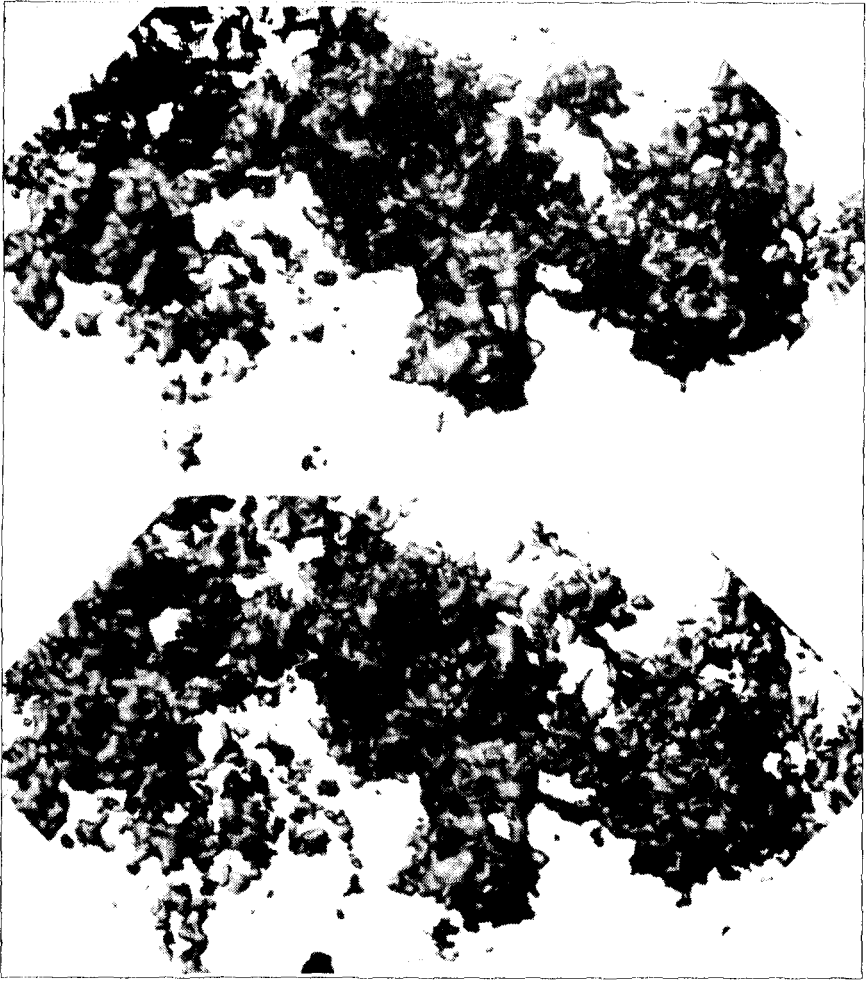
maño inferior a un volumen dado. Aunque esa densidad media pueda variar considerablemente entre una esfera de 1000 metros cúbicos y otra de 1 centímetro cúbico, uno espera que varíe sólo en una millonésima al comparar 1 centímetro cúbico con una milésima de milímetro cúbico.

»Supongamos que el volumen decrece continuamente. En vez de ser cada vez menos importantes, resulta que estas fluctuaciones son cada vez mayores. A escalas en las que es importante el movimiento browniano, el efecto de las fluctuaciones puede ser de una parte en un millar, y llegan a ser de 1 parte de cada 5 cuando el radio de la esfera hipotética alcanza la centésima de micra.

»Siguiendo un poco más, nuestra esférula llega al tamaño de una molécula. En un gas, lo más probable es que se encuentre en el espacio intermolecular, con lo que la densidad media será *nula*. En el punto en cuestión, la densidad *verdadera* será *nula* también. Pero aproximadamente una de cada mil veces nuestro punto estará en una molécula, y entonces la densidad media será mil veces mayor que el valor que solemos tomar como densidad verdadera del gas.

»Sigamos disminuyendo el tamaño de nuestra esférula. Excepto en casos excepcionales, pronto llegará a estar vacía debido al vacío interatómico; con lo que la densidad verdadera es *nula* casi por doquier, excepto en un número infinito de puntos aislados, en los que tiene un valor infinito.

»Otras propiedades tales como la velocidad, la presión o la temperatura son susceptibles de consideraciones análogas. Descubrimos que se



hacen cada vez más irregulares a medida que incrementamos el aumento de nuestra imagen necesariamente imperfecta del universo. En el espacio intermaterial, la función que representa cualquier propiedad física formará un *continuo* con un número infinito de puntos singulares.

»Una materia infinitamente discontinua, un éter continuo sembrado de minúsculas estrellas, también aparece en el universo cósmico. Y se puede llegar también a la misma conclusión que más arriba, imaginando esferas cada vez mayores que abarquen sucesivamente planetas, sistemas solares, estrellas, nebulosas, ...

»Permítasenos pues una hipótesis que, aun siendo arbitraria, no es ló-

gicamente inconsistente. Podrían darse casos en los que usar una función no diferenciable fuera más simple que usar una que sí lo fuera. Cuando esto ocurra, se habrá probado el valor práctico del estudio matemático de los continuos irregulares.»

Luego, en el comienzo de otra sección, subraya: «Pero, por el momento, esta hipótesis no es más que un ensueño».

*De cómo una «Galería de los Monstruos» se convierte en Museo de la Ciencia*

Una parte de este ensueño, la que se refiere al movimiento browniano, se hizo realidad en tiempos del propio Perrin. La reflexión de Perrin captó casualmente la atención de Norbert Wiener (Wiener, 1956, págs. 38-39, o 1964, págs. 2-3), quien, con gran «sorpresa y placer», se animó a definir y estudiar con rigor un primer modelo no diferenciable del movimiento browniano.

Este modelo sigue vigente, si bien los físicos arguyen que su no diferenciable proceda de una idealización excesiva, a saber, considerar despreciable la inercia. Con ello los físicos vuelven la espalda a un aspecto del modelo de Wiener que es de la máxima importancia para la presente obra.

Las otras aplicaciones de las matemáticas a la física previstas por Perrin ni tan sólo fueron intentadas hasta esta obra. La familia de conjuntos a que aludía Perrin (las curvas de Weierstrass, los polvos de Cantor y otros por el estilo) siguieron formando parte de la «matemática pura».

Algunos autores, por ejemplo Vilenkin (1965), llaman a esta familia «Museo de Arte Matemático», sin sospechar siquiera (estoy convencido) cuán acertado iba a resultar este nombre. Cité ya en el capítulo 1 que otros autores (empezando por Henri Poincaré) dijeron que era una «Galería de los Monstruos», parafraseando el *Treatise of Algebra* de John Wallis (1685), donde se dice que la cuarta dimensión es «un monstruo en la naturaleza, menos posible que una *quimera* o un *centauro*».

Uno de los objetivos del presente ensayo es mostrar, insistiendo una y otra vez sobre diversos «casos» concretos, que esa misma «Galería» se puede visitar en calidad de Museo de la Ciencia.

Los matemáticos son dignos de elogio por haber inventado el primero de estos conjuntos hace ya mucho, pero al mismo tiempo son los culpables de habernos disuadido de hacer uso de ellos.

FIG. 29. *Los dibujos clásicos del movimiento browniano según Jean Perrin*

En un texto inspirador citado en el capítulo 2, Jean Perrin hace un comentario sobre la forma de los «copos blancos que se obtienen echando sal en agua jabonosa». El objeto de estas figuras es ilustrar las observaciones de Perrin.

Hay que apresurarse a señalar que no se trata de fotografías ni de reconstrucciones por ordenador de ningún objeto real, ya sea éste un copo de jabón, una nube de lluvia o volcánica, un pequeño asteroide o un pedazo de cobre nativo. Tampoco pretenden ser el resultado de una teoría que simule los distintos aspectos —químicos, físicoquímicos e hidrodinámicos— de la formación real de copos.

*A fortiori*, no pretenden estar directamente relacionados con ningún principio científico. Son formas producidas en un ordenador con el fin de ilustrar, de la manera más sencilla posible, ciertas características geométricas que parecen estar presentes en la descripción de Perrin, y que propongo modelizar mediante el concepto de fractal.

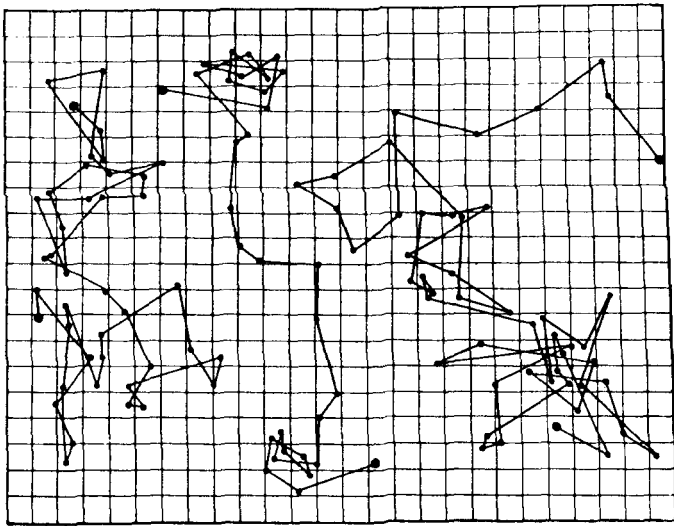
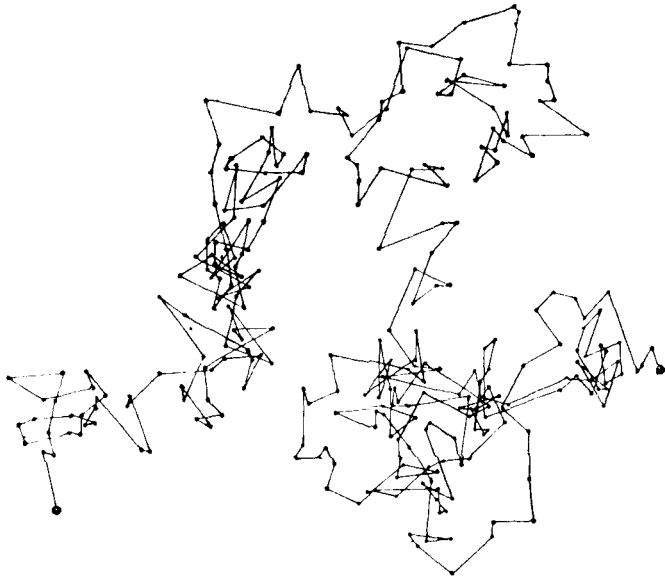
Estos copos existen únicamente en la memoria de un ordenador. Nunca se realizaron modelos tridimensionales de los mismos, y el sombreado es obra también del diseño por ordenador.

Los detalles de la construcción de estos copos se dan en el capítulo 30. Las diferencias apreciables entre ellos dependen del parámetro  $D$ , cuyo valor se indica al lado de cada figura. Se llama dimensión fractal, se define en el capítulo 3 y tiene un papel fundamental en el presente ensayo. El hecho de que las tres figuras tengan la misma forma global se debe a un sesgo asociado al método de aproximación. Este efecto se comentará en los pies de las láminas 376 y 377.

Una versión anterior tenía un extraño parecido con una presunta fotografía del monstruo del lago Ness. ¿Podría ser fortuita esta convergencia de forma?

La descripción del movimiento browniano por Perrin (1909) es la siguiente: «En una masa de fluido en equilibrio, como por ejemplo el agua de un vaso, todas las partes están aparentemente en reposo. Si introducimos en ella un objeto más denso, cae. Es cierto que cuanto menor es el objeto más lenta es la caída; pero cualquier objeto visible siempre acaba en el fondo de la vasija y por ningún motivo tiende a ascender de nuevo. Sin embargo, sería difícil observar durante mucho rato una preparación de partículas muy finas en un líquido sin observar un movimiento perfectamente irregular. Se mueven, se detienen, vuelven a arrancar, *suben*, bajan, *vuelven a subir*, sin tender al reposo en lo más mínimo».

Esta lámina, la única del libro que representa un fenómeno natural, está tomada de *Les atomes* de Perrin. Vemos cuatro trazas distintas de partículas coloidales con un radio de 0,53 micras, observadas al microscopio. Cada dos posiciones sucesivas están separadas por un intervalo de 30 segundos, y los segmentos de recta que los unen no tienen ningún significado físico (la cuadrícula tiene un lado de 3,2 micras).



Volviendo a nuestra traducción libre de Perrin, «Uno podría sentirse tentado a definir una “velocidad media de agitación” siguiendo una partícula concreta con tanta precisión como le fuera posible. Pero esas evaluaciones son *enormemente erróneas*. Tanto el módulo como la dirección de la velocidad media aparente varían a lo loco. Esta lámina sólo da una ligera idea de lo enrevesado de la trayectoria real. En efecto, si se marcaran las posiciones de la partícula a intervalos de tiempo 100 veces menores, cada segmento rectilíneo sería sustituido por una poligonal tan compleja como el presente gráfico, aunque más pequeña. Se comprende fácilmente, pues, que el concepto de tangente no tenga sentido en tales curvas.»

Este ensayo comparte las inquietudes de Perrin, pero aborda la irregularidad desde un ángulo distinto. Nos fijaremos (capítulo 25) en que al examinar el movimiento browniano bajo aumentos crecientes, su longitud crece indefinidamente.

Además, la traza del movimiento browniano acaba por llenar casi por completo el plano. ¿No resulta pues tentador concluir que, en cierto sentido aún no definido, este tipo peculiar de curvas tiene la misma dimensión que el plano? Y en efecto, así es. Uno de los principales objetivos de este ensayo es mostrar que el vago concepto de dimensión presenta distintos aspectos. La traza del movimiento browniano es, desde el punto de vista *topológico*, una curva, y por tanto tiene dimensión 1. Sin embargo, como barre la práctica totalidad del plano, tiene dimensión dos en sentido *fractal*. De acuerdo con la terminología que se introduce en este ensayo, la discrepancia entre estos dos valores determinará que el movimiento browniano sea un fractal.



En este ensayo tienen un papel fundamental los antiguos conceptos de *dimensión* (en el sentido de *número de dimensiones*) y de *simetría*. Además, nos encontraremos constantemente con síntomas de *divergencia*.

### *La idea de dimensión*

Durante la crisis que va de 1875 a 1925, los matemáticos se dieron cuenta de que no es posible una comprensión correcta de lo irregular y lo fragmentado (así como de lo regular y lo conexo) si se define la dimensión como número de coordenadas. El primero en emprender un análisis riguroso fue Cantor en su carta a Dedekind, fechada el 20 de junio de 1877. Le siguió Peano en 1890, y los pasos finales datan de la década de 1920.

Como todos los grandes progresos intelectuales, el final de esta historia admite diversas interpretaciones. Cualquiera que escriba un tratado matemático sobre la teoría de la dimensión está asumiendo que dicha teoría es única. Pero en mi opinión lo más importante es que un concepto amplio como el de dimensión presenta diversas facetas matemáticas que, aparte de ser conceptualmente distintas, dan distintos resultados numéricos. Exactamente igual que Guillermo de Occam propugna para los entes  $z$ , no hay que multiplicar las dimensiones más allá de lo necesario; no obstante, es inevitable usar varias clases de dimensión. Euclides se limita a conjuntos para los que los distintos tipos de dimensiones útiles coinciden; así pues, podríamos llamarles conjuntos *dimensionalmente concordantes*. Por el contrario, la mayor parte de este ensayo estudia conjuntos para los que las distintas dimensiones no coinciden; se trata pues de conjuntos *dimensionalmente discordantes*.

Al pasar de las dimensiones de los conjuntos matemáticos a las dimensiones «efectivas» de los objetos físicos modelizados por dichos conjuntos, nos encontramos con otro tipo de ambigüedad, inevitable e im-

prescindible. En este capítulo ofreceremos una primera visión de los aspectos matemáticos y físicos de la dimensión.

### *Definición del término fractal*

En esta sección se usan muchos términos matemáticos no definidos previamente, pero a muchos lectores les puede ser útil, o cuando menos estimulante, echarle una ojeada. En cualquier caso, si se desea, puede saltarse.

Esta digresión y las otras que seguirán están enmarcadas por los nuevos paréntesis  $\square$  y  $\blacksquare$ . El segundo es muy visible, a fin de que cualquiera lo pueda encontrar fácilmente cuando, después de perderse en la digresión, decida saltársela. El primero de ellos, la «apertura de paréntesis», pretende no llamar demasiado la atención sobre las digresiones, que a menudo sólo son un tratamiento avanzado de conceptos que se estudiarán con posterioridad.

$\square$  El hecho de que los fractales elementales sean dimensionalmente discordantes puede servir para dar contenido matemático al concepto hasta ahora intuitivo de fractal. Nos concentraremos en dos definiciones que asignan, a cada conjunto del espacio euclídeo  $R^E$ , y con independencia de lo «patológico» que sea, un número real que por razones intuitivas y formales merece ser llamado su dimensión. La más intuitiva de dichas definiciones es la dimensión topológica según Brouwer, Lebesgue, Menger y Urysohn. La denotaremos por  $D_T$ , y está descrita en una entrada del capítulo 41. La segunda dimensión fue formulada por Hausdorff (1919) y Besicovitch le dio la forma final. Se discute en el capítulo 39 y la denotamos por  $D$ .

$\square$  Siempre que uno trabaja en el espacio euclídeo  $R^E$ , tanto  $D_T$  como  $D$  toman valores comprendidos entre 0 y  $E$ . Pero aquí se acaban las analogías. Mientras  $D_T$  es siempre un entero,  $D$  no tiene por qué serlo. Así, ambas dimensiones no tienen por qué coincidir; sólo están sujetas a la desigualdad de Szpilrajn (Hurewicz y Wallman 1941, capítulo 4)

$$D \geq D_T$$

Para todas las figuras euclídeas  $D = D_T$ , pero casi todos los conjuntos de este ensayo satisfacen  $D > D_T$ . No existía ninguna palabra para referirse a tales conjuntos, así que me vi obligado a acuñar el término *fractal*, definiéndolo así:

$\square$  *Un fractal es por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.*

$\square$  Los conjuntos con  $D$  no entera son fractales. Así, por ejemplo, el conjunto de Cantor es un fractal ya que, como se ve en el capítulo 8,

$$D = \log 2 / \log 3 \sim 0,6309 > 0, \text{ mientras que } D_T = 0.$$

Y se pueden generalizar y construir conjuntos de Cantor en  $R^E$ , de manera que  $D_T = 0$ , mientras que  $D$  toma cualquier valor que queramos entre 0 y  $E$  (ambos inclusive).

□ La curva de Koch original también es un fractal pues, como se ve en el capítulo 6,

$$D = \log 4 / \log 3 \sim 1,2618 > 1, \text{ mientras que } D_T = 1.$$

□ Sin embargo, algunos fractales pueden tener valores de  $D$  enteros. Por ejemplo, en el capítulo 25 se demuestra que la traza del movimiento browniano es un fractal, ya que

$$D = 2, \text{ mientras que } D_T = 1.$$

□ El hecho sorprendente de que  $D$  no tenga que ser necesariamente un entero merece ser reflejado en la terminología. Si uno usa el término *fracción* en sentido amplio, como sinónimo de número real no entero, algunos de los valores de  $D$  anteriormente expuestos son fraccionarios; así pues, a menudo se llama *dimensión fraccionaria* a la dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Ahora bien,  $D$  puede tomar valores enteros (menores que  $E$  pero estrictamente mayores que  $D_T$ ). Diré que  $D$  es una *dimensión fractal*. ■

### *Los fractales en el análisis armónico*

□ El estudio de los fractales es en parte el aspecto geométrico del análisis armónico, pero no daremos importancia a este hecho en el presente ensayo. El análisis armónico (espectral o de Fourier) es algo desconocido para la mayoría de lectores, y muchos de los que lo utilizan corrientemente no están familiarizados con sus estructuras básicas.

Además, cada uno de estos enfoques, el fractal y el espectral, tiene su propio estilo y personalidad, los cuales se aprecian mejor estudiándolos primero cada uno por su propio interés. En fin, en comparación con el análisis armónico, el estudio de fractales es más fácil e intuitivo. ■

### *De «conceptos que son nuevos, pero...»*

Lebesgue bromeaba acerca de ciertos «conceptos que son nuevos, efectivamente, pero que una vez definidos no sirven para nada». Este co-

mentario nunca se aplicó a  $D$ , pero su uso permaneció confinado en el campo de la matemática pura. Yo fui el primero que usó con éxito la  $D$  para describir la naturaleza, y uno de los principales objetivos de esta obra es colocar la  $D$  en un lugar central de la ciencia empírica, demostrando con ello que tiene una importancia mucho mayor que lo que nadie hubiera imaginado jamás.

En diversas áreas de la física esta pretensión mía acerca de  $D$  fue aceptada con una prontitud excepcional. De hecho, después de haberse dado cuenta de la insuficiencia de la dimensión estándar, muchos investigadores en estas áreas ya habían avanzado a tientas hacia *dimensiones quebradas anómalas o continuas* de todo tipo. Sin embargo, no se había establecido ninguna conexión entre estos enfoques. Además, pocas de estas definiciones de dimensión se habían usado para más de un cometido, ninguna tenía el respaldo de una teoría matemática y ninguna había evolucionado lo suficiente como para que la falta de dicho respaldo se hiciera notar. Por el contrario, la existencia de una teoría matemática es vital para los métodos que se presentan aquí.

### *Un estudio matemático de la forma debe ir más allá de la topología*

Es muy probable que, si preguntamos a un matemático cuál es la rama de la matemática que estudia la forma, nos conteste que la topología. Este campo es importante para nuestros objetivos y nos hemos referido a él en la sección anterior; no obstante, en este ensayo se afirma y defiende que el vago concepto de forma presenta otros aspectos aparte de los topológicos.

Para la topología, que antes se llamaba *geometría de la posición o análisis situs* (del griego *Τοπος*, que significa posición o situación), todas las ollas de dos asas tienen la misma forma pues, suponiéndolas infinitamente flexibles y compresibles, se pueden transformar una en otra sin discontinuidades y sin tener que abrir ningún agujero nuevo, ni cerrar otro que ya existiera. Asimismo, las costas de todas las islas tienen la misma forma, topológicamente idéntica a la del círculo. Se asigna la misma dimensión topológica, igual a 1, a las costas y a los círculos. Si se añaden las «islas satélites», próximas a una dada, la costa acumulada de todas ellas es topológicamente idéntica a «muchos» círculos. Así pues, la topología *no es capaz* de distinguir entre distintas costas.

Por contra, en el capítulo 5 se demuestra que distintas costas tienden a tener dimensiones fractales diversas. Las diferencias en la dimensión fractal reflejan diferencias *de forma en un aspecto no topológico*, que propongo llamar *forma fractal*.

La mayoría de problemas realmente interesantes combina aspectos fractales y topológicos de una manera cada vez más sutil.

Obsérvese que, en el caso de la topología, la definición de la propia disciplina y la de  $D_T$  se fueron refinando en paralelo, mientras que el concepto de  $D$  es anterior en más de medio siglo al presente estudio sobre la forma fractal.

Y a propósito, como se ha dado el nombre de Felix Hausdorff a una cierta clase de espacios topológicos, la denominación generalmente dada a  $D$ , dimensión de Hausdorff, podría sonar a «dimensión de un espacio de Hausdorff», lo cual podría sugerir que se trata de un concepto topológico, y no es así en absoluto. He aquí, pues, otra razón para preferir la denominación *dimensión fractal*.

### *Dimensión efectiva*

Además de los conceptos matemáticos inherentes a  $D_T$  y  $D$ , en este ensayo se habla a menudo de la *dimensión efectiva*, un concepto que *no habría que* definir con precisión. Se trata de un regreso potente e intuitivo a la geometría griega arcaica de los pitagóricos. Una de las novedades de este ensayo es que la dimensión efectiva puede tomar valores fraccionarios.

La dimensión efectiva tiene que ver con la relación entre los conjuntos matemáticos y los objetos reales. Estrictamente, los objetos físicos tales como un velo, un hilo o una bolita, tendrían que representarse como formas tridimensionales. Sin embargo, los físicos prefieren pensar en dichos objetos —en el supuesto de que sean lo bastante finos, naturalmente— como si su dimensión fuera «de hecho» 2, 1 o 0, respectivamente. Así, por ejemplo, en la descripción de un hilo, las teorías unidimensional y tridimensional deben modificarse con términos correctivos, y sólo a posteriori puede decidirse qué modelo geométrico es el mejor, es decir, el que precisa de menos correcciones. Si hay suerte, dicho modelo sigue siendo útil aun sin las correcciones. En otras palabras, la dimensión efectiva tiene una base subjetiva. Es una cuestión de aproximación y, por lo tanto, de grado de resolución.

### *Diversas dimensiones efectivas que se dan en la descripción de un ovillo de hilo*

Confirmando este presentimiento, un ovillo de 10 cm de diámetro, de un hilo de 1 mm de grosor tiene (en potencia) varias dimensiones efectivas.

Para un observador lejano, el ovillo se reduce a un punto, una figura de dimensión 0. (¡De todos modos, Blaise Pascal y los filósofos medievales afirman que, a escala cósmica, nuestro mundo no es más que un punto!) Con una resolución de 10 cm, el ovillo de hilo es una figura tridimensional. A 10 mm es un lío de hilos unidimensionales. A 0,1 mm cada hilo se convierte en una columna, y el conjunto recupera el aspecto de figura tridimensional. A 0,01 mm cada columna se resuelve en fibras y volvemos a tener una figura unidimensional, y así sucesivamente. El valor de la dimensión efectiva va cambiando. Cuando el ovillo es representado por un número finito de puntos atómicos, vuelve a tener dimensión 0. Si cambiamos el ovillo por una hoja de papel, nos encontraremos con una secuencia similar de dimensiones efectivas.

La idea de que un resultado numérico pueda depender de la relación entre el objeto y el observador está muy arraigada en la física de este siglo, y el caso que hemos considerado es una ilustración ejemplar de la misma.

La mayoría de objetos que consideraremos a lo largo de este ensayo son como nuestro ovillo de hilo: presentan una sucesión de dimensiones efectivas distintas. Pero se añade una novedad esencial: ciertas transiciones mal definidas entre sectores de dimensión bien definida son reinterpretadas como sectores fractales, en los que  $D > D_7$ .

### *Homogeneidad espacial, invariancia por cambio de escala y autosemejanza*

Esto es todo por ahora en cuanto a las dimensiones. Preparemos ahora el tema de la simetría recordando que Euclides empieza con las formas más simples, como las rectas, los planos o los espacios. Las situaciones físicas más sencillas se dan también cuando alguna cantidad, como la presión, la densidad, la temperatura o la velocidad, están homogéneamente distribuidas.

La distribución homogénea sobre la recta, el plano o el espacio tiene dos propiedades muy interesantes. Es *invariante por traslaciones*, y es *invariante por cambios de escala*. Al pasar a los fractales, hay que modificar y/o restringir el alcance de estas invariancias. Por tanto, los mejores fractales son los que presentan el máximo de invariancia.

Por lo que respecta a las traslaciones, dos sectores cualesquiera de la traza del movimiento browniano nunca son exactamente superponibles (como ocurre con dos partes iguales de una recta). Sin embargo, tales sectores se pueden hacer superponibles en sentido estadístico. Casi to-

dos los fractales de este ensayo son, en cierto sentido, invariantes por traslación.

Además, la mayoría es también invariante según ciertos cambios de escala. Diremos que son *escalantes*. Un fractal que sea invariante por la transformación geométrica de semejanza, en el sentido ordinario, se dice *autosemejante*.

En la expresión compuesta *fractal escalante*, el adjetivo suaviza el significado del sustantivo. Así, mientras *fractal* suena a desorden y abarca casos de una irregularidad inmanejable, el calificativo *escalante* da a entender un cierto orden. Si se prefiere, se puede tomar la expresión en orden inverso; con *escalante* como sustantivo que indica un orden estricto y *fractal* como calificativo que excluye las rectas y los planos.

No hay que malinterpretar la motivación que nos impulsa a suponer la homogeneidad y la invariancia por cambios de escala. Aquí, como en la geometría ordinaria de la naturaleza, nadie cree que el mundo sea estrictamente homogéneo ni escalante. La geometría ordinaria estudia las rectas como caso preliminar más simple. También la mecánica contempla el movimiento rectilíneo y uniforme como un simple primer paso.

Lo mismo ocurre con los fractales escalantes, pero aquí este primer paso es más lento, ya que el papel de la línea recta lo juega ahora una multitud de posibilidades distintas, de las que este libro sólo puede presentar una pequeña muestra. No hay que sorprenderse de que los fractales escalantes se limiten a dar una primera aproximación de las formas naturales que queremos tratar. Antes bien, lo que resulta sorprendente es que dichas primeras aproximaciones sean tan notablemente razonables.

Conviene señalar que la idea de autosemejanza es antigua. En el caso de la línea recta, se le ocurrió a Leibniz hacia 1700 (véase la entrada «cambio de escala en Leibniz y Laplace», en el capítulo 41). Y su generalización a casos distintos de rectas y planos tiene más de cien años, aunque su importancia no haya sido apreciada en su justo valor hasta este ensayo. Tampoco es nueva en otras ciencias distintas de la matemática, pues Lewis F. Richardson postuló en 1926 que, en una amplia gama de escalas, la turbulencia se puede descomponer en remolinos autosemejantes. Es más, Kolmogorov (1941) extrae consecuencias *analíticas* notables de esta idea aplicada a la mecánica. Y en física, los aspectos analíticos del cambio de escala están relacionados con el concepto de grupo de renormalización (véase el capítulo 36).

Sin embargo, mi ensayo precedente de 1975 fue la primera obra que abordó los aspectos *geométricos* del cambio de escala no estándar en la naturaleza.

### *«Simetrías» más allá del cambio de escala*

Tras acabar con las líneas, Euclides aborda formas con otras invariancias más ricas, comúnmente denominadas «simetrías». Este ensayo realiza también una excursión bastante larga por el terreno de los fractales no escalantes del capítulo 15 al 20.

Los fractales no escalantes imagen de sí mismas están íntimamente relacionados con algunos de los temas más refinados y difíciles del análisis matemático clásico «duro». Y, en contra del tópico de que el análisis es un campo muy austero, estos fractales suelen resultar de una belleza inesperada.

### *Síndromes de divergencia*

Casi todos los casos que consideramos presentan un síndrome de divergencia. Esto es, una cantidad que se espera sea positiva y finita resulta que se hace infinita, o se anula. A primera vista, este mal comportamiento resulta de lo más extraño, e incluso aterrador, pero después de un examen más minucioso se hace del todo comprensible..., siempre y cuando se adopten nuevas formas de pensar.

Los casos en que una simetría va acompañada de una divergencia son también habituales y omnipresentes en la física cuántica, donde los métodos de eliminación de divergencias ocupan un lugar destacado. Por suerte, las distintas divergencias fractales son más fáciles de manejar.



Una vez esbozados los distintos objetivos de este ensayo, comentaré el estilo, que también intenta integrar varias facetas distintas.

*La oscuridad no es una virtud*

Con objeto de ser accesible a investigadores y estudiantes no necesariamente especialistas en los temas tratados, muchos de ellos esotéricos, esta obra es bastante expositiva.

*La explicación no es sin embargo su principal intención.*

Se ha intentado, además, no asustar a quienes, sin estar interesados en la precisión matemática, deberían estarlo en mis principales conclusiones. Aunque el estilo del libro es informal (aunque preciso), sus resultados tienen un respaldo matemático riguroso (más sólido que muchas ramas de la física). Los detalles se dejan para el capítulo 39, las referencias y diversos trabajos posteriores.

Como no es de esperar que los trabajos originales llenen este vacío, este ensayo es hasta cierto punto una *obra de divulgación*.

*La divulgación no es sin embargo su principal intención.*

*La erudición es buena para el espíritu*

Este ensayo contiene muchas referencias antiguas y oscuras, como se ha visto ya en el capítulo 2. La mayor parte de ellas no atrajo mi atención hasta bastante después de que mi propio trabajo en temas afines estuvo terminado en sus aspectos esenciales, y no tuvieron influencia sobre mí. Sin embargo, en los largos años en que no compartía mis intereses con nadie, me regocijaba descubrir inquietudes parecidas en viejos trabajos, por efímera e ineficaz que fuera su presentación, como prueba su ausencia de desarrollo subsiguiente. Así, el interés en los «clásicos», que la

práctica habitual de la ciencia no suele fomentar, se vio alimentado en mi caso.

En otras palabras, me alegraba ver cómo las piedras que me hacían falta —en mi condición de arquitecto y constructor de la teoría de los fractales— habían merecido ya la consideración de otros. Pero ¿por qué seguir hoy insistiendo en este hecho? Una nota a pie de página de vez en cuando bastaría para seguir la costumbre, mientras que insistir demasiado en unas raíces y unos orígenes lejanos podría alimentar la impresión absurda de que mi construcción es sólo un montón de viejas piedras con nombres nuevos.

Así pues, mi curiosidad de anticuario requiere una explicación que no intentaré dar. Baste decir que, en mi opinión, el interés por la historia de la ciencia es bueno para el alma del científico.

No obstante, siempre que leamos los escritos de un gran hombre a la luz de una gloria que él no alcanzó, podemos ponderar el delicioso prólogo de Lebesgue a un libro de Lusin, en el que renunciaba a la paternidad de muchas ideas profundas que dicho libro le atribuía, diciendo que podría, o quizás debería, haber tenido dichas ideas, pero no había sido así, y había que atribuírselas a Lusin. Un caso parecido es Whittaker (1953), en cuyo libro se manipulan citas de Poincaré y Lorentz para apoyar una tesis que ambos habían rechazado claramente: que la teoría de la relatividad fue obra suya y no de Einstein.

Corremos además el riesgo de que, por cada autor que apunte una idea que él no pudo desarrollar y nosotros sí, encontremos un segundo autor que declare la absurdidad de dicha idea. ¿Hemos de atribuir al joven Poincaré el mérito de las ideas que no pudo desarrollar y fueron descartadas por él mismo en su madurez? Stent (1972) podría llevarnos a la conclusión de que la precocidad, el estar muy avanzado a la propia época, sólo merece un olvido compasivo.

Si bien el exceso de erudición es contraproducente en lo que respecta a la historia del pensamiento, quiero reivindicar los ecos del pasado, poniéndolos de relieve en las notas biográficas e históricas de los capítulos 40 y 41.

*Sin embargo, mostrar mi erudición no es ciertamente la intención principal de este ensayo.*

«*Ver es creer*»

En una carta a Dedekind, prácticamente al principio de la crisis matemática entre 1875 y 1925, Cantor se muestra abrumado por lo asombroso

de sus propios descubrimientos, y pasa del alemán al francés para exclamar: «Lo veo pero no lo creo» («*Je le vois, mais je ne le crois pas*»). Y, como siguiendo esta indicación, la matemática procura evitar que las imágenes de los monstruos la confundan. ¡Qué contraste entre la exuberancia rococó de las geometrías pre o contrarrevolucionarias, y la aridez casi total de las obras de Weierstrass, Cantor o Peano! En física existía la amenaza de una evolución parecida desde principios del siglo XIX, cuando la *Mecánica celeste* de Laplace evita las ilustraciones. Muestra de ello es también la afirmación de P.A.M. Dirac (en el prólogo de su *Mecánica cuántica*, de 1930) de que las «leyes fundamentales [de la naturaleza] no rigen el mundo directamente tal como éste aparece en nuestra imagen mental, sino que actúan sobre un sustrato del que no podemos formarnos ninguna imagen mental sin cometer desatinos».

La aceptación general y sin el menor sentido crítico de esta opinión ha tenido consecuencias destructivas. En la teoría de fractales, en concreto, «ver es creer». Por tanto, antes de seguir adelante, aconsejo al lector que hojee otra vez mi libro de imágenes. Este ensayo fue proyectado para que su contenido fuera accesible en grado diverso a un público amplio, y para intentar servirse, convenciendo incluso al más puro de los matemáticos, de los buenos gráficos para mejorar la comprensión de conceptos tanto conocidos como nuevos, así como en la investigación de conjeturas. Una confianza así en la utilidad de los gráficos no es frecuente en la literatura científica contemporánea.

*Sin embargo, la intención principal de este ensayo no es mostrar bellas imágenes; son un útil esencial pero sólo eso.*

Hay que reconocer también que cualquier intento de ilustrar la geometría encierra una falacia fundamental. Por ejemplo, una línea recta es ilimitada, infinitamente fina e infinitamente lisa, mientras que cualquier ilustración tiene inevitablemente una longitud finita, un cierto grosor y rugosidades. Sin embargo, muchos piensan que un dibujo que groseramente evoque una recta les es útil, y a otros les es necesario para estimular la intuición y les sirve de ayuda para buscar demostraciones. Un dibujo tosco es un modelo mejor de un hilo que la propia recta matemática. Es decir, a efectos prácticos es suficiente que un concepto geométrico y su imagen coincidan en una serie de escalas características, que van de un tamaño grande pero finito, que llamaremos corte superior, a un pequeño corte inferior no nulo.

Hoy en día, gracias al dibujo asistido por ordenador, es posible y práctico emplear ilustraciones evocativas de esta clase en el caso de los fractales. Por ejemplo, todas las curvas fractales autosemejantes son también ilimitadas e infinitamente finas. Además, cada una de ellas tiene un

grado de rugosidad específico, lo que la hace más compleja que cualquier figura euclídea. Por consiguiente, la mejor de las representaciones sólo puede ser válida en una gama limitada de escalas. Sin embargo, limitarse a las escalas entre los cortes superior e inferior no sólo es completamente aceptable sino muy adecuado, puesto que ambos cortes se dan en la naturaleza, o por lo menos así podemos sospecharlo. Así pues, las curvas fractales típicas pueden ser evocadas satisfactoriamente mediante poligonales de un número grande, pero finito, de lados.

Cuanto mayor es el número de lados y la precisión del proceso, más útil resulta la representación, pues los conceptos fractales se refieren a la posición mutua de dichos lados en el espacio, y para ilustrarla es vital mantenerlos en la escala conveniente. El dibujo a mano supondría un trabajo excesivo, pero los gráficos por ordenador cumplen perfectamente este cometido. La disponibilidad de sistemas cada vez más sofisticados —¡y de programadores-artistas cada vez más sofisticados que los hagan funcionar!— ha tenido una gran influencia sobre mis sucesivos ensayos. Me considero muy afortunado también por tener acceso a una máquina que produce ilustraciones ya listas para la imprenta. Y en este ensayo se presenta una muestra de su rendimiento.

Las gráficas son un útil estupendo para contrastar los modelos con la realidad. Cuando un mecanismo aleatorio concuerda con los datos desde un cierto punto de vista analítico, pero las simulaciones del modelo no tienen en absoluto una apariencia de «realidad», hay que dudar de la concordancia analítica. Una fórmula dada sólo puede reflejar un aspecto de la relación entre el modelo y la realidad, en tanto que el ojo tiene una enorme capacidad de integración y discriminación. Es cierto que, a veces, el ojo aprecia falsas relaciones que un análisis estadístico posterior invalida, pero este problema se da sobre todo en áreas de la ciencia en las que las muestras son pequeñas. En las áreas que estudiaremos aquí, las muestras son enormes.

Además, las gráficas ayudan a encontrar nuevas aplicaciones para modelos ya existentes. Experimenté por primera vez esta posibilidad con la ilustración del camino aleatorio de Feller (1950); la curva se parecía al perfil o corte vertical de una montaña, y sus puntos de intersección con el eje de tiempos me recordaban ciertos registros que estaba investigando por aquel entonces, en relación con los errores telefónicos. Los presentimientos subsiguientes me llevaron a las teorías que presento en los capítulos 28 y 31, respectivamente. Mis propias ilustraciones asistidas por ordenador dieron lugar a inspiraciones similares, tanto en mí como en otros que amablemente «exploraron» por mí en ciencias cuya existencia ni sospechaba.

La cinematografía es, desde luego, una prolongación del arte gráfico, y Max (1971) ha realizado algunas películas sobre unos cuantos fractales clásicos.

### *La forma estándar y la nueva forma fractal del «arte» geométrico*

La sobrecubierta de este libro y otras figuras que se han ido difundiendo sólo son el fruto involuntario de programas defectuosos. Me he enterado de que dichas ilustraciones, tanto las deseadas como las fortuitas, eran presentadas como una «nueva forma de arte».

*Está claro que competir con los artistas no es, ni mucho menos,* la intención de este ensayo. Sin embargo, hay que pronunciarse sobre el asunto. No se trata tanto de que las ilustraciones estén bien presentadas, ni tampoco de que los originales se hayan dibujado con un ordenador, sino de que estamos ante una nueva forma del viejo y controvertido tema de que cualquier representación gráfica de un concepto matemático es una forma de arte, tanto mejor cuanto más simple. Una forma de «arte minimalista» (usando una expresión propia de la pintura).

En general se piensa que el minimalismo se reduce a unas cuantas combinaciones de formas estándar: rectas, círculos, espirales y otras por el estilo. Pero no hace falta que sea así. Las fractales que se emplean en los modelos científicos son también muy simples (pues la ciencia fomenta la sencillez), y opino que muchas de ellas merecen ser consideradas una nueva forma de arte geométrico minimalista.

¿Hay algo que nos sugiera la obra de M. C. Escher? Debería ser así, pues Escher se inspiró en los embaldosados hiperbólicos de Fricke y Klein (1897), los cuales (véase el capítulo 18) están íntimamente relacionados con formas que han entrado a formar parte del reino fractal.

El «nuevo arte geométrico» fractal presenta una sorprendente afinidad con las pinturas de los grandes maestros y con la arquitectura. Una razón evidente es que, al igual que los fractales, las artes visuales clásicas ponen en juego muchas escalas de longitud distintas y tienen preferencia por la autosemejanza (Mandelbrot, 1981). Por todo ello, y también por haber resultado de un esfuerzo por imitar la naturaleza con objeto de descubrir sus leyes, podría muy bien ser que el arte fractal fuera fácilmente aceptado, por no ser del todo nuevo. En este aspecto, la situación de la pintura abstracta no es uniforme: los cuadros abstractos que me gustan no suelen distar mucho del arte geométrico fractal, pero muchos otros se aproximan más al arte geométrico estándar (demasiado para mi gusto).

Se plantea entonces una paradoja: pudiera parecer que, como señala Dyson en la cita del capítulo 1, la matemática, la música, la pintura y la arquitectura modernas guardan una cierta relación. Es una impresión completamente superficial. Esto queda muy claro especialmente en arquitectura: un edificio de Mies van der Rohe es una vuelta atrás a Euclides, en tanto que un edificio estilo Art Nouveau tardío es rico en aspectos fractales.

### *Aspectos logísticos*

Con la finalidad de introducir gradualmente las ideas básicas, la complejidad de los temas abordados en los sucesivos capítulos es creciente. El hecho de que este enfoque parezca posible es una gran ventaja de la teoría de los fractales. La cantidad de material repetido que se incorpora es tal que parece poco probable que el lector vaya a perder el hilo del argumento aun cuando se salte fragmentos que le parezcan repetitivos, o demasiado complicados (en especial aquellos que van más allá de la matemática más elemental). Los pies de las láminas contienen buena parte de la información.

Como ya se ha dicho, las láminas se han concentrado al final de los capítulos en los que han sido consideradas por primera vez. Además, este autor siente de vez en cuando la necesidad de entablar conversaciones privadas, por así decirlo, con grupos concretos de lectores que pudieran sentirse demasiado molestos si ciertos puntos no fueran citados o recibieran una explicación insuficiente. Las digresiones se han dejado en el texto, aunque enmarcadas en los recién inventados paréntesis ¶ y ■, que deben facilitar el pasarlas de largo a quien así lo desee. Otras digresiones se dedican a observaciones secundarias en las que no tengo tiempo de profundizar. Sin embargo, este ensayo tiene menos digresiones que su antecesor de 1977.

Se ha intentado que a primera vista esté claro si se está tratando con dimensiones  $D$  teóricas o empíricas. En su mayoría, de éstas sólo se pueden precisar uno o dos decimales, y así se escriben como 1,2 o 1,37. Las primeras, por el contrario, se expresan como enteros, fracciones enteras, cocientes de logaritmos de enteros o, cuando se dan en forma decimal, con un mínimo de *cuatro* cifras decimales.

### *Volviendo al tema fundamental*

Después de haber renunciado a varios objetivos que son colaterales a este ensayo, permítaseme parafrasear el capítulo 1. Este libro es *un mani-*

*fiesto y un sumario*, casi exclusivamente dedicado a teorías y tesis que he introducido yo y que a menudo han traído consigo el resurgimiento y la reinterpretación de trabajos antiguos.

Ninguna de estas teorías ha dejado de crecer, y algunas están aún en fase de germinación. Algunas ven la luz aquí por primera vez, en tanto que otras fueron descritas en mis artículos anteriores. Cito además muchos avances que fueron inspirados por mis ensayos anteriores y que, a su vez, me han estimulado a mí. No obstante, por temor a echar a perder el estilo del ensayo y el sabor a manifiesto, no intento dar una lista de todos aquellos campos en los que los fractales han probado su utilidad.

Ultima advertencia: no me propongo desarrollar ninguno de los casos a tratar con todo el detalle que desearían los especialistas. Pero muchos de los temas son tratados de manera repetitiva; es muy conveniente usar el índice.





## II Tres fractales clásicos domesticados



## ¿Cuánto mide la costa de Bretaña?

Para empezar con un primer tipo de fractales, a saber, las curvas de dimensión fractal mayor que 1, considérese un tramo de costa. Es evidente que, por lo menos, mide tanto como la distancia en línea recta entre sus extremos. Ahora bien, una costa típica es irregular y sinuosa, y sin duda es mucho más larga que dicha recta.

Hay varias maneras de evaluar su longitud con mayor precisión, y en este capítulo se analizan algunas de ellas. El resultado es de lo más curioso: la longitud de una costa es un concepto esquivo, que se nos escapa entre los dedos cuando pretendemos asirlo. Todos los métodos de medida llevan a la conclusión de que la longitud de una costa típica es muy grande, tan indeterminada que es mejor considerarla infinita. En consecuencia, si se quiere comparar la «extensión» de distintas costas, la longitud es un concepto inadecuado.

En este capítulo se busca una alternativa mejor y, al hacerlo, resulta imposible no introducir diversos conceptos fractales de dimensión, medida y curva.

### *Multiplicidad de los métodos de medida alternativos*

MÉTODO A: Se toma un compás de puntas con una abertura  $\epsilon$ , que llamaremos longitud patrón, y se traslada a lo largo de la costa, empezando cada paso donde termina el anterior. El número de pasos multiplicado por  $\epsilon$  es una longitud aproximada  $L(\epsilon)$ . Hemos aprendido que, si se repite la operación disminuyendo la abertura del compás,  $L(\epsilon)$  tiende rápidamente a un valor bien definido llamado *longitud verdadera*. Pero no es eso lo que ocurre en realidad. En los casos típicos, el valor  $L(\epsilon)$  observado crece indefinidamente.

La causa de esto es obvia: Si una bahía o una península observable en un mapa a escala 1/100.000 se contempla en un mapa a escala 1/10.000, se hacen visibles las subbahías y las subpenínsulas. En un mapa a escala

1/1000 aparecerán sub-subbahías y sub-subpenínsulas, y así sucesivamente. Todos estos accidentes contribuyen a aumentar la longitud medida.

Nuestro procedimiento parte del hecho de que una costa es demasiado irregular para ser medida directamente, leyendo en un catálogo de longitudes de curvas geométricas sencillas. Por tanto, el método A sustituye la costa por una línea quebrada de segmentos rectilíneos, una curva que sabemos manejar.

MÉTODO B: Esta «suavización» puede conseguirse también por otros métodos. Imaginemos un hombre andando a lo largo de la costa por el camino más corto sin alejarse del agua más de una distancia prescrita  $\epsilon$ . Imaginemos que repite este paseo varias veces, reduciendo cada vez esta distancia patrón, hasta que  $\epsilon$  se reduce a, pongamos por caso, 50 cm. El hombre es demasiado grande y torpe para afinar más. Se podría argüir que una precisión mayor ( $a$ ) no tiene interés directo a escala humana y ( $b$ ) varía tanto con la estación y las mareas que carece de significado. Trataremos más adelante del argumento ( $a$ ), pero mientras podemos neutralizar el argumento ( $b$ ) restringiéndonos a la observación de una costa rocosa, durante la bajamar y sin oleaje. En principio el hombre puede seguir esa curva con la máxima precisión amaestrando primero un ratón, luego una hormiga, etc.. Y nos volvemos a encontrar con que, a medida que nuestro paseante se ajusta más y más a la costa, la distancia a cubrir aumenta sin límite.

MÉTODO C: El método B introduce una asimetría entre agua y tierra. Para evitarla, Cantor sugiere contemplar la costa con una cámara desenfocada que convierta cada punto en una mancha circular de radio  $\epsilon$ . Dicho de otro modo, Cantor considera todos los puntos de tierra y agua que distan de la costa menos de  $\epsilon$ . Estos puntos forman una especie de salchicha o cinta de anchura  $2\epsilon$ , como la que se muestra en la lámina 32 en un contexto distinto. Midamos el área de esta cinta y dividámosla por  $2\epsilon$ . Si la costa fuera recta, la cinta sería rectangular y el cociente nos daría su longitud. En el caso de una costa real obtenemos una estimación de la longitud  $L(\epsilon)$  que aumenta indefinidamente al disminuir  $\epsilon$ .

MÉTODO D: Imagínese un mapa dibujado al estilo puntillista, mediante manchitas circulares de radio  $\epsilon$ . En vez de usar círculos con centro en la costa como en el método C, pondremos como condición que el número de manchitas que recubren la costa sea el menor posible. Tendremos que cerca de los cabos la mayor parte de cada manchita estará sobre la tierra, mientras que en los golfos estará en el mar.

El área de dicho mapa dividida por  $2\epsilon$  nos da una estimación de la longitud que, como las anteriores, también «se comporta mal».

## Arbitrariedad de los resultados de la medida

Resumiendo lo dicho en la sección anterior, básicamente encontramos siempre el mismo resultado. A medida que  $\epsilon$  se va haciendo más y más pequeño, las longitudes aproximadas crecen continua e indefinidamente.

Con objeto de captar el significado de este resultado, realicemos las mismas medidas para una curva euclídea corriente. Para un segmento de recta, las medidas aproximadas dan prácticamente el mismo resultado, y este define su longitud. Para un círculo, las medidas aproximadas crecen al disminuir  $\epsilon$ , pero convergen rápidamente hacia cierto límite. Las curvas que admiten una longitud así definida se dicen *rectificables*.

Y al considerar los resultados de medir una costa domesticada por el hombre, como puede ser la costa actual de Chelsea, nos encontramos con un contraste más interesante aun. Como la mano del hombre no ha alterado los rasgos a gran escala, las medidas obtenidas con un patrón muy grande crecen de nuevo al disminuir  $\epsilon$ .

Sin embargo, hay una gama intermedia de valores de  $\epsilon$ , entre los 20 metros y los 20 centímetros (sin fijar demasiado estrictamente estos límites) en que  $L(\epsilon)$  varía poco. Cuando  $\epsilon$  disminuye por debajo de los 20 centímetros, las medidas se ven afectadas por la irregularidad de las piedras y  $L(\epsilon)$  vuelve a aumentar. Así pues, no cabe duda de que, si trazamos la gráfica de  $L(\epsilon)$  en función de  $\epsilon$ , encontraremos una porción prácticamente plana entre  $\epsilon=20$  metros y  $\epsilon=20$  centímetros, que no se observaba antes de que la costa fuera domesticada.

Es obvio que las medidas tomadas en esta zona son de gran importancia práctica. Como la separación entre las diversas disciplinas científicas depende generalmente de la división convencional del trabajo entre los científicos, se podría restringir la geografía a los accidentes fuera del alcance de la mano del hombre (escalas superiores a los 20 metros, por ejemplo). Esta restricción daría un valor bien definido de la longitud geográfica. El guardacostas podría decidir tomar el mismo  $\epsilon$  para costas no domesticadas, con lo que las enciclopedias y almanaques podrían adoptar la  $L(\epsilon)$  correspondiente.

Resulta difícil imaginar, sin embargo, que todas las agencias de un mismo gobierno adopten el mismo  $\epsilon$ , y es del todo inconcebible que lo adopten todos los países. Por ejemplo, las longitudes de las fronteras comunes entre España y Portugal, o entre Bélgica y Holanda, según datos de las enciclopedias de estos países vecinos, difieren en un 20% (Richardson, 1961). Dicha discrepancia tiene que deberse en buena parte a la elección de distintos valores de  $\epsilon$ . Un descubrimiento empírico que

discutiremos pronto demuestra que basta que los  $\epsilon$  difieran en un factor de 2, y no debe sorprendernos que un país pequeño (Portugal) mida sus fronteras con mas precisión que su gran vecino.

La segunda razón, y la más importante, que nos decide contra la elección de un  $\epsilon$  arbitrario es de tipo filosófico y científico. La naturaleza tiene una existencia independiente del hombre, y quienquiera que dé demasiado peso a unos  $\epsilon$  y  $L(\epsilon)$  determinados estará supeditando el estudio de la naturaleza al dominio del hombre, sea a través de la magnitud de su patrón típico o de su altamente variable capacidad tecnológica. Si alguna vez la investigación científica se interesa por las costas, la incertidumbre de sus longitudes no se puede eliminar por decreto. Sea como sea, el concepto de longitud geográfica no es tan inofensivo como pueda parecer a primera vista. No es completamente «objetivo». El observador interviene inevitablemente en su definición.

*¿Es esta arbitrariedad algo generalmente admitido?*

*¿Importa para algo?*

No cabe duda de que la idea de que las longitudes de las costas no son rectificables es algo aceptado por mucha gente, y yo mismo no recuerdo haber pensado nunca lo contrario. Pero mi búsqueda de enunciados escritos de este efecto prácticamente ha sido un fracaso. Además de la cita de Perrin del capítulo II, tenemos la observación de Steinhaus (1954) de que «la ribera izquierda del Vístula, medida con precisión creciente, daría resultados diez, cien y hasta mil veces mayores que la longitud que figura en los mapas... [Una] afirmación muy próxima a la realidad sería decir que la mayoría de arcos que se encuentran en la naturaleza no son rectificables. Este enunciado va contra la creencia corriente de que los arcos no rectificables son un invento de los matemáticos y que los arcos naturales son rectificables; lo cierto, sin embargo, es lo contrario». Pero ni Perrin ni Steinhaus profundizaron en esta idea.

Aquí encaja una historia que me contó C. Fadiman. Su amigo Edward Kasner pidió a unos jovencuelos «que adivinaran la longitud de la costa este de los Estados Unidos. Después de dejarles un tiempo “prudencial” ... les hizo notar que el resultado aumentaría una barbaridad si se tenía en cuenta el perímetro de cada cala y cada golfo, el de cada proyección y curva de cada uno de éstos, la distancia entre cada dos partículas de materia de la costa, cada molécula, átomo, etc... Evidentemente la longitud de la costa es tan grande como uno quiera. Los niños lo entendieron a la primera; pero Kasner tuvo más problemas con la gente mayor». Aunque

es una bella historia, es irrelevante aquí: Kasner no pretendía destacar un aspecto de la naturaleza que mereciera ser estudiado con más detenimiento.

Por lo tanto, Mandelbrot (1967) y este ensayo son, en efecto, los primeros trabajos sobre el tema.

Uno piensa en un pasaje de William James en *The Will to Believe*, donde dice: «El vasto campo para los nuevos descubrimientos ... es siempre el residuo sin clasificar. Alrededor de los hechos acreditados y ordenados de cada ciencia siempre flota algo como una nube de polvo de observaciones excepcionales, sucesos minúsculos, irregulares e infrecuentes, que siempre resulta más fácil ignorar que tener en cuenta. El ideal de todas las ciencias es el de un sistema de verdad completo y cerrado... Los fenómenos inclasificables en el sistema son absurdos, paradójicos, y hay que declararlos falsos... se los niega u olvida con plena conciencia científica... Para renovar una ciencia hay que interesarse por los fenómenos irregulares. Y una vez se ha renovado la ciencia, sus nuevas fórmulas a menudo expresan más la excepción que lo que se suponía que era la regla».

Este ensayo, que pretende efectivamente renovar la geometría de la naturaleza, se basa en muchos rompecabezas tan inclasificables que sólo se publican cuando los censores se duermen. En la siguiente sección comentamos un primer ejemplo.

### *El efecto Richardson*

Richardson (1961) estudió empíricamente la variación de la longitud aproximada  $L(\epsilon)$  obtenida por el método A. El azar (o el destino) hizo que esta referencia cayera en mis manos. Le presté atención porque (capítulo 40) sabía que Lewis Fry Richardson era un gran científico, muy original y a la vez excéntrico. Como veremos en el capítulo 10, le debemos algunas de las ideas más profundas y permanentes acerca de la naturaleza de la turbulencia, sobre todo la idea de que la turbulencia trae aparejada una cascada autosemejante. Se ocupó también de otros problemas difíciles, como la naturaleza de los conflictos armados entre estados. Sus experimentos fueron de una simplicidad clásica, pero no dudaba en usar conceptos refinados cuando los creía necesarios.

Los gráficos reproducidos en la lámina 59, hallados entre sus papeles después de su muerte, fueron publicados en un *Anuario* prácticamente confidencial (y totalmente inadecuado para el tema). Todos ellos llevan a la conclusión de que hay dos constantes, que llamaremos  $F$  y  $D$ , tales

que, para aproximar una costa con una línea quebrada hacen falta unos  $F\epsilon^{-D}$  segmentos de longitud  $\epsilon$ , con lo que su longitud total es

$$L(\epsilon) \sim F\epsilon^{1-D}.$$

Parece ser que el exponente  $D$  depende de la costa considerada, y que distintas partes de la misma costa, consideradas por separado, dan valores distintos de  $D$ . Para Richardson, la  $D$  en cuestión no era más que un simple exponente, sin mayor trascendencia. Parece, sin embargo, que su valor es independiente del método elegido para estimar la longitud de la costa. Así pues, parece justificado dedicarle mayor atención.

### *Dimensión fractal de una costa (Mandelbrot, 1967s)*

Después de desenterrado el trabajo de Richardson, propuse (Mandelbrot 1967s) que, a pesar de que el exponente  $D$  no fuera un entero, podía y debía interpretarse como una dimensión, en el sentido de dimensión fractal. En efecto, me di cuenta de que los métodos citados para medir  $L(\epsilon)$  se correspondían con generalizaciones no estándar de la definición de dimensión, que ya se usaban en matemática pura. La definición de longitud basada en recubrir la costa con el menor número posible de manchas de radio  $\epsilon$  es usada en Pontrjagin y Schnirelman (1932) para definir la dimensión de recubrimiento. La definición de longitud basada en recubrir la costa con una cinta de anchura  $2\epsilon$  lleva a la práctica una idea de Cantor y Minkowski (Lámina 58), y la dimensión correspondiente se debe a Bouligand. Sin embargo, estos dos ejemplos sólo dan una idea de las muchas dimensiones que se dan en diversos capítulos especializados de la matemática (la mayoría de ellas sólo son conocidas por unos pocos especialistas). En el capítulo 39 volveremos sobre algunas de ellas.

¿Por qué emplean los matemáticos esta plétora de definiciones distintas? Porque en determinados casos toman valores distintos. Por suerte, sin embargo, esos casos no se dan en este ensayo, y la lista de posibles dimensiones alternativas se puede reducir a dos que no he citado aún. La más antigua y mejor conocida se debe a Hausdorff y sirve para definir la dimensión fractal; volveremos sobre ella en un momento. La más simple es la dimensión de semejanza que, si bien es menos general, en muchos casos es más que suficiente, y la estudiaremos en el capítulo siguiente.

Quede claro que no me propongo dar una demostración matemática de que la  $D$  de Richardson es una dimensión. En ninguna ciencia natural es concebible una demostración de esta clase. El propósito sólo es con-



vencer al lector de que la idea de longitud plantea un problema conceptual y de que la  $D$  proporciona una respuesta conveniente y razonable. Ahora que ya hemos introducido la dimensión fractal en el estudio de las costas, aunque habrá que afrontar todavía problemas concretos, pienso que ya no podemos volver al estadio en el que aceptábamos ingenuamente sin más que  $D=1$ . Quien siga pensando que  $D=1$  tendrá que dar sus razones.

El paso siguiente en la explicación de la forma de las costas y en la deducción del valor de  $D$  a partir de consideraciones más básicas se aplaza hasta el capítulo 28. Baste aquí decir que en primera aproximación  $D=3/2$ . Aunque este valor es con mucho demasiado grande para describir la realidad, nos bastará para establecer que es natural, apropiado y esperable que la dimensión de una costa exceda el valor euclídeo estándar  $D=1$ .

### *La dimensión fractal de Hausdorff*

Si aceptamos que la longitud de varias costas naturales es realmente infinita y que la longitud basada en un valor antropocéntrico de  $\epsilon$  sólo da una idea parcial de la realidad, ¿cómo podemos comparar entre sí distintas costas? Dado que infinito es igual a cuatro veces infinito, cada costa es cuatro veces más larga que cada uno de sus cuartos, pero esta conclusión no nos sirve de gran cosa. Necesitamos una manera mejor de expresar la idea lógica de que la curva entera debe «medir» cuatro veces más que cada uno de sus cuartos.

Felix Hausdorff dio una solución de lo más ingenioso para resolver este problema. Se inspira en el hecho de que el perímetro de un polígono se calcula sumando sin más las longitudes de sus lados, sin transformarlas de ninguna manera. Se podría decir (el porqué se verá enseguida) que estas longitudes están elevadas a la potencia  $D=1$ , que es la dimensión euclídea de la recta. Análogamente, el área encerrada en el interior de un polígono se calcula embaldosándolo con cuadrados y sumando los lados de los cuadrados elevados a la potencia  $D=2$ , la dimensión euclídea del plano. Además, si se usa la potencia «equivocada» el resultado no nos da ninguna información concreta: el área del contorno de un polígono es cero y la longitud de su interior es infinita.

Procedamos de un modo análogo con las aproximaciones poligonales a una costa dada, formadas por pequeños segmentos de longitud  $\epsilon$ . Si elevamos sus longitudes a la potencia  $D$ , obtenemos una cantidad que podríamos llamar «medida aproximada de dimensión  $D$ ». Como, según Ri-

chardson, el número de lados es  $N = F\varepsilon^{-D}$ , tenemos que dicha medida aproximada toma el valor  $F\varepsilon^D\varepsilon^{-D} = F$ .

Así pues, *la medida aproximada de dimensión  $D$  es independiente de  $\varepsilon$* . Con datos reales, encontraríamos simplemente que esta medida aproximada varía poco con  $\varepsilon$ .

Además, el hecho de que la longitud del interior de un cuadrado sea infinita tiene una generalización simple: la medida aproximada de una costa evaluada en una dimensión  $d$  menor que  $D$  tiende a  $\infty$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De manera análoga, así como el área y el volumen de una línea recta son nulos, cuando  $d$  toma un valor mayor que  $D$ , la medida aproximada correspondiente tiende a 0 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La medida aproximada sólo se comporta bien cuando  $d = D$ .

*La dimensión fractal de una curva puede ser mayor que 1.*

*Curvas fractales*

Por construcción, la dimensión de Hausdorff conserva el papel de la dimensión ordinaria como exponente en la definición de una *medida*.

Pero en otros aspectos  $D$  es verdaderamente muy rara: ¡es una fracción! Y en particular es mayor que 1, que es la dimensión intuitiva de las curvas y que, como se puede demostrar rigurosamente, es su dimensión topológica  $D_T$ .

Propongo que las curvas cuya dimensión fractal sea mayor que su dimensión topológica 1 se llamen *curvas fractales*. Y este capítulo se puede resumir diciendo que, en las escalas que interesan al geógrafo, las costas se pueden representar por curvas fractales. Las costas son *figuras fractales*.

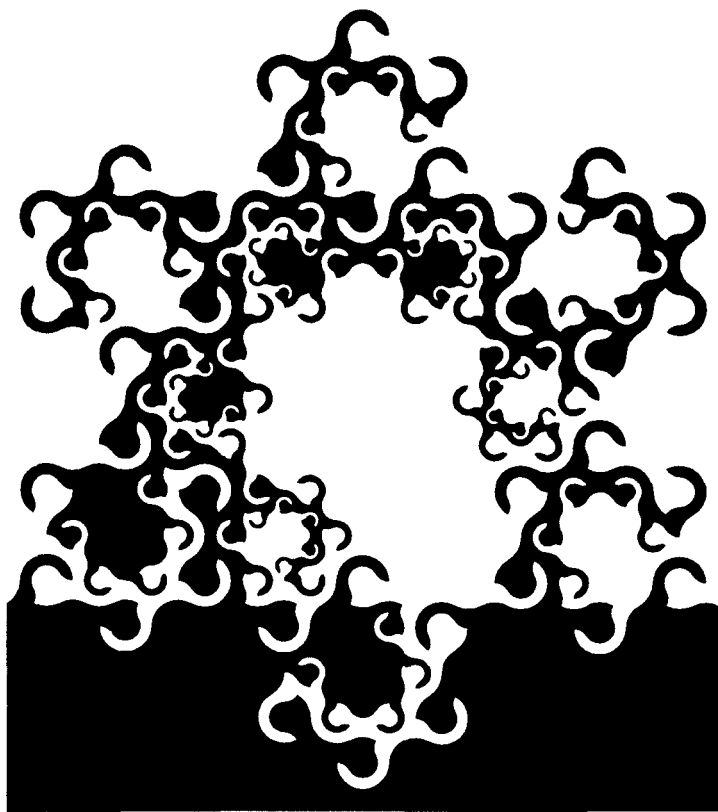
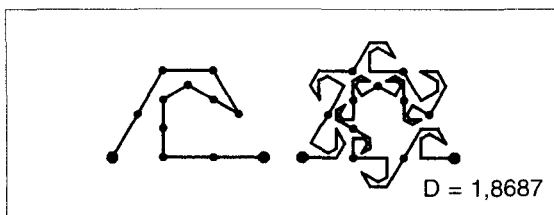


FIG 57. *El árbol de los monos*

Aquí, esta lámina pequeña y accesoria no es más que un dibujo decorativo, que sirve para llenar un hueco.

Sin embargo, cuando el lector acabe el capítulo 14, este dibujo le proporcionará una pista para descifrar la «arquitectura» de la lámina 208. Una pista más discreta la tiene en el siguiente generador.



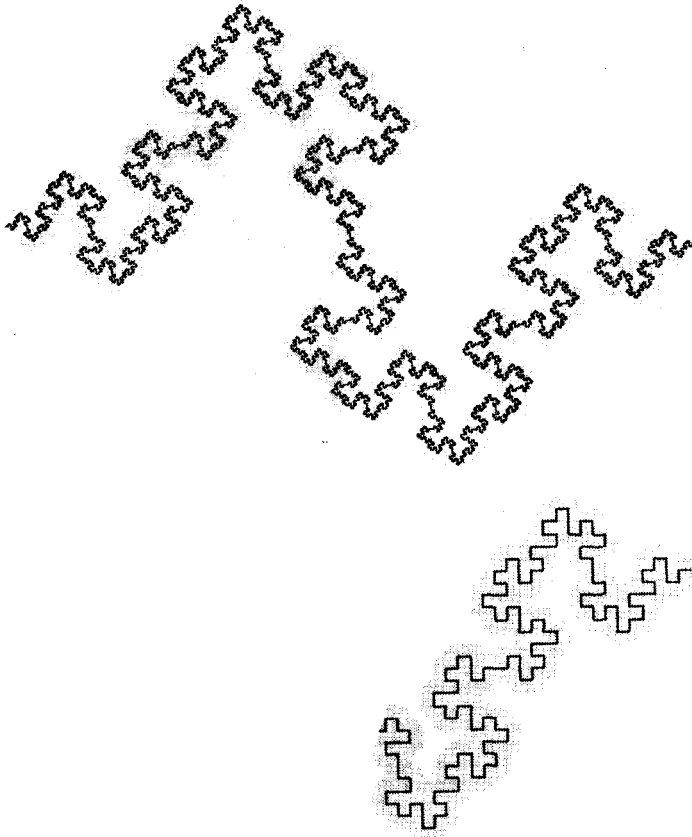


FIG 58. *Un ejemplo de salchicha de Minkowski*

Cuando un matemático quiere «domesticar» una curva desmadradamente irregular, un procedimiento normal consiste en elegir un radio  $\epsilon$  y dibujar un disco de este radio alrededor de cada punto. Este procedimiento, que data por lo menos de la época de Hermann Minkowski y quizá de la de Georg Cantor, es burdo pero muy eficiente. (Parece ser que el término *salchicha*, según un rumor improbable, es una reminiscencia de una aplicación de este procedimiento a las curvas brownianas por Norbert Wiener.)

En esta ilustración, dicho método de suavización no se aplica a una costa real sino a una curva teórica que construiremos más adelante (Lámina 76) mediante la adición continuada de detalles cada vez más pequeños. Comparando el pedazo de salchicha de la derecha con el extremo derecho de la salchicha de encima, se observa que la construcción de la curva pasa por un estadio crítico cuando aparecen los detalles de tamaño menor que  $\epsilon$ . Los estadios posteriores de la construcción dejan la salchicha prácticamente inalterada.

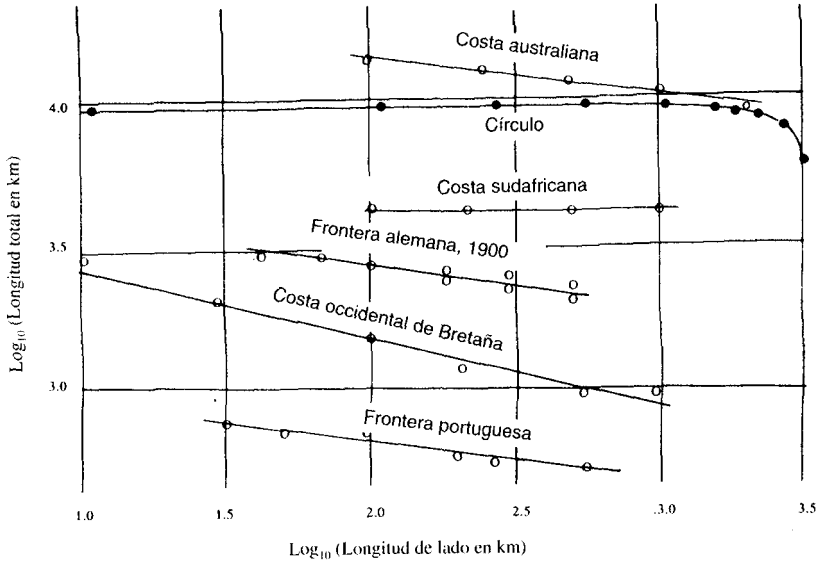


FIG. 59. *Los datos experimentales de Richardson referentes a la tasa de aumento de la longitud de las costas*

Esta figura reproduce las medidas experimentales de la longitud de varias curvas, usando polígonos equiláteros de lado  $\epsilon$  cada vez más corto. Como era de esperar, las medidas cada vez más precisas realizadas sobre un círculo se estabilizan muy rápidamente cerca de un valor bien determinado.

En el caso de las costas, por el contrario, las longitudes aproximadas no se estabilizan en absoluto. A medida que la longitud patrón  $\epsilon$  tiende a cero, las longitudes aproximadas, representadas en papel bilogarítmico, se ordenan según una recta de pendiente negativa. Y lo mismo ocurre con las fronteras entre países. El registro de Richardson en los archivos pone de manifiesto diferencias notables en las longitudes de las fronteras comunes entre España y Portugal (987 frente a 1.214 Km), y entre Holanda y Bélgica (380 frente a 449 Km). Con una pendiente de  $-0,25$ , la diferencia del 20 % entre estos datos se puede explicar suponiendo que los  $\epsilon$  respectivos difieren en un factor 2, cosa que no es inverosímil.

Richardson no dio ninguna interpretación teórica a las pendientes de sus líneas. En este ensayo, por el contrario, se interpreta que las costas son curvas aproximadamente fractales, y la pendiente de cada línea da una estimación de  $1-D$ , siendo  $D$  la dimensión fractal.

## Los copos de nieve y otras curvas de Koch

Para entender completamente mi interpretación de la  $D$  de Richardson como dimensión fractal, pasaremos de los fenómenos naturales, que no podemos controlar, a las construcciones geométricas, que podemos modificar a placer.

### *Autosemejanza y cascadas*

Hasta aquí hemos insistido en que la geometría de una costa es complicada, pero su estructura presenta también un alto grado de orden.

Aunque los mapas dibujados a distintas escalas difieran en sus detalles concretos, comparten las mismas características genéricas. Es bastante cierto que, aparte de la escala, los pequeños y grandes detalles de las costas son geoméricamente idénticos.

Podría pensarse que esas formas han sido creadas por una especie de fuego de artificio, en que cada estadio creara detalles más finos que los de los estadios anteriores. Pero el trabajo ya citado de Lewis Richardson sobre la turbulencia sugiere un término más apropiado para este mecanismo generador: el de *cascada*.

Cuando cada trozo de una cierta figura es geoméricamente semejante al todo, se dice que tanto la figura como la cascada que la produce son *autosemejantes*. En este capítulo investigamos la autosemejanza mediante figuras muy regulares.

Los contrastes más extremos respecto a las figuras autosemejantes los proporcionan las curvas que o bien (*a*) tienen una sola escala, como el círculo, o bien (*b*) tienen dos escalas claramente distintas, como un círculo «festoneado». De estas formas puede decirse que son *escalonadas*.

### *Los terágonos en forma de costa y la curva triádica de Koch K*

Para asegurarse de que una curva presentará una infinidad de escalas, lo mejor es introducirlas deliberadamente y por separado. Un triángulo

equilátero de lado 1 tiene una sola escala, los de lado  $1/3$  tienen una escala menor, y los de lado  $(1/3)^k$ , una escala cada vez menor. Amontonando estos triángulos uno encima de otro, como en la lámina 70, se obtiene una forma que combina todas las escalas inferiores a 1.

En efecto, suponemos que un pedazo de costa dibujado a escala 1:1.000.000 es un segmento de recta de longitud 1, que llamaremos *iniciador*. A continuación suponemos que el detalle que se hace visible en un mapa a escala 3:1.000.000 consiste en sustituir el tercio central del segmento por un promontorio triangular. Lo que resulta como aproximación es una línea quebrada formada por cuatro segmentos iguales, que llamaremos *generador*. Suponemos luego que el nuevo detalle que aparece a escala 9:1.000.000 resulta de sustituir cada uno de los cuatro segmentos del generador por generadores de tamaño reducido en un tercio, formando subpromontorios.

De este modo, rompemos cada segmento, sustituyendo el iniciador por una curva cada vez más quebrada. Como estas curvas serán omnipresentes en este ensayo, permítaseme acuñar para designarlas el término *terrágono*, del griego *τερας*, que significa «monstruo, criatura extraña», y *γωνία*, que significa «esquina, ángulo». Con gran acierto, el sistema métrico usa el prefijo *tera* para indicar el factor  $10^{12}$ .

Si este mismo proceso en cascada se continúa indefinidamente, nuestros terrágonos convergerán a un límite que fue considerado por primera vez por von Koch (1904), lámina 73, al que llamaremos curva triádica de Koch y denotaremos por *K*.

El área de esta curva es nula, como se deduce de la lámina 71. Pero, por otra parte, cada paso de la construcción incrementa su longitud en un factor  $4/3$ , con lo que la curva límite tiene una longitud infinita. Además, es continua y no tiene tangente en ningún punto (como la gráfica de una función continua sin derivada).

Como modelo de costa, *K* sólo es una aproximación sugerente, pero no por ser demasiado irregular, sino porque, comparada con una costa, presenta una irregularidad demasiado sistemática. En los capítulos 24 y 28 la «relajamos» un tanto para hacer que se ajuste mejor.

### *La curva de Koch como monstruo*

Según la hemos introducido en la sección anterior, parece como si la curva de Koch fuera la cosa más intuitiva que se pueda dar en geometría. Pero la actitud convencional hacia ella es completamente distinta. ¡Tal es así que casi todos los matemáticos están de acuerdo en calificar *K* de

monstruosa! Para concretar más, vayamos a *La crisis de la intuición* (Hahn, 1956), obra a la que volveremos más veces. Leemos que «la naturaleza [de una curva no rectificable o de una curva sin tangentes] escapa completamente a la intuición; después de unas pocas repeticiones del proceso de segmentación, la figura que va resultando es tan complicada que la intuición a duras penas puede captarla, y nos abandona totalmente en lo que respecta a la curva que se obtiene pasando al límite. Sólo el pensamiento, o el análisis lógico, pueden seguir la evolución de ese extraño objeto hasta su forma final. Así pues, si en este caso hubiéramos confiado en la intuición, hubiéramos caído en un error, pues parece ser que la intuición nos lleva forzosamente a concluir que no puede haber curvas que no tengan tangente en ningún punto. Este primer ejemplo del fracaso de la intuición tiene que ver con los conceptos fundamentales de la diferenciación».

Lo mejor que uno puede decir de estas palabras es que se detienen justo antes de llegar a una famosa proclama de Charles Hermite, en una carta de 20 de mayo de 1893 a T. Stieltjes, en la que declaraba que «abandonaba con espanto y horror esta lamentable plaga de funciones sin derivadas». (Hermite y Stieltjes, 1905, II, pág. 318.) A uno le gustaría creer que los grandes hombres son perfectos y que Hermite estaba ironizando, pero la *Notice* de Lebesgue de 1922 (Lebesgue, 1972, I) sugiere lo contrario. Lebesgue había escrito un artículo sobre superficies sin planos tangentes, «pañuelos totalmente arrugados», y quería que la Académie des Sciences se lo publicara, pero «Hermite se opuso implacablemente a su inclusión en los *Comptes Rendus*; esto ocurría hacia la época de la carta a Stieltjes...»

Recordemos que Perrin y Steinhaus pensaban de modo distinto, pero el único matemático que razonaba como ellos, basándose sólo en la intuición (Steinhaus razona basándose en la realidad) es Paul Lévy (Lévy, 1970): «Siempre [me ha] sorprendido oír que la intuición geométrica lleva inevitablemente a pensar que todas las funciones continuas son diferenciables. Desde mi primer encuentro con el concepto de derivada, la experiencia me ha demostrado que lo cierto es todo lo contrario».

Sin embargo, estas voces no se han hecho oír. Casi todos los libros, y también casi todos los museos de la ciencia, proclaman que las curvas no diferenciables son contrarias a la intuición, «monstruosas», «patológicas» y hasta «psicopáticas».

### *Domesticando la curva de Koch.*

*La dimensión  $D = \log 4 / \log 3 = 1,2618$*

Una curva de Koch es un modelo de costa tosco pero evocador. Como primer test cuantitativo, investiguemos la longitud  $L(\epsilon)$  del terágono triá-



dico de Koch de lado  $\epsilon$ . Dicha longitud se puede medir exactamente, obteniéndose un resultado extraordinariamente satisfactorio:

$$L(\epsilon) = \epsilon^{1-D}.$$

Esta fórmula *exacta* es idéntica a la ley *empírica* de Richardson para la costa de Bretaña. Para la curva triádica de Koch,

$$D = \log 4 / \log 3 \sim 1,2618,$$

¡con lo que  $D$  cae en el intervalo de valores encontrados por Richardson!

□ DEMOSTRACIÓN: Es obvio que  $L(1) = 1$  y que

$$L(\epsilon/3) = (4/3) L(\epsilon).$$

Esta ecuación tiene una solución de la forma  $L(\epsilon) = \epsilon^{1-D}$  si  $D$  satisface

$$3^{D-1} = 4/3.$$

Por lo tanto,  $D = \log 4 / \log 3$ , como pretendíamos. ■

Claro que la constante  $D$  de Koch no es empírica sino matemática. Y así las razones para decir que  $D$  es una dimensión son más convincentes en el caso de la curva de Koch que en el de las costas.

Además, la medida de Hausdorff aproximada de dimensión  $D$  (concepto que hemos introducido en el capítulo anterior) vale  $\epsilon^D$  multiplicado por el número de segmentos de longitud  $\epsilon$ , con lo que da  $\epsilon^D \epsilon^{-D} = 1$ . Esto es un buen indicio de que la dimensión de Hausdorff es  $D$ . Pero, por desgracia, la definición de Hausdorff es difícil de manejar rigurosamente. Es más, aun en el caso de que hubiera sido fácilmente manejable, la generalización del concepto de dimensión más allá de los números enteros es una idea tan trascendental que son de agradecer todas las motivaciones que nos lleven a ella.

### *La dimensión de semejanza*

En el caso de figuras autosemejantes, se tiene fácilmente una motivación adicional en el concepto de *dimensión de semejanza*. A menudo se oye decir que los matemáticos usan la dimensión de semejanza para estimar la dimensión de Hausdorff, y en el grueso de este ensayo sólo se dan casos en los que dicha estimación da el resultado correcto. En tales contextos no hay peligro en tomar como sinónimos la dimensión de seme-

janza y la dimensión fractal. □ Tenemos en ello una contrapartida al uso sinónimo de dimensión topológica y dimensión «intuitiva». ■

A modo de prelude motivador examinemos las figuras autosemejantes estándar: los segmentos de recta, los rectángulos en el plano, etc.; véase la lámina 72. Como la dimensión euclídea de la recta es 1, tenemos que para cada «base» entera  $b$ , el intervalo  $0 \leq x < X$  se puede «enlosar» (de modo que cada punto sólo sea recubierto una vez) con  $N=b$  «partes». Estas son los intervalos  $(k-1) X/b \leq x < kX/b$ , yendo  $k$  de 1 a  $b$ . Cada parte se obtiene a partir del todo con una razón de semejanza  $r(N) = 1/b = 1/N$ .

Análogamente, como la dimensión euclídea del plano es 2, tenemos que, dado cualquier  $b$ , el «todo» constituido por un rectángulo  $0 \leq x < X$ ,  $0 \leq y < Y$  puede ser «enlosado» con exactamente  $N=b^2$  partes. Estas son los rectángulos definidos por las desigualdades  $(k-1) X/b \leq x < kX/b$  y  $(h-1) Y/b \leq y < hY/b$ , donde  $k$  y  $h$  van de 1 a  $b$ . Ahora cada parte guarda con el todo una relación de semejanza de razón  $r(N) = 1/b = 1/N^{1/2}$ .

Para un paralelepípedo rectángulo, el mismo argumento nos da  $r(N) = 1/N^{1/3}$ .

Y no hay ningún problema en definir espacios de dimensión euclídea  $E > 3$ . (La dimensión euclídea —o cartesiana— la denotamos por  $E$ .) Todos los paralelepípedos  $D$ -dimensionales definidos para  $D \leq E$  satisfacen

$$r(N) = 1/N^{1/D}.$$

Por tanto,

$$Nr^D = 1.$$

Otras expresiones equivalentes son

$$\begin{aligned} \log r(N) &= \log (1/N^{1/D}) = -(\log N)/D, \\ D &= -\log N / \log r(N) = \log N / \log(1/r). \end{aligned}$$

Pasemos ahora a examinar figuras no estándar. Para que el exponente de autosemejanza tenga significado formal, sólo se tiene que cumplir que la figura sea autosemejante, esto es, que se pueda descomponer en  $N$  partes relacionadas con el todo por una transformación de semejanza de razón  $r$  (seguida quizá de un desplazamiento y una simetría). La  $D$  así obtenida cumple siempre

$$0 \leq D \leq E.$$

En el ejemplo de la curva triádica de Koch,  $N=4$  y  $r=1/3$ , con lo que  $D=\log 4/\log 3$ , que coincide con la dimensión de Hausdorff.

### *Curvas, dimensión topológica*

Hasta ahora hemos dicho, sin preocuparnos demasiado por ello, que la  $K$  de Koch era una curva. Ahora debemos volver sobre este concepto. Intuitivamente, un arco es un conjunto conexo que se convierte en inconexo si se le quita cualquier punto. Y una curva cerrada es un conjunto conexo que se convierte en dos arcos cuando le quitamos dos puntos cualesquiera. Por esto mismo, la  $K$  de Koch es una curva.

El matemático dice que todas las figuras con una de estas propiedades, por ejemplo  $K$ ,  $[0,1]$  o un círculo, tienen dimensión topológica  $D_T=1$ . ¡He aquí, pues, otra clase de dimensión a tener en cuenta! Como discípulos de Guillermo de Ockham, todos los científicos saben que «no hay que multiplicar los entes sin necesidad». Hay que confesar, por lo tanto, que nuestro continuo ir y venir entre las distintas y casi equivalentes formas de dimensión fractal es cuestión de conveniencia. Sin embargo, la coexistencia de una dimensión fractal y otra topológica *es una cuestión de necesidad*. Aconsejo a los lectores que se saltaron la definición de fractal del capítulo 3 que la lean ahora con atención, y a todos que lean la entrada del capítulo 41 dedicada a la «dimensión».

### *Significado intuitivo de $D$ en presencia de los cortes $\Lambda$ y $\lambda$*

Cesàro (1905) empieza con el lema:

La voluntad es infinita  
y la ejecución confinada,  
el deseo es ilimitado  
y el acto un esclavo de la limitación.

Y así es en efecto: las limitaciones actúan sobre los científicos tanto como sobre el Troilus y la Cressida de Shakespeare. Para llegar a la curva de Koch, la cascada de promontorios cada vez más pequeños se extrapola hasta el infinito, pero en la naturaleza las cascadas o se detienen o cambian de carácter. Aunque puede ser que haya un sinfín de promontorios, la idea de que sean autosemejantes sólo puede ser válida entre ciertos límites. Por debajo del límite inferior, el concepto de costa deja de pertenecer a la geografía.

Es pues razonable considerar que una costa real conlleva dos *escalas de corte*. El *corte superior*  $\Omega$  podría ser el diámetro del menor círculo que contuviera una isla, o un continente quizá, y el *corte inferior*  $\varepsilon$  podría ser los 20 metros que decíamos en el capítulo 5. Aunque resulta difícil precisar valores numéricos concretos, la necesidad de los cortes está fuera de toda duda.

Sin embargo, una vez se prescinde de los detalles demasiado grandes y demasiado pequeños,  $D$  sigue teniendo el valor de una *dimensión efectiva* en el sentido que mencionábamos en el capítulo 3. En términos estrictos, el triángulo, la estrella de David y los terágonos infinitos de Koch tienen dimensión 1. Pero, tanto intuitivamente como por razones pragmáticas de simplicidad y naturalidad de los términos correctivos necesarios, es razonable considerar que un terágono de Koch avanzado está más cerca de una curva de dimensión  $\log 4 / \log 3$  que de una curva de dimensión 1.

En lo que respecta a una costa, no es improbable que tenga varias dimensiones distintas (recuérdense las bolas de hilo del capítulo 3). La dimensión geográfica es la  $D$  de Richardson, pero en la gama de magnitudes que interesan a la física podría tener otra dimensión distinta (asociada al concepto de interfase entre aire, agua y arena).

### *Generadores de Koch alternativos y curvas de Koch que se evitan a sí mismas*

Volvamos ahora a los principios básicos de la construcción de la curva triádica de Koch. Se empieza con *dos figuras*, un *iniciador* y un *generador*. Este último es una línea quebrada orientada formada por  $N$  lados iguales de longitud  $r$ . Cada paso de la construcción empieza con una línea quebrada y consiste en sustituir cada segmento rectilíneo por una copia del generador, reducida y desplazada de modo que sus extremos coincidan con los de dicho segmento. En todos los casos se tiene  $D = \log N / \log(1/r)$ .

Se puede cambiar fácilmente esta construcción modificando convenientemente el generador; combinando promontorios y bahías, por ejemplo, como se muestra en las láminas que siguen. De este modo se obtienen terágonos de Koch que convergen a curvas de dimensión comprendida entre 1 y 2.

Todas estas curvas de Koch se «autoevitan», no se cortan a sí mismas. Esto permite que las figuras totales se puedan dividir sin ambigüedad en partes disjuntas, y esta propiedad influye en la definición de  $D$ . Sin embargo, una construcción de Koch a partir de un generador que no haya sido elegido cuidadosamente corre el riesgo de conducir a una curva con

puntos de contacto que se corte a sí misma, o incluso que se autosolape. Si la  $D$  deseada es pequeña, es fácil evitar los puntos dobles eligiendo cuidadosamente el generador. Aunque esta tarea resulta cada vez más difícil a medida que  $D$  aumenta, es posible siempre que  $D < 2$ .

Sin embargo, cualquier construcción de Koch que pretenda llegar a una dimensión  $D > 2$  acaba inevitablemente en curvas que recubren el plano *una infinidad* de veces. El caso  $D = 2$  merece discusión aparte y lo trataremos en el capítulo 7.

### *Arcos y semilíneas de Koch*

En algunos casos conviene sustituir la expresión *curva de Koch* por otra terminología más precisa y pedante. La figura inferior de la lámina 72 es, en términos técnicos, *la imagen de Koch* de un intervalo lineal, y se le puede llamar *arco de Koch*. De este modo, el contorno de la lámina 73 está formado por tres arcos de Koch. A menudo resulta útil extrapolar un arco dando lugar a una *semilínea de Koch*: dicha extrapolación consiste en aumentar el arco original tomando como foco el extremo izquierdo y como razón de semejanza, primero  $1/r = 3$ , después  $3^2$ , etc.. Cada paso sucesivo de la extrapolación contiene el anterior, y la curva límite contiene todos los estadios intermedios finitos.

### *Relación entre la medida y el radio cuando D es fraccionario*

Generalizaremos ahora para las dimensiones fractales un resultado común en el caso de dimensiones euclídeas. En el caso de objetos físicos ideales de densidad uniforme  $\rho$ , el peso  $M(R)$  de una barra de longitud  $2R$ , un disco de longitud  $R$  o una bola de radio  $R$  es proporcional a  $\rho R^E$ . Para  $E = 1, 2$  y  $3$ , las constantes de proporcionalidad respectiva son  $2, 2\pi$  y  $4\pi/3$ .

*La relación  $M(R) \propto R^D$  también es válida para los fractales autosemejantes.*

En el caso triádico de Koch, la demostración es muy simple cuando se toma como origen el extremo de una semilínea. Si un círculo de radio  $R_0 = 3^{-k}$  (con  $k \geq 0$ ) contiene una masa  $M(R_0)$ , el círculo de radio  $R = R_0/3$  contiene una masa  $M(R) = M(R_0)/4$ . Tenemos, por lo tanto, que

$$M(R) = M(R_0)(R/R_0)^D = [M(R_0)R_0^{-D}]R^D.$$

En consecuencia, el cociente  $M(R)/R^D$  es independiente de  $R$ , y puede emplearse para definir una «densidad»  $\rho$ .

## *Movimiento de Koch*

Imaginemos un punto recorriendo una semilínea de Koch que emplee tiempos iguales en recorrer arcos de la misma medida. Si invertimos la función que da el tiempo en función de la posición, obtenemos la posición en función del tiempo, es decir, una ley de movimiento. Con velocidad infinita, por supuesto.

## *Anticipo sobre las costas aleatorias*

La curva de Koch nos recuerda los mapas reales, pero presenta defectos importantes que uno encuentra casi invariablemente en todos los modelos primarios de los ejemplos de este ensayo. Sus partes son idénticas entre sí y la razón de autosemejanza  $r$  pertenece a un espectro muy estricto de valores de la forma  $b^{-a}$ , siendo  $b$  un entero, a saber,  $1/3$ ,  $(1/3)^2$ , etc. Así, una curva de Koch sólo es un modelo muy primitivo de costa.

He ideado diversas maneras de evitar ambos defectos, aunque todas ellas conllevan complicaciones probabilísticas que es mejor dejar para cuando se hayan asentado muchas otras ideas relacionadas con los fractales no aleatorios. No obstante, los lectores curiosos que dominen las probabilidades pueden echar una mirada rápida a los modelos basados en mis «curvas garabato» (capítulo 24) y, más importante aún, a las curvas de nivel de las superficies brownianas fraccionarias (capítulo 28).

En toda esta parte del libro se sigue el mismo método de exposición. Se comentan numerosas estructuras de la naturaleza contrastándolas con fractales regulares, que sirven de modelo preliminar, mientras que los modelos aleatorios que preconizo se dejan para capítulos posteriores.

RECORDATORIO. En todos los casos en que  $D$  se conoce con exactitud no es un entero y se da en forma decimal para facilitar las comparaciones, precisando hasta la *cuarta* cifra decimal. Este número de decimales se ha elegido para dejar bien patente que  $D$  no es *ni* un valor empírico (en la actualidad los datos empíricos se conocen con 2 cifras decimales como máximo) *ni* un valor geométrico incompletamente determinado (actualmente éstos se conocen bien sea con 1 o 2 decimales, o con 6 decimales o más.)

## *¿Complejo, o simple y regular?*

Las curvas de Koch presentan una nueva e interesante combinación de complejidad y simplicidad. A primera vista son muchísimo más comple-

jas que las curvas euclídeas comunes. Sin embargo, la teoría de los algoritmos matemáticos de Kolmogorov y Chaitin sugiere lo contrario, que una curva de Koch *no* es significativamente más complicada que un círculo. Esta teoría parte de una colección de «letras» u «operaciones atómicas» y considera que la longitud del algoritmo más corto conocido para reproducir la función deseada es una cota superior objetiva que permite evaluar la complejidad de dicha función.

Aplicando estas ideas a las curvas, tomemos los «trazos» rectilíneos como letras o átomos del proceso gráfico. En este alfabeto, para dibujar un polígono regular hacen falta un número finito de trazos, y cada uno de estos es descrito por un número finito de líneas de instrucción. Se trata por tanto de una tarea de complejidad finita. Por el contrario, un círculo precisa de «una infinidad de trazos infinitamente cortos», con lo que aparentemente es una curva de complejidad infinita. Sin embargo, una construcción recurrente del círculo sólo precisa de un número finito de instrucciones y es, por tanto, una tarea de complejidad finita. Cada paso parte, por ejemplo, de un polígono de  $2^m$  lados ( $m > 2$ ), y consiste en sustituir cada trazo de longitud  $2\text{sen}(\pi / 2^m)$  por dos trazos de longitud  $2\text{sen}(\pi / 2^{m+1})$ . En la construcción de una curva de Koch se sigue el mismo procedimiento, aunque las operaciones son más simples, pues la longitud de cada trazo simplemente se multiplica por  $r$ , y las posiciones relativas de los trazos sustituidos son siempre las mismas. De ahí que sea sorprendentemente cierto que, si se mide la complejidad por la longitud del mejor algoritmo actual expresado en este alfabeto particular, *una curva de Koch es efectivamente más simple que un círculo*.

No hay que tomar demasiado en serio esta clasificación peculiar de las curvas en razón de su simplicidad relativa. Nótese que si el alfabeto se basara en la regla y el compás, el círculo adquiriría la condición de «atómico» y se llegaría a la conclusión opuesta a la subrayada más arriba. Sin embargo, siempre que se use un alfabeto razonable, las curvas de Koch, aparte de tener una complejidad finita, son más simples que muchas curvas euclídeas.

Siendo como soy un aficionado a las cuestiones etimológicas, no puedo dejar esta discusión sin manifestar que me molesta sobremedida llamar «irregulares» a las curvas de Koch. Este término está relacionado con *regla*, y es satisfactorio mientras uno no se salga de la siguiente acepción de *regla*: instrumento que sirve para trazar líneas rectas; pues las curvas de Koch no son rectas, ni mucho menos. Pero si uno piensa en la acepción *ordenanza*, esto es, un conjunto de leyes detalladas que hay que seguir sin rechistar, declaro silenciosamente que nada hay más «regular» que una curva de Koch.

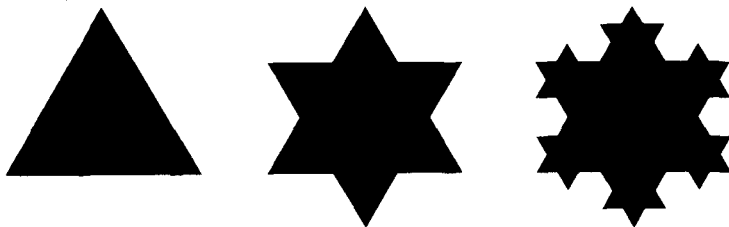


FIG. 70. *Isla triádica de Koch o copo de nieve K.*  
*Construcción original de Helge von Koch*  
*(dimensión de la costa  $D = \log 4 / \log 3 \sim 1,2618$ )*

La construcción empieza por un «iniciador», a saber, una  $\Delta$  (triángulo equilátero) en negro de lado unidad. A continuación, sobre el tercio central de cada lado, se adosa una península en forma de  $\Delta$  con lados de longitud  $1/3$ . Este segundo paso acaba en una estrella de seis puntas o de David. Se repite luego el mismo proceso de adición de penínsulas sobre los lados de la estrella, y así sucesiva e indefinidamente.

Cada adición desplaza los puntos del tercio central de cada intervalo perpendicularmente al mismo. Los vértices del iniciador triangular no se mueven de su sitio. Los otros 9 vértices de la estrella de David alcanzan sus posiciones definitivas al cabo de un número finito de pasos. Hay también puntos que no dejan de desplazarse, pero la amplitud de sus movimientos es decreciente y a la larga tienden a unas posiciones límite que definen la costa.

La propia isla es el límite de una sucesión de dominios acotados por polígonos, de modo que cada uno de ellos contiene el dominio acotado por el polígono anterior en la sucesión. La lámina 73 presenta un negativo de la fotografía de dicho límite.

Nótese que esta lámina, así como muchas otras de este libro, representa islas y lagos en vez de costas y que, generalmente, se representan «áreas rellenas» y no sus contornos. Este método aprovecha al máximo las posibilidades de la alta resolución de nuestro sistema de gráficos.

**POR QUÉ NO SE PUEDE DEFINIR AQUÍ UNA TANGENTE.** Tómese como punto fijo uno de los vértices del  $\Delta$  original y dibújese una cuerda que una dicho vértice con un punto de la costa límite. Si hacemos converger este punto hacia el vértice, manteniéndonos siempre a la izquierda del mismo, la cuerda oscila dentro de un ángulo de  $30^\circ$  y no da muestras de tender a un límite que se pueda llamar tangente por la izquierda. Tampoco se puede definir una tangente por la derecha. Los puntos en los que no hay tangente porque las cuerdas de la derecha y las de la izquierda oscilan dentro de ángulos bien definidos se llaman *hiperbólicos*. Los puntos de  $K$  que se alcanzan asintóticamente tampoco tienen tangente, aunque por otras razones.



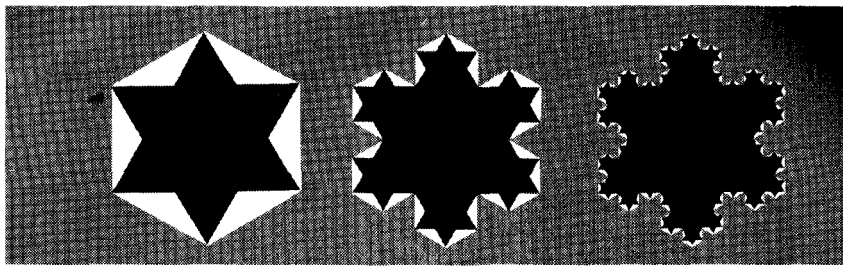


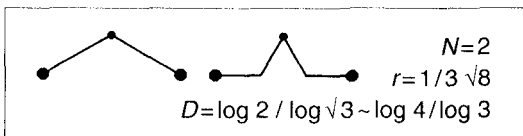
FIG. 71. *Isla triádica de Koch o copo de nieve K.*  
*Construcción alternativa de Ernesto Cesàro*  
*(dimensión de la costa  $D = \log 4 / \log 3 \sim 1,2618$ )*

En Cesàro (1905) se da una construcción alternativa de la isla de Koch. Se trata de un trabajo tan maravilloso que me hace olvidar lo que me costó encontrar el original (y la rabia que me dio encontrarlo después reimpresso en Cesàro, 1964). He aquí una traducción libre de unas cuantas líneas extáticas: «La inagotable inmersión de esta figura en sí misma nos da una idea de lo que Tennyson describe en alguna parte como el infinito *interno*, que es, al fin y al cabo, el único que podemos concebir en la naturaleza. Esta semejanza entre el todo y sus partes, aun las infinitesimales, nos hace considerar la curva triádica de Koch como algo realmente maravilloso. Si tuviera vida, sería imposible exterminarla sin destruirla completamente, pues renacería y volvería a renacer desde las profundidades de sus triángulos, igual que la vida en el universo».

El iniciador de Cesàro es un hexágono regular de lado  $3/3$ . El océano circundante está en gris. Incesantemente van surgiendo bahías en forma de  $\Delta$ , obteniéndose la isla de Koch como límite de estas aproximaciones *decrecientes*.

En esta lámina se han presentado en paralelo ambos métodos de construcción, de modo que la costa de Koch queda comprendida entre dos terágonos, uno interno y otro externo, que se van aproximando cada vez más. Se podría pensar en un proceso en cascada que empieza con tres cercos sucesivos: la tierra firme (en negro), la marisma (en blanco) y el agua (en gris). En cada estadio de la cascada, pedazos de marisma son transferidos tanto a la tierra firme como al agua. En el límite, la marisma se agota, pasando de «superficie» a curva.

INTERPRETACIÓN POR EL MÉTODO DEL DESPLAZAMIENTO DEL PUNTO MEDIO. En este método el generador y el segundo paso son los siguientes (el ángulo es de  $120^\circ$ )



Si se aplica al exterior del  $k$ -ésimo terágono interno, se obtiene el  $k$ -ésimo terágono externo, y si se aplica al  $k$ -ésimo terágono externo resulta el  $(k+1)$ -ésimo terágono interno. Esta regla de construcción es la aplicada en las láminas 96 y 97, y en el capítulo 25..

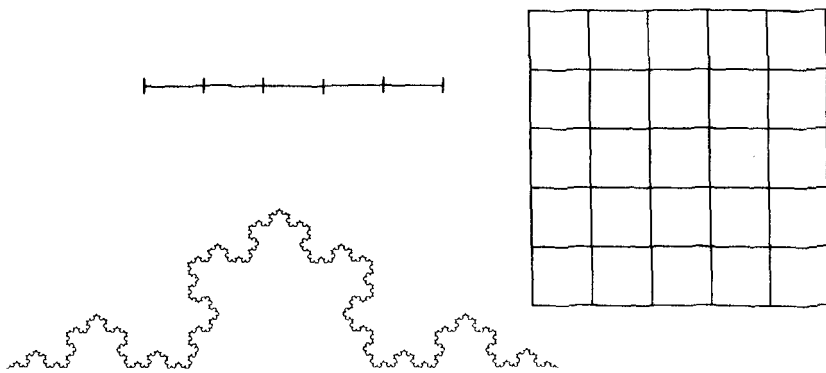


FIG. 72 *Dos tipos de autosemejanza: la estándar y la fractal*

Las figuras superiores nos recuerdan cómo, dado un número entero ( $b=5$ , en este caso), se puede dividir un segmento de longitud unidad en  $N=b$  subintervalos de longitud  $r=1/b$ . Análogamente, un cuadrado unidad se puede dividir en  $N=b^2$  cuadrados de lado  $r=1/b$ . En ambos casos,  $\log N/\log(1/r)$  es la dimensión de semejanza de la forma considerada (este es un concepto al que la geometría escolar no da gran importancia, pues su valor se reduce al de la dimensión euclídea).

La figura inferior es una curva triádica de Koch, la tercera parte de una costa de Koch. Se la puede descomponer también en partes de tamaño reducido, con  $N=4$  y  $r=1/3$ . La dimensión de semejanza resultante  $D=\log N/\log(1/r)$  tiene un valor no entero (vale aproximadamente 1,2618), y no tiene contrapartida en la geometría estándar.

Hausdorff demostró que esta  $D$  tiene aplicación matemática, y que es idéntica a la dimensión fractal o de Hausdorff. Yo sostengo que  $D$  también es de vital importancia en las ciencias de la naturaleza.

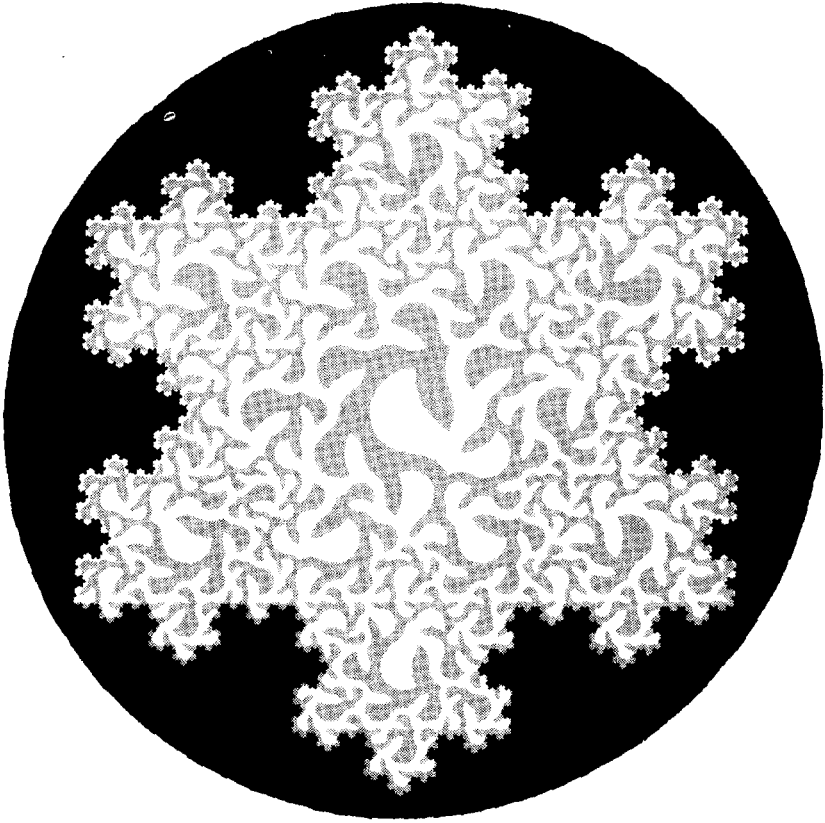
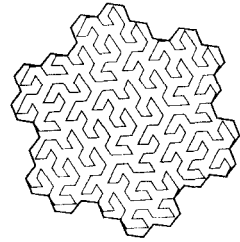
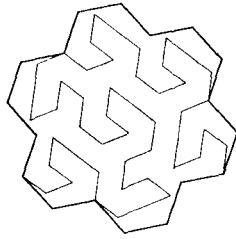
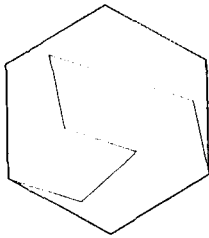


FIG. 73. *Lago triádico de Koch*  
(dimensión de la costa  $D = \log 4 / \log 3 \sim 1,2618$ )

Aquí se representa un negativo fotográfico de la construcción presentada en las láminas 70 y 71, iterada muchas veces, con lo que se obtiene un lago en vez de una isla.

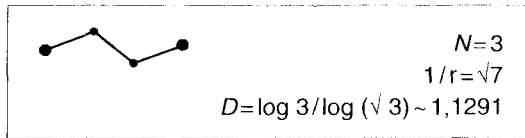
La forma peculiar de las «ondas» grises que llenan el lago no es accidental, y se explica en las láminas 102 y 103.

La costa de esta lámina no es autosemejante, puesto que una curva cerrada no se puede descomponer en reunión de otras curvas cerradas. □ No obstante, en el capítulo 13 se aplica el concepto de autosemejanza a una colección infinita de islas. ■



FIGS. 74 y 75. *Isla y lago de Koch alternativos*  
(dimensión de la costa  $D = \log 9 / \log 7 \sim 1,1291$ )

Esta variante de la isla de Koch se debe a W. Gosper (Gardner 1976): el iniciador es un hexágono regular y el generador es



LAMINA 74. En esta lámina se representan diversos estadios de la construcción de la «isla de Gosper» mediante una línea «envolvente» gruesa. La línea fina correspondiente al «relleno» se explicará en la lámina 104.

LAMINA 75. Representa un estadio avanzado de la construcción de la «envolvente». El «relleno» de grosor variable se explicará también en la lámina 104.

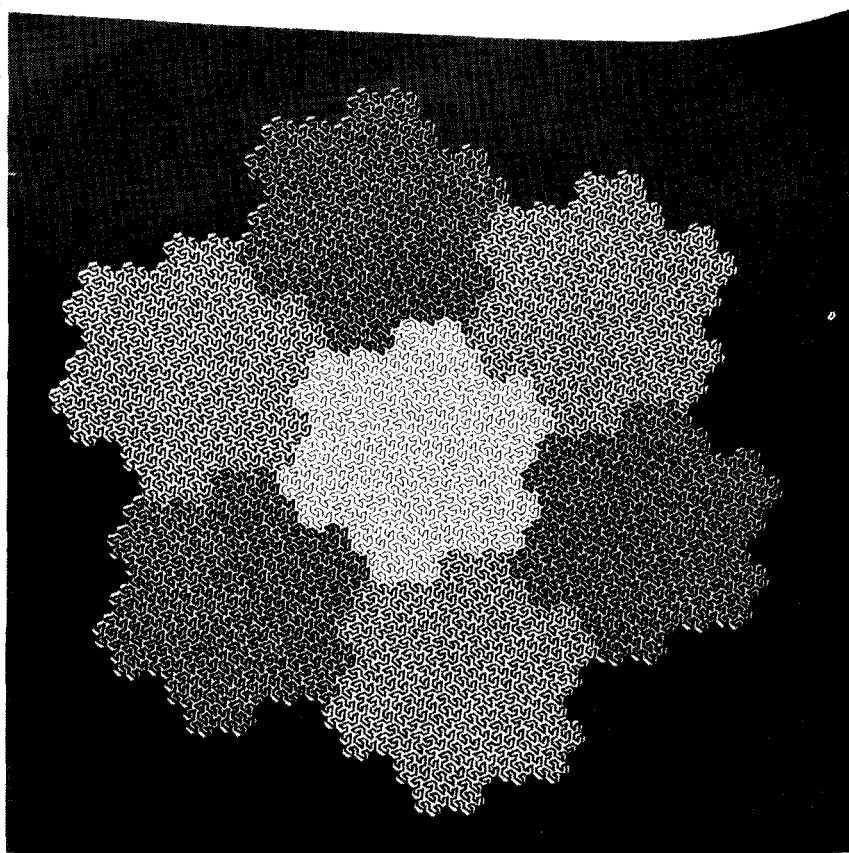
Nótese como, en contra de lo que sucede con el original de Koch, este generador es simétrico respecto a su punto medio. Combina penínsulas y bahías, de modo que el área de la isla permanece constante durante toda la construcción. Lo mismo vale para todas las curvas de Koch desde aquí hasta la lámina 86.

EMBALDOSADO. Se puede recubrir el plano mediante islas de Gosper. Esta propiedad se denomina *embaldosado*.

PEREMBALDOSADO. Esta isla es además autosemejante, como pone de manifiesto el sombreado de espesor variable. Así pues, cada isla se divide en siete «regiones» relacionadas con el todo por una semejanza de razón  $r = 1/\sqrt{7}$ . Denotaré esta propiedad con el neologismo *perembaldosado*, acuñado a partir del prefijo latino *per-*, con una acepción como la que tiene en «perfumar»=«penetrar completamente con vapores».

En general, los embaldosados *no se pueden* descomponer en otros embaldosados iguales semejantes al conjunto. Por ejemplo, suele resultar bastante irritante que no se pueda construir un hexágono mayor yuxtaponiendo varios hexágonos. El copo de Gosper deforma el hexágono justo lo suficiente para que se lo pueda subdividir exactamente en 7 partes. Otros embaldosados fractales permiten subdivisiones en distinto número de partes.

FRANCIA. Un perfil geográfico inusualmente regular y que se describe a menudo como el Hexágono, a saber el perfil de Francia, se parece menos a un



hexágono que a la figura de la lámina 75 (a pesar de que aquí Bretaña salga un tanto desnuda.)

□ RAZÓN POR LA QUE NO SE PUEDEN TRAZAR TANGENTES EN NINGÚN PUNTO DE ESTAS COSTAS. Fijese un punto cualquiera alcanzado por la costa después de un número finito de iteraciones y únase con una cuerda dicho punto a otro punto móvil de la costa límite. Cuando se hace tender el punto móvil hacia el fijo a lo largo de la costa límite, ya sea en el sentido de las agujas del reloj o en el contrario, la dirección de la cuerda oscila indefinidamente alrededor del punto fijo. Un punto tal se llama *loxodrómico*. ■

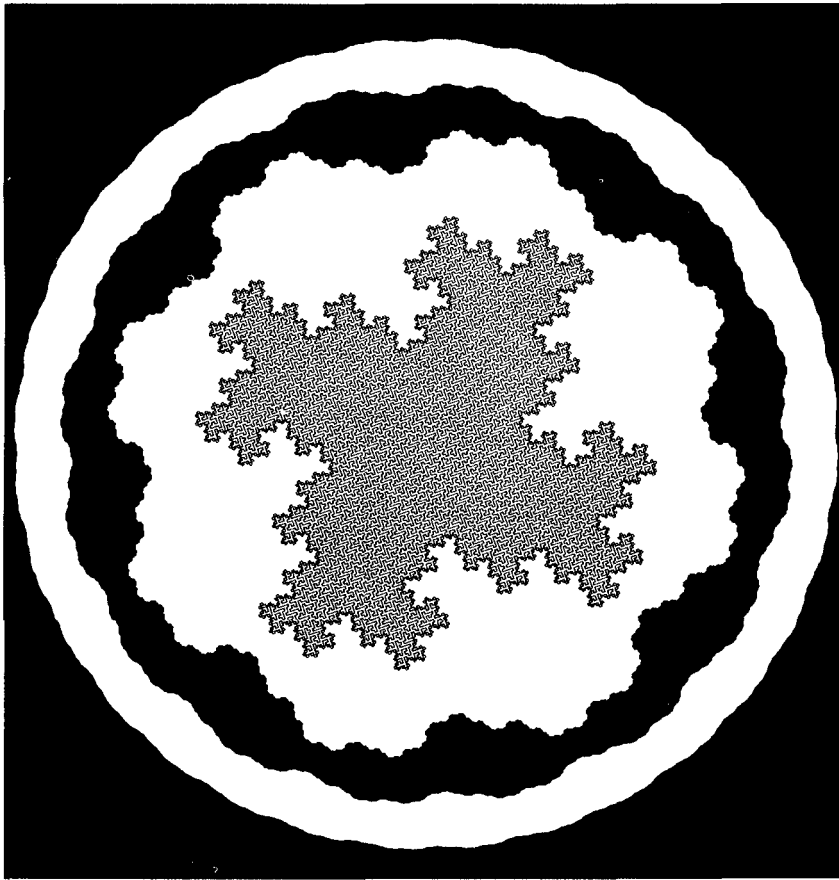
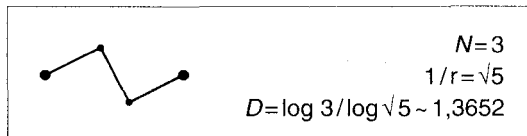


FIG. 76 *Isla y lago de Koch alternativos*  
 (dimensiones de la costa entre 1 y  $D = \log 3/5 \sim 1,3652$ )

En esta sucesión de curvas fractales el iniciador es un polígono regular de  $M$  lados, y el generador es tal que  $N=3$  y el ángulo formado por cada dos lados sucesivos es  $\theta = 2\pi/M$ . En las láminas 74 y 75 consideré el caso concreto  $M=6$  (que no se repite aquí), y el valor  $M=3$  se discute en la lámina 107. Esta lámina presenta terágonos avanzados para los valores  $M=4, 8, 16, 32$ , en forma de sucesión encajada de lagos e islas. Por ejemplo,  $M=4$  corresponde al generador



El sombreado de la isla central ( $M=4$ ) se explica en las láminas 107 y 108.

Si se prolongaran estas figuras hasta  $M=\infty$ , tenderían a la forma circular. Si nos movemos hacia el interior, las figuras se van «arrugando», y este fenómeno se hace más pronunciado cuanto más nos acercamos al centro. El siguiente grado de arrugado nos llevaría a  $M=3$ , pero la curva correspondiente ya no evitaría cortarse a sí misma. Nos la volveremos a encontrar en las láminas 107 y 108.

UNA DIMENSIÓN CRÍTICA. Cuando el iniciador es  $[0,1]$ , el ángulo  $\theta$  puede tomar cualquier valor entre  $60^\circ$  y  $180^\circ$ . Hay un valor crítico  $\theta_{crít}$  para el cual la «costa» no presenta autointersecciones si, y sólo si,  $\theta > \theta_{crít}$ . La  $D_{crít}$  correspondiente es una *dimensión crítica* para la autointersección. El valor de  $\theta_{crít}$  es próximo a los  $60^\circ$ .

GENERALIZACIÓN. Las construcciones de las láminas 74 a 86 se generalizan fácilmente del modo siguiente. Llamemos directos ( $D$ ) a los generadores que se han mostrado, y definamos como inversos ( $I$ ) las imágenes especulares de los anteriores con respecto a la recta  $y=0$ . Cada paso de la construcción debe emplear siempre el mismo generador, ya sea  $D$  o  $I$ , pero en estadios distintos se pueden seleccionar generadores distintos. Estas láminas y muchas de las que siguen usan sólo generadores  $D$ , pero otras sucesiones infinitas de  $D$  e  $I$  dan variantes inmediatas.

¶ Si se alternan  $D$  e  $I$ , los puntos que eran loxodrómicos se convierten en hiperbólicos, como en la curva de Koch. ■

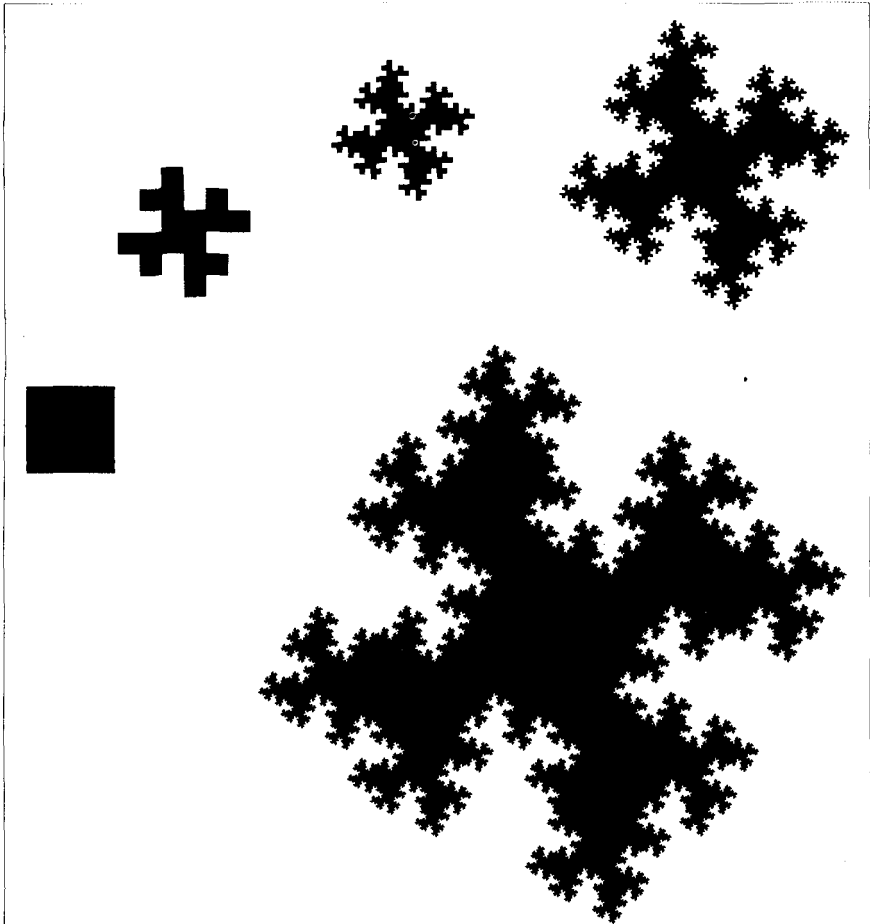
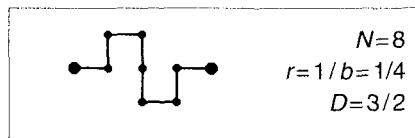


FIG. 78 Una isla de Koch cuadrangular  
(dimensión de la costa  $D = 3/2 = 1,5000$ )

Las láminas comprendidas entre la 76 y la 83 muestran varias construcciones de Koch iniciadas a partir de un cuadrado (de ahí el término *cuadrangular*). Una ventaja es que se puede experimentar con estas construcciones usando sistemas gráficos poco sofisticados. ¶ Otra ventaja reside en que las curvas fractales cuadrangulares nos llevan directamente a la curva original de Peano, descrita en la lámina 93. ▀

LÁMINA 78. El iniciador es un cuadrado y el generador es





Como en las láminas 74 a 76, el área total de la isla permanece constante durante toda la iteración. La lámina 78 muestra dos estadios a una escala pequeña, y el siguiente a una escala mayor.

En el último estadio, más aumentado aún, se observan como unas barbas muy finas y apenas visibles, pero buena parte de este detalle no sería perceptible con un sistema gráfico de calidad inferior.

Ni los terágonos ni la curva límite se solapan, se cortan o tienen puntos de autocontacto. Lo mismo se cumple hasta la lámina 83.

¶ No hay que olvidar que lo que es fractal en las láminas que van de la 78 a la 83 es la costa; la tierra firme y el mar son formas convencionales de área positiva y finita. En la lámina 206 se presenta un caso en que sólo el «mar» tiene un área bien definida, y está constituido por la reunión de tremas de forma simple, mientras la tierra firme no tiene ningún punto interior. ■

EMBALDOSADO Y PEREMBALDOSADO. Esta isla se puede descomponer en 16 islas semejantes al total con una razón  $r=1/4$ . Cada una de éstas es la isla de Koch que se obtendría a partir de cualquiera de los 16 cuadrados que forman el primer estadio de la construcción.

¶ Los capítulos 25 y 29 muestran que  $D=3/2$  es también la dimensión de varias funciones brownianas. Así pues, este valor se obtiene fácilmente con curvas y superficies aleatorias. ■

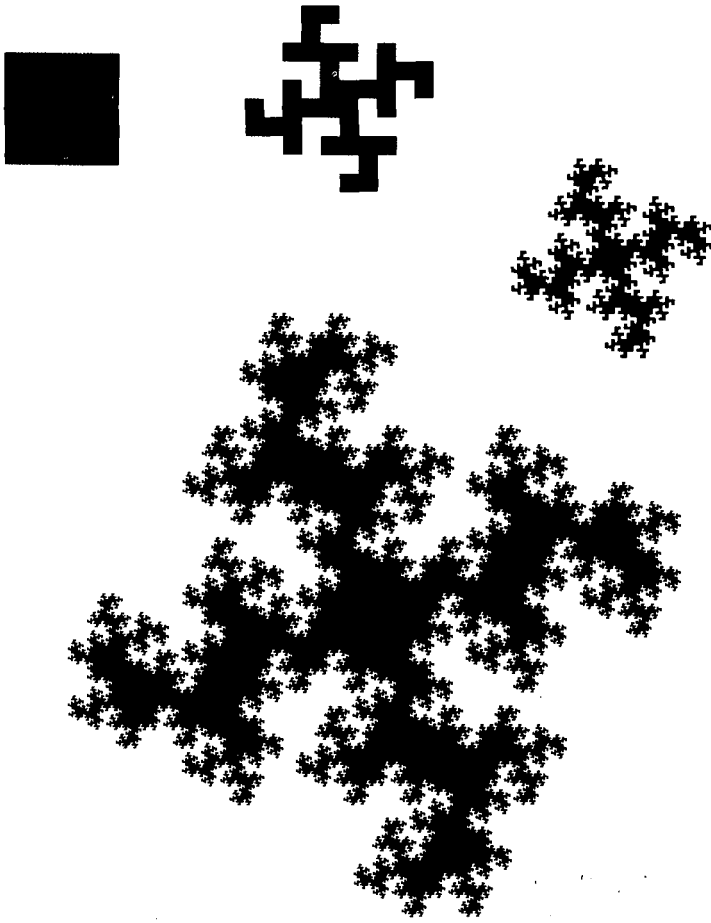
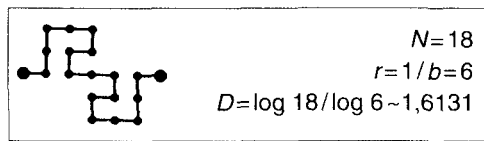


FIG. 80. *Una isla de Koch cuadrangular*  
 (dimensión de la costa  $D = \log 18 / \log 6 \sim 1,6131$ )

El iniciador vuelve a ser un cuadrado y el generador es



Un hecho notable es que la forma de las islas de Koch cuadrangulares de esta colección de ilustraciones depende en gran medida de  $D$ . Sin embargo, el que tenga más o menos el mismo perfil global se debe a que el iniciador es un cuadrado. Si el iniciador es un polígono regular de  $M$  lados ( $M > 4$ ) la forma global parece menos rugosa, y lo parece cada vez menos a medida que  $M$  aumenta. Una verdadera relación entre la forma global y el valor de  $D$  no aparecerá hasta el capítulo 28, donde trataremos de las costas aleatorias, en las que generador e iniciador efectivamente se determinan a la vez.

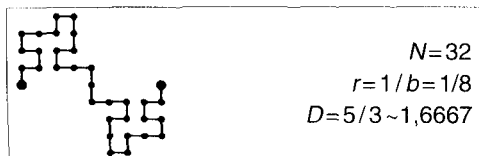
□ MAXIMALIDAD. Otro hecho que contribuye a la semejanza del perfil global es que las curvas de Koch cuadrangulares de las láminas 76 a 83 presentan una interesante propiedad de maximalidad. Considérense todos los generadores de Koch que dan lugar a curvas que no se cortan a sí mismas y que se pueden trazar sobre una cuadrícula formada por rectas paralelas o perpendiculares a  $[0, 1]$ , y que, además, se aplican a un iniciador que sea parte de esta cuadrícula. Llamaremos *maximales* a aquellos generadores que den un valor máximo de  $N$ , y también por tanto de  $D$ . Se tiene que, cuando  $b$  es par,  $N_{\max} = b/2$ , y cuando  $b$  es impar,  $N_{\max} = (b+1)/2$ .

|| Cuando el valor de  $b$  aumenta, también aumenta el valor del  $N$  maximal, y también el número de los diversos polígonos maximales. Por tanto, la curva de Koch límite depende cada vez más del generador original. También parece cada vez más artificial, por cuanto el deseo de conseguir una dimensión máxima sin puntos de contacto impone un grado de disciplina que aumenta con  $D$ . Este llega al paroxismo en el capítulo siguiente, con el límite de Peano  $D=2$ .

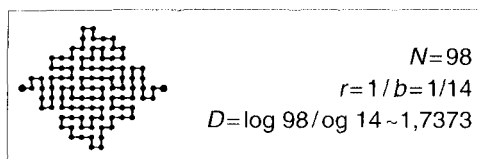
□ LAGUNARIDAD. Las curvas fractales con la misma  $D$  pero con  $N$  y  $r$  distintas pueden presentar diferencias cualitativas. En el capítulo 34 se discute el parámetro adicional necesario, además de  $D$ , para describir tales diferencias. ■

Fig. 82 y 83. *Islas de Koch cuadrangulares*  
 (dimensiones de la costa  $D = 5/3 \sim 1,6667$  y  $D = \log 98 / \log 14 \sim 1,7373$ )

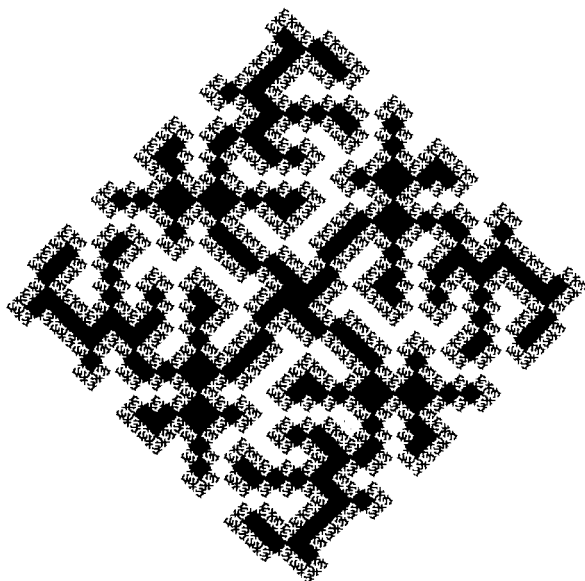
Aquí se presenta la misma construcción con los siguientes generadores. En la lámina 83,

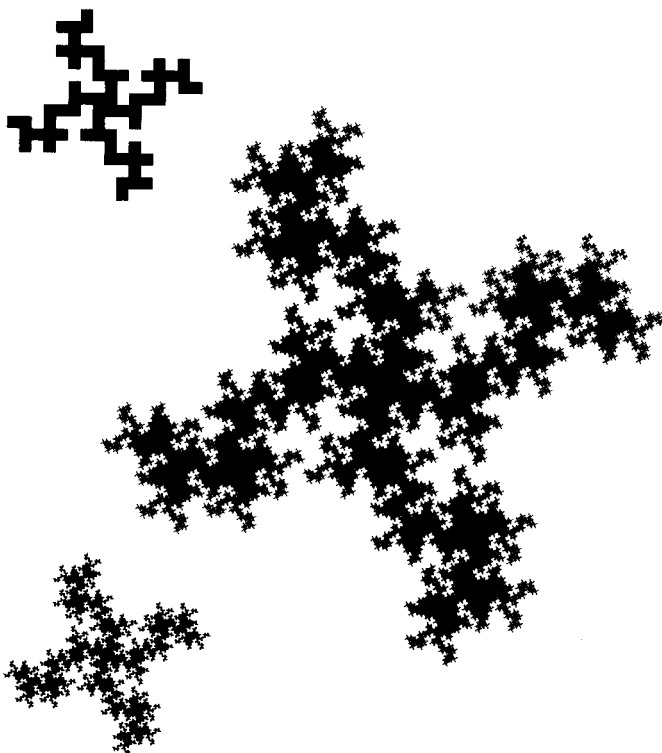


y en la lámina 82,



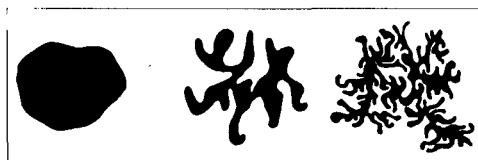
Los arrecifes y los canales de estas marinas de pesadilla se hacen cada vez más estrechos a medida que uno avanza hacia los extremos de las penínsulas o hacia el fondo de los golfos. La anchura de dichos accidentes tiende también a disminuir al aumentar la dimensión fractal, y los «talles de avispa» aparecen hacia  $D = 5/3$ .





□ DIGRESIÓN SOBRE LA DISPERSIÓN TURBULENTA. Encuentro un parecido extraordinario entre la sucesión de fractales aproximadas de la lámina 83 y los estadios sucesivos de la dispersión turbulenta de la tinta en agua. La dispersión real es menos sistemática, por supuesto, pero esto se puede conseguir invocando el azar.

□ Casi se puede ver una cascada de Richardson en funcionamiento. Una pizca de energía difunde una gota cuadrada de tinta. Luego el remolino inicial se rompe en remolinos de una escala menor, que tienen efectos más locales. La energía inicial cae hacia escalas típicas cada vez menores, y eventualmente acaba contribuyendo sólo a difuminar ligeramente el perfil de la gota de tinta final, exactamente como en este diagrama de Corrsin (1959b).



|| La conclusión de que una cascada de Richardson conduce a una figura delimitada por un fractal es ineludible, pero la conclusión de que  $D=5/3$  es dudosa. Este valor corresponde a las secciones planas de superficies espaciales con  $D=8/3$ , valor que se da a menudo en turbulencia. En el caso de isosuperficies de escalares (que se estudian en el capítulo 30),  $D=8/3$  se puede deducir de la teoría de Kolmogorov. No obstante, no hay que confiar demasiado en las analogías numerológicas.

|| En realidad, es probable que el valor de  $D$  dependa de la energía inicial del fluido y del tamaño del recipiente en el que tiene lugar la dispersión. Con una energía inicial pequeña, una gota en forma de disco se arrugaría poco, dando lugar a una curva de dimensión  $D$  próxima a 1 (lámina 76). Una energía inicial grande en un recipiente pequeño podría dar lugar a una dispersión más completa, con secciones planas que nos recordarían más a la lámina 82 ( $D \sim 1,7373$ ), o incluso de dimensión  $D=2$  (capítulo 8). Véase Mandelbrot 1976c.

|| Si esta última conclusión es válida, el paso siguiente sería investigar la relación entre  $D$  y la energía inicial, y buscar el menor valor de la energía para el cual  $D=2$  en el plano, es decir,  $D=3$  en el espacio. Cuando estudiemos el caso límite  $D=2$  (capítulo 7), veremos que difiere cualitativamente de  $D<2$ , pues, en el primer caso, dos partículas de tinta que inicialmente están alejadas tienden asintóticamente a tocarse. Así pues, no me sorprendería nada descubrir que la expresión «dispersión turbulenta» se esté empleando para designar dos fenómenos marcadamente distintos.

|| POSDATA. Mucho después de que esta lámina hubiera aparecido publicada por vez primera en el *Fractals* de 1977, Paul Dimotakis fotografió secciones tenues de un chorro turbulento dispersándose en un medio laminar. El parecido con esta lámina es de lo más satisfactorio. ■



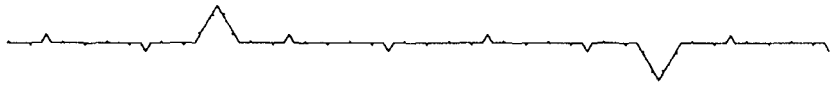
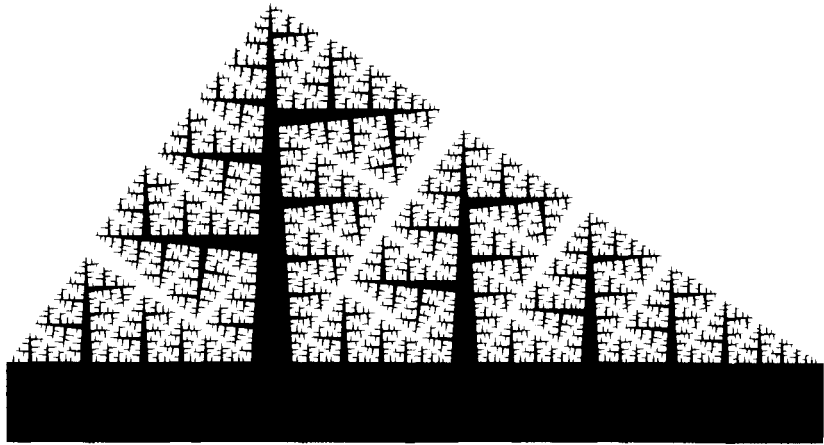
FIG. 85 y 86. *Curvas de Koch generalizadas y autosemejanza con partes distintas* ( $D \sim 1,4490$ ,  $D \sim 1,8797$ ,  $D \sim 1 + \epsilon$ )

Estas láminas se han construido con el mismo método de Koch, aunque las longitudes de los lados de los generadores toman valores  $r_m$  distintos. Hasta ahora hemos supuesto que las  $N$  «partes» en que se descomponía nuestro «todo» tenían la misma razón de semejanza  $r$ . Usando  $r_m$  distintas la curva de Koch resulta menos inexorablemente regular. Así pues, la lámina 85 presenta una curva de Koch más variada.

Obsérvese que, en esta serie de láminas, la construcción continúa hasta alcanzar detalles de un tamaño predeterminado. Cuando  $r_m = r$ , esto se consigue después de un número predeterminado de pasos, pero en el caso presente este número es variable.

La tarea siguiente consiste en extender el concepto de dimensión de semejanza a esta generalización de la iteración de Koch. Para encontrar alguna pista, consideremos una forma euclídea ordinaria pavimentada con partes que guarden unas proporciones  $r_m$  con el todo. Si  $D=1$ , las  $r_m$  satisfarán  $\sum r_m = 1$  y, en general, para las formas euclídeas se cumplirá que  $\sum r_m^D = 1$ . Además, las fractales que se pueden descomponer en partes iguales cumplen la condición ya conocida  $Nr^D = 1$ , que se puede escribir también como  $\sum r_m^D = 1$ . Estos precedentes nos sugieren definir la función generatriz de la dimensión, a saber  $G(D) = \sum r_m^D$ , y definir  $D$  como la única raíz real de  $G(D) = 1$ . Quedaría por ver si esta  $D$  coincide siempre con la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, cosa que se da en todos los casos que conozco.

EJEMPLOS. La dimensión de la figura de la lámina 85 es mayor que el  $\log 4 / \log 3$  de la curva de Koch original. La figura superior de la lámina 86 tiene una  $D$  ligeramente inferior a 2. Cuando  $D \rightarrow 2$ , la costa de esta figura tiende a la curva de Peano-Pólya, que es una variante de las curvas de Peano que estudiamos en el capítulo siguiente. El parecido entre esta figura y una hilera de árboles no es accidental, como veremos en el capítulo 17. Finalmente, la  $D$  de la figura inferior de la lámina 86 es ligeramente superior a 1.





## Domando las curvas monstruosas de Peano

Acabamos de ver, al tratar de las curvas de Koch generalizadas que no se cortan a sí mismas, que hay razones de peso para detenerse un poco antes de  $D=2$ . Cuando llegamos a  $D=2$  se produce un cambio cualitativo profundo.

Supondremos que los terágonos no se cortan a sí mismos, aun cuando puedan presentar puntos de autocontacto. Uno de los síntomas que se presentan cuando  $D$  llega a  $D=2$  es que los puntos de autocontacto son asintóticamente *inevitables*. El síntoma principal es que es *inevitable* que la curva límite llene un «dominio» del plano, esto es, un conjunto que contiene discos (círculos rellenos).

Esta doble conclusión no se debe a una falta de imaginación, corregible, por parte de los matemáticos, sino que es consecuencia de un principio fundamental que tuvo un papel central en la crisis de la matemática entre 1875 y 1925.

### «Curvas», movimientos y barridos de Peano

Los límites correspondientes, de los que se dan ejemplos en las próximas láminas, se llaman *curvas de Peano*, pues la primera de ellas se encuentra en Peano (1890). Se las llama también *curvas que cubren el plano*. En su caso, la definición formal de la dimensión como  $\log N / \log(1/r) = 2$  está justificada, pero por razones decepcionantes. Desde el punto de vista del matemático, una curva de Peano no es más que una manera rara de considerar un dominio plano, que es un conjunto al que todas las definiciones clásicas asignan la dimensión 2. Es decir, que la expresión *curva que recubre el plano* no debería emplearse si se pretende hablar con precisión.

Por suerte, la mayoría de «curvas» de Peano, incluso las que se obtienen por una construcción iterativa de Koch, están parametrizadas de un modo natural por un escalar  $t$ , al que podemos llamar «tiempo». En tal

caso, y sin ningún temor a los guardianes del rigor, podemos usar las expresiones: *movimientos de Peano*, *movimientos que recubren el plano*, *movimientos de barrido por baldosas*, o *barridos por baldosas* (hablaremos de los embaldosados más adelante en este mismo capítulo). Y así lo haremos cuando nos parezca conveniente, aunque los ensayos no tienen por qué presentar una consistencia absoluta bajo ningún concepto.

### *Las curvas de Peano como monstruos*

«*¡Todo se ha trastornado!* Es difícil expresar en palabras el efecto que el resultado de [Giuseppe] Peano tuvo sobre el mundo matemático. Parecía como si todo se hubiera venido abajo, como si los conceptos matemáticos fundamentales hubieran perdido su significado» (Vilenkin 1965). «Posiblemente [el movimiento de Peano] no pueda ser captado por la intuición; y sólo se puede entender por medio del análisis lógico» (Hahn 1956). «Algunos objetos matemáticos, como la curva de Peano, son totalmente antiintuitivos..., extravagantes» (Dieudonné, 1975).

### *La verdadera naturaleza de las curvas de Peano*

Yo creo que las citas anteriores sólo prueban que ningún matemático ha examinado nunca con detenimiento una buena gráfica de Peano. Un observador despiadado podría decir que estas citas demuestran falta de imaginación geométrica.

Por el contrario, yo afirmo que, después de observar atentamente los terágonos de Peano, dejando vagar la mente, resulta muy difícil no asociarlos con diversos aspectos de la naturaleza. Este capítulo aborda las curvas «autoevitantes», es decir, aquéllas cuyos terágonos *evitan* los puntos de autocontacto. En el capítulo 13 se estudiarán los terágonos que presentan un autocontacto *moderado*. Los terágonos que recubren un retículo (una cuadrícula, por ejemplo) deben pasar por un tratamiento previo para eliminar los puntos de autocontacto.

### *Arboles fluviales y cuencas*

Al examinar distintos terágonos de Peano, vi en cada caso un conjunto de *árboles* (o de conjuntos de árboles) que presentaban una variedad inagotable de interpretaciones concretas. Estas son especialmente

evidentes en la curva de Peano que llamo «barrido del copo de nieve», y que presento en la lámina 103. Es fácil imaginar dicha figura como un conjunto de arbustos plantados uno junto a otro sobre el tercio inferior de un copo de nieve de Koch, que trepan por una pared. O también, el perfil remarcado en negro puede evocarnos un conjunto de riachuelos que serpentean y acaban desembocando en un río que sigue la parte inferior del copo de nieve. Esta segunda interpretación sugiere enseguida que las curvas que separan los ríos entre sí forman las cuencas fluviales. Por supuesto, las etiquetas *río* y *cuenca* son intercambiables.

Esta *nueva* analogía con los ríos y cuencas es tan clara *a posteriori* que conjura cualquier pensamiento de que la curva de Peano es necesariamente patológica. De hecho, si un árbol formado con ríos de anchura nula tiene que drenar completamente una superficie, *debe* llegar necesariamente a todas partes. Alguien que siga la ribera total de los ríos realiza un movimiento que recubre el plano. ¡Preguntad a cualquier niño y os lo confirmará!

Con la ayuda intuitiva que nos proporciona la lámina 102, resulta difícil no ver redes conjugadas análogas en cualquier otro terágono de Peano. Hasta una isla tosca como la de la lámina 93 empieza a adquirir sentido intuitivo. Los delgados dedos de agua que la penetran no se pueden contemplar ya como una marina, por exagerada que sea, sino como ríos que se ramifican.

La ciencia que trata de los ríos debería llamarse *potamología* (término acuñado por Maurice Pardé, a partir de *ποταμιος* (= río) y *λογος*). Pero la costumbre ha incluido el estudio de los ríos en la ciencia del agua, la hidrología, de la que echaremos mano muchas veces a lo largo de este ensayo.

*Los puntos múltiples son inevitables en los árboles,  
y por lo tanto también en los movimientos de Peano*

Muchas propiedades matemáticas de las curvas de Peano se hacen evidentes también de repente. Para explicar los puntos dobles, supongamos que uno empieza en un punto de la orilla de un río de un árbol fluvial de Peano y se mueve río arriba o río abajo, dando un rodeo alrededor de cada rama (moviéndose cada vez más rápido a medida que disminuye el grosor de las ramas). No cabe duda de que a la larga uno acaba encontrándose en la orilla opuesta del punto de partida. Pero, como el río límite es infinitamente estrecho, uno regresa de hecho al punto de partida. Así pues, en una curva de Peano los puntos dobles son *inevitables*, no sólo

desde el punto de vista lógico, sino también desde el intuitivo. Más aún, forman un *conjunto denso*.

También es inevitable que algunos puntos sean visitados más de dos veces, pues en los puntos de confluencia de ríos coinciden por lo menos tres puntos de la ribera. Si todos los puntos de confluencia corresponden sólo a pares de ríos, la multiplicidad mayor que se da es tres. Por otra parte, si se acepta que pueda haber puntos de multiplicidad superior uno se puede arreglar perfectamente bien sin puntos triples.

Todas las afirmaciones de los párrafos anteriores han sido demostradas, pero, como las demostraciones son delicadas y dieron lugar a controversias, las propiedades mismas parecen «técnicas». Aunque en realidad lo cierto es lo contrario. ¿Quién sería capaz de seguir discutiendo que mi propio enfoque intuitivo es preferible al puramente lógico?

Los ríos de la curva de Peano no son formas estándar, sino curvas fractales. Esto es una suerte, especialmente para su aplicación en modelado, puesto que todas las razones aducidas en el capítulo 5 a favor de que las curvas geográficas no son rectificables son aplicables también a las riberas de los ríos. De hecho, muchos de los datos de Richardson incluyen fronteras que discurren a lo largo de ríos. Los ríos también aparecen en la cita de Steinhaus (1954). En cuanto a las cuencas de drenaje fluvial, se pueden rodear por curvas cerradas semejantes a las costas de las islas, formadas por partes de la cuenca. Cada cuenca está formada por la yuxtaposición de cuencas parciales y está surcada por los propios ríos, pero las curvas que recubren porciones del plano y están delimitadas por curvas fractales presentan toda la estructura que nos hace falta para esta descripción.

### *Movimiento de Peano y perembaldosado*

Tómese la curva de Peano original (lámina 93) y escríbase  $t$  en la base de numeración  $N=9$ . Se tendrá una expresión de la forma  $0, \tau_1, \tau_2, \dots$ . Los tiempos cuyo primer «dígito» sea el mismo estarán en el mismo noveno del cuadrado inicial; de éstos, los que tengan el mismo segundo dígito estarán en el mismo  $9^2$ -avo, etc. Así pues, el embaldosado de  $[0,1]$  en novenos se traduce en un embaldosado del cuadrado, y los novenos de las baldosas lineales se traducen en los correspondientes novenos de las baldosas planas. Y la propiedad del intervalo  $[0,1]$  de estar perembaldosado (pág. 74), esto es, de ser recurrente e indefinidamente subdivisible en baldosas semejantes a  $[0,1]$  y más pequeñas, se traduce al cuadrado. Otros movimientos de Peano alternativos, como los de Cesàro, Pólya y

otros, aplican esta propiedad del intervalo en diversos perembaldosados del triángulo.

En general, la mayoría de movimientos de Peano generan perembaldosados del plano. En el caso más simple hay una base  $N$  y se empieza con un perembaldosado lineal consistente en divisiones sucesivas en  $N$ -avos. Sin embargo, el barrido del copo de nieve de las láminas 102-103 precisa una división irregular del intervalo  $[0,1]$  recorrido por  $t$  en cuatro subintervalos de longitud  $1/9$ , otros cuatro de longitud  $1/9\sqrt{3}$ , uno de longitud  $1/9$ , dos de  $1/9\sqrt{3}$  y dos de  $1/9$ .

### *Sobre la medida de la distancia por el área*

Las relaciones donde la longitud y el área intercambian su papel son típicas del movimiento de Peano, especialmente cuando éste es *isométrico*, esto es, cuando un intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  se aplica sobre un *área* igual a la *longitud*  $|t_1 - t_2|$ . (La mayoría de movimientos de Peano son isométricos y perembaldosantes, pero se trata de propiedades distintas.) Si llamamos *intervalo de Peano plano* a la imagen del intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$ , tendremos que, en vez de medir distancias por medio del tiempo, podremos hacerlo mediante el área. Nos encontramos, sin embargo, con una complicación crucial, pues los puntos que están uno frente a otro en riberas opuestas de un río coinciden en el espacio y son visitados varias veces.

La definición de la «distancia de Peano» debe tener en cuenta el orden de las visitas. Si denotamos por  $t'_2$  y  $t'_2$  los instantes de los primeros pasos por los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , y por  $t''_1$  y  $t''_2$  los de las últimas visitas, definiremos el *intervalo de Peano por la izquierda*  $L\{P_1, P_2\}$  como la aplicación de  $[t'_1, t'_2]$  y el *intervalo de Peano por la derecha*  $R\{P_1, P_2\}$ , como la aplicación de  $[t''_1, t''_2]$ . Las longitudes de dichos intervalos permiten definir la *distancia por la izquierda* y la *distancia por la derecha* como  $|L\{P_1, P_2\}| = |t'_1 - t'_2|$  y  $|R\{P_1, P_2\}| = |t''_1 - t''_2|$ . Estas distancias son aditivas, en el sentido de que si tres puntos  $P_1, P_2$  y  $P_3$  están ordenados por la izquierda, según el orden de los primeros tiempos de paso, se tiene

$$|L\{P_1, P_3\}| = |L\{P_1, P_2\}| + |L\{P_2, P_3\}|.$$

Otras definiciones alternativas de distancia distinguen entre los puntos del río y de la cuenca. Denótese por  $t'$  y  $t''$  los instantes de las visitas primera y última a  $P$ .  $P$  es un *punto del río* si los límites de la imagen de  $[t', t'']$  son  $P$  y la cuenca. Las visitas sucesivas de  $P$  están una frente a

otra en algún río.  $P$  es un *punto de la cuenca* si la imagen de  $[t', t'']$  está delimitada por  $P$  y el río.

Además, si hemos representado una curva de Peano como la playa común a un árbol fluvial y su correspondiente cuenca, entre los caminos que enlazan  $P_1$  con  $P_2$  sobre los ríos (o, alternativamente, sobre las cuencas) hay un camino mínimo común. Parece razonable usar este camino para medir la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$ . Salvo en casos excepcionales, la dimensión  $D$  de los ríos y las cuencas tiene un valor comprendido estrictamente entre 1 y 2, por lo que ese camino mínimo no se puede medir con la longitud ni con el área, sino que en los casos típicos tiene una medida de Hausdorff no trivial con dimensión  $D$ .

MÁS. Nuevas e importantes consideraciones sobre los movimientos de Peano se encontrarán en los pies de figura que vienen a continuación.



Como el generador tiene puntos de autocontacto, las islas de Koch finitas que resultan son conjuntos de cuadrados negros que semejan un sector de un tablero de ajedrez infinito. El  $n$ -ésimo terágono de Koch es una cuadrícula de lado  $\eta = 3^{-n}$  que llena un cuadrado de área 2. Dicho llenado es más ajustado a medida que  $k \rightarrow \infty$ . Basta con un ejemplo (que en la lámina está junto al cuadrado negro de partida) para que el lector se haga idea de un dibujo tanroso.

En las tres ilustraciones de la parte superior de la página 93 se evita la ambigüedad de los puntos dobles recortando las esquinas de modo que el área total sea la misma.

A la misma escala, el cuarto estadio de esta secuencia sólo permitiría ver un cuadrado gris al 50%, pero un dibujo mayor de un cuarto de la costa se puede seguir sin perderse (aunque uno corra el riesgo de marearse). Nos muestra gráficamente qué se quiere decir cuando se afirma que la curva de Koch límite llena el plano.

Habría estado bien poder definir una isla límite, como en el caso de las islas de Koch del capítulo 6, pero en este caso resulta imposible. Es casi seguro que un punto elegido al azar pasa continuamente de estar en tierra firme a estar en el mar. Los terágonos avanzados están tan profunda y uniformemente penetrados por golfos y ríos que un cuadrado de lado  $x$ , tal que  $\eta \ll x \ll 1$ , se compone de agua y tierra firme prácticamente al 50%.

INTERPRETACIÓN. La curva límite de Peano establece una aplicación continua entre la recta y el plano. El hecho de que los autocontactos sean matemáticamente inevitables es algo clásico, pero el hecho de que esto tenga interés en la modelización de la naturaleza es una innovación de esta obra.

ORDEN DE LARGO ALCANCE. Alguien que no conociera la cascada descendente que hemos seguido para construir nuestras curvas de Peano finitas se quedaría perplejo ante el extraordinario orden de largo alcance que presentan y que les permite evitar las autointersecciones y también los autocontactos. El menor desliz haría que tanto las unas como los otros fueran altamente probables.

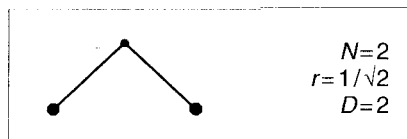
¶ Y la relajación total de la disciplina haría que la repetición indefinida de las autointersecciones fuera casi segura, pues un movimiento de Peano totalmente indisciplinado es el movimiento browniano, que hemos mencionado en el capítulo 2 y que estudiaremos en el capítulo 25.

¶ TEOREMA DE LIOUVILLE Y ERGODICIDAD. En mecánica se representa el estado de un sistema complejo por medio de un punto en un «espacio de fases». Al evolucionar de acuerdo con las ecuaciones del movimiento, cada dominio de este espacio se comporta de modo que su medida (hipervolumen) permanece constante (teorema de Liouville), pero su forma cambia, dispersándose y llenando todo el espacio que le es accesible con una uniformidad cada vez mayor. Ambas características se dan en el comportamiento del dominio pintado en negro de la construcción de Peano que hemos presentado aquí. Resulta pues interesante profundizar un poco más, observando que en muchos sistemas «dinámicos» simplificados en los que se puede realizar un estudio detallado, cada dominio se dispersa transformándose en una banda cada vez más larga y delgada. Sería interesante ver si, por el contrario, la dispersión de otros sistemas funciona según árboles como los de Peano. ■



FIGS. 96 y 97. Construcciones cuadrangulares de Koch de dimensión  $D=2$ : barridos triangulares de Cesàro y Polya, y otras variantes.

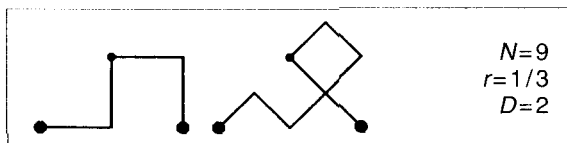
El generador más simple que se puede imaginar está formado por  $N=2$  segmentos iguales formando un ángulo  $\theta$  tal que  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ . El caso límite  $\theta=180^\circ$  genera un segmento rectilíneo; el caso  $\theta=120^\circ$  (ilustrado al pie de la lámina 71) da lugar (entre otras) a la curva triádica de Koch. El caso límite  $\theta=90^\circ$  es



Este generador da lugar a una extraordinaria variedad de curvas de Peano, según cuáles sean el iniciador y la regla de colocación del generador sobre los lados del terágono precedente. En las láminas 96 a 100 se examinan unos cuantos ejemplos.

▢ Además, en el capítulo 25 se obtiene el movimiento browniano aleatorizando la clase de todas las curvas de Peano con estas mismas  $N$  y  $r$ . ▣

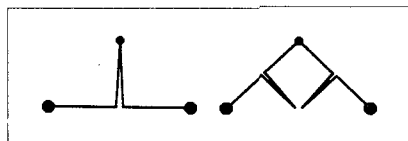
**BARRIDO TRIANGULAR DE PÓLYA.** El iniciador es  $[0,1]$ , el generador el mismo de más arriba, y se va disponiendo alternativamente a derecha y a izquierda del terágono. La primera posición se va alternando también. Los primeros estadios de la construcción son los siguientes



Los terágonos son fragmentos de una cuadrícula contenida en el interior de un triángulo rectángulo isósceles de lado  $[0,1]$ . La curva límite barre dicho triángulo.

FIG. 96. BARRIDO DE POLYA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO NO ISÓSCELES. El generador se ha cambiado por dos segmentos desiguales y ortogonales. Se deja como ejercicio para el lector adivinar el procedimiento seguido para evitar los puntos de autocontacto.

**BARRIDO TRIANGULAR DE CESÀRO.** El iniciador es  $[0,1]$ , el generador es el mismo de antes y los dos primeros pasos de la construcción son los siguientes (para mayor claridad, el dibujo se ha hecho con  $\theta=85^\circ$  en vez de  $\theta=90^\circ$ ).



Como resulta patente, en todos los pasos impares el generador se coloca a la derecha, con lo que el terágono resultante es un enrejado de líneas paralelas a las diagonales del generador. En los estadios pares de la construcción, el generador se coloca a la izquierda, y el terágono resultante es una cuadrícula paralela a los lados del iniciador. Asintóticamente esta curva llena el triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa  $[0,1]$ .

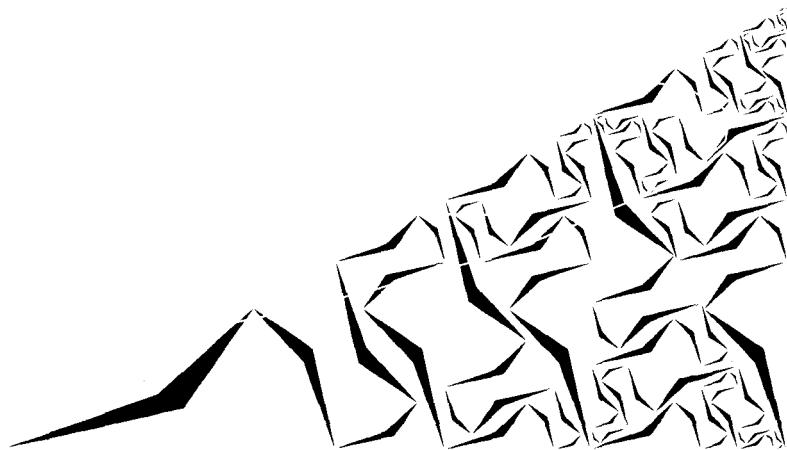


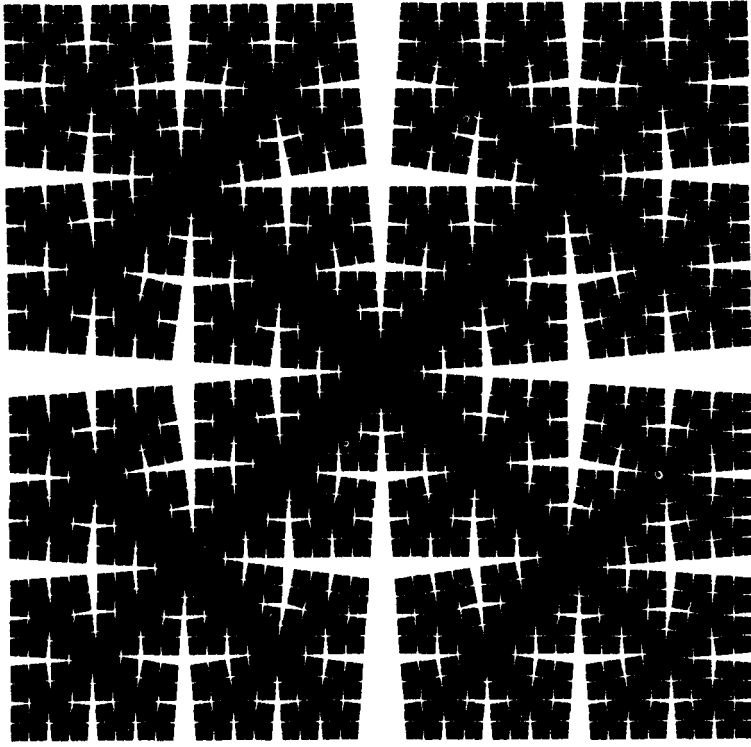
FIG. 97. Esta lámina representa un barrido cuadrangular obtenido por yuxtaposición de los barridos de Cesàro iniciados con  $[0,1]$  y  $[1,0]$ . (Para mayor claridad, hemos tomado otra vez  $\theta=85^\circ$  en vez de  $90^\circ$ .)

**AUTOSOLAPAMIENTO.** Cada intervalo de las cuadrículas recubiertas por los terágonos de Cesàro es repasado *dos veces*. Además de tener puntos de auto-contacto, esta construcción presenta autosolapamiento.

«EFICACIA» DEL LLENADO DEL PLANO. UNA PROPIEDAD EXTREMAL DE LA DISTANCIA DE PEANO-CESÀRO. La curva de Peano de la lámina 93 aplica  $[0,1]$  en el cuadrado de diagonal  $[0,1]$  y área  $1/2$ . La curva de Pólya recubre la misma área. Pero la curva de Cesàro barre un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa  $[0,1]$  y área  $1/4$ . Para recubrir el mismo cuadrado, Cesàro debe unir las aplicaciones de  $[1,0]$  y  $[0,1]$ . Por tanto, la curva de Cesàro es la menos «eficaz» de las dos. De hecho, es la menos eficaz de las curvas de Peano sin autointersecciones que se pueden trazar sobre una cuadrícula. Esto la dota de una virtud compensadora: la distancia de Peano por la izquierda o por la derecha (véase la pág. 91) entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  es mayor o igual que el cuadrado de la distancia euclídea:

$$|L(P_1, P_2)| \geq |P_1 P_2|^2; |R(P_1, P_2)| \geq |P_1 P_2|^2$$

En otras curvas de Peano la diferencia entre las distancias de Peano y euclídea puede tomar un signo u otro.

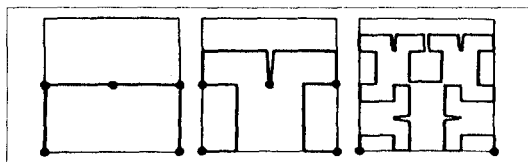


EL PROBLEMA DE KAKUTANI-GOMORY. Escogiendo  $M$  puntos  $P_m$  del cuadrado  $[0, 1]^2$ , Kakutani (comunicación oral) estudia la expresión  $\inf \sum |P_m P_{m+1}|^2$ , donde el ínfimo se toma con respecto a todas las cadenas que unen la sucesión de los  $P_m$ . Demuestra que  $\inf \leq 8$ , pero conjetura que esta cota superior no es la óptima. Y así es, R.E. Gomory (comunicación oral) obtiene una cota mejor:  $\inf \leq 4$ . En su demostración usa la curva de Peano-Cesàro y procede del modo siguiente: (A) Añádanse las cuatro esquinas del cuadrado si no se encuentran ya entre los  $P_m$ ; (B) ordénense los  $M$  puntos  $P_m$  según las primeras visitas en la cadena de las cuatro curvas de Peano-Cesàro dibujadas en el interior del cuadrado (construidas tomando los lados como iniciadores); (C) nótese que la prolongación de la cadena realizada en (A) no hace disminuir  $\sum |P_m P_{m+1}|^2$ ; (D) nótese también que no hay disminución si sustituimos cada sumando  $|P_m P_{m+1}|^2$  por  $|\mathcal{L}(Z_m Z_{m+1})|$ ; (E) nótese por fin que  $\sum |\mathcal{L}(Z_m Z_{m+1})| = 4$ . Si se hubieran usado otras curvas de Peano, los pasos (B) y (D) de la demostración no habrían sido válidos.

FIGS. 99 y 100. *Un barrido cuadrangular y el barrido del dragón*

Aquí el generador es el mismo que en las láminas 96 y 97, pero unos cuantos cambios aparentemente simples en las reglas de construcción tienen consecuencias importantes.

UN ÚLTIMO BARRIDO CUADRANGULAR DE PEANO. El iniciador es  $[0,1]$ , y los estadios segundo, cuarto y sexto de la iteración son ahora

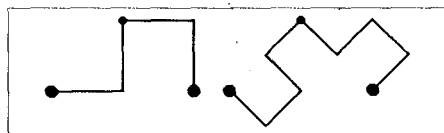


EFICACIA. UNA PROPIEDAD EXTREMAL. Esta curva llena un dominio de área 1, en tanto que las curvas de las láminas 96-97 y la curva dragón de más abajo sólo cubren áreas de  $1/2$  o  $1/4$ . Si los terágonos se adaptan a una cuadrícula ortogonal, el área barrida no puede ser mayor que 1. Este valor máximo se alcanza siempre que los terágonos sean autoevitantes. Dicho de otro modo, la ausencia de autocontactos tiene una importancia mayor que la meramente estética, y una curva con puntos de autocontacto en la que éstos se evitan mediante recortes, como en la lámina 93, no es equivalente a una curva de Koch autoevitante.

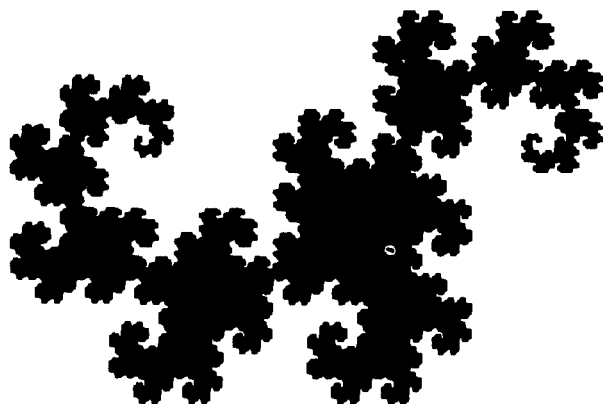
Si se toman los terágonos impares de este barrido cuadrangular y se unen los puntos medios de los lados consecutivos, de modo que se eviten los puntos de autocontacto, se obtiene una curva de Peano ideada por Hilbert.

FIG. 100. UNA CURVA QUE BARRE UN TRAPEZIO RECTÁNGULO. Se cambia el generador por otro formado por dos segmentos desiguales y perpendiculares. El procedimiento para evitar los autocontactos es el mismo que en la lámina anterior.

EL DRAGÓN DE HARTER-HEIGHTWAY. (Véase Gardner, 1967, Davis y Knuth, 1970.) El iniciador es aquí  $[0,1]$  y el generador es el mismo de antes, pero se va alternando entre la derecha y la izquierda del terágono. La única diferencia con el barrido triangular de Pólya es que la primera posición siempre cae a la derecha del terágono en todos los pasos de la iteración. Los primeros estadios son los siguientes

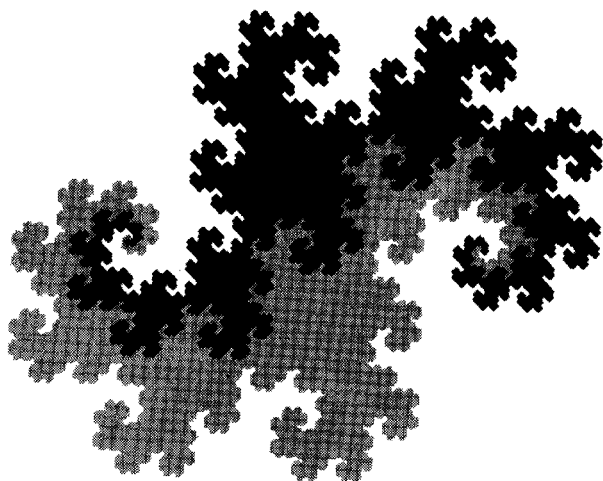


Las consecuencias de este cambio son espectaculares, y un estadio avanzado de la iteración presenta este aspecto

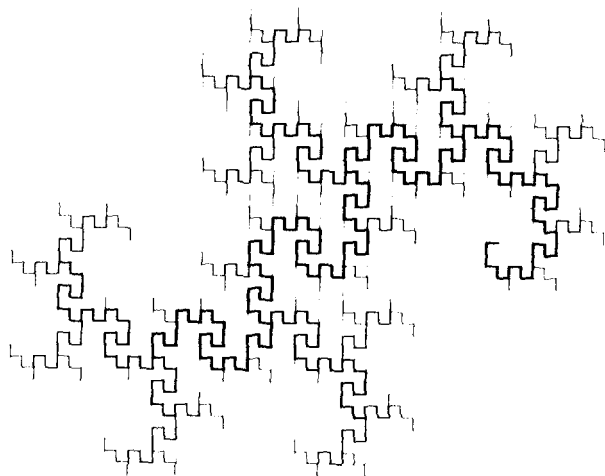


En esta ilustración la curva en sí resulta indistinguible y lo que vemos es el contorno, que llamamos *curva dragón*. Por tanto, la curva de Peano merece el nombre de *barrido del dragón*. Al igual que todas las curvas de Koch iniciadas con  $[0,1]$ , el dragón es autosemejante. Además, se aprecia una segmentación tal que los segmentos, semejantes entre sí pero no al conjunto del dragón, están enlazados por cinturas de avispa.

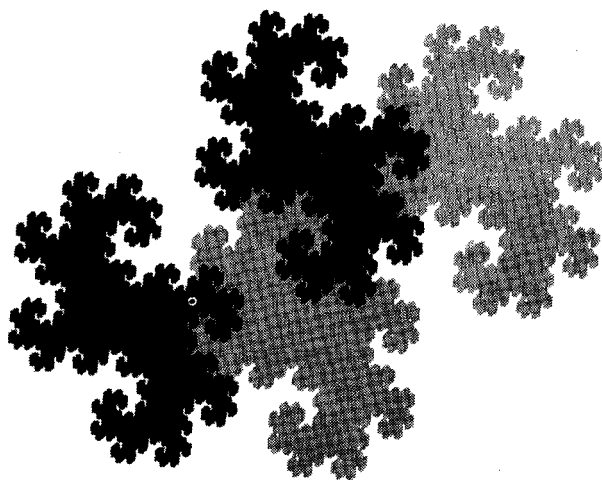
DRAGONES SIAMESES. En *Fractals* (1977) se señalaba que, con las mismas reglas de construcción del dragón, un iniciador más natural es  $[0,1]$  seguido de  $[1,0]$ , y la forma barrida resultante recibía el nombre de *dragones siameses*. Esta forma tiene varias representaciones (Knuth, 1980). Presenta el siguiente aspecto (uno de los dragones está en negro y el otro en gris).



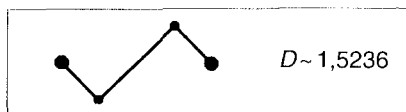
RÍO DE LOS DRAGONES SIAMESES. Si se borran las corrientes próximas a la fuente (en aras de una mayor legibilidad), el árbol fluvial de los dragones siameses presenta este aspecto.



Los dragones siameses se pueden embaldosar mediante replicas reducidas de sí mismos, tal como muestra la figura.

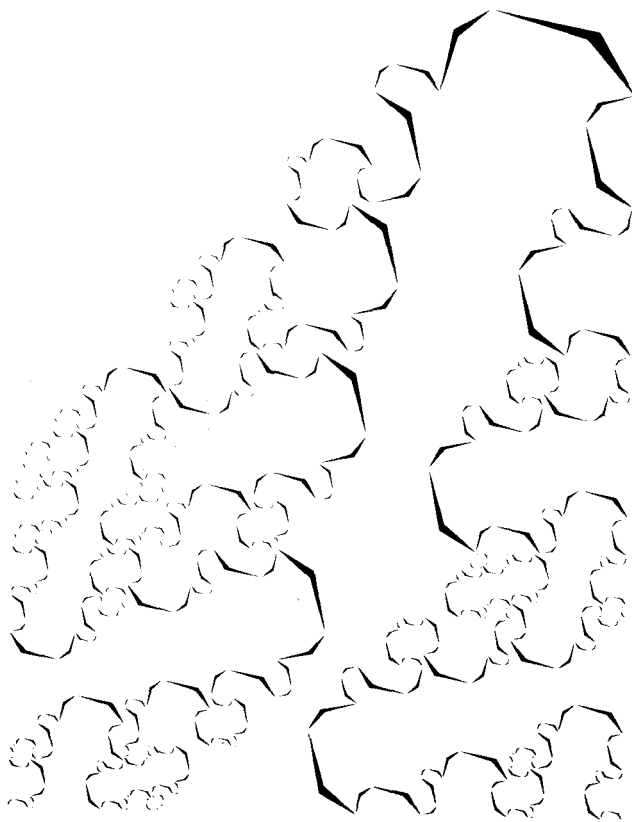


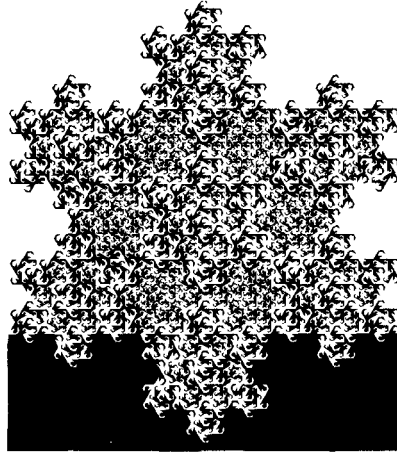
LA PIEL DE LOS DRAGONES SIAMESES. Se trata de una curva de Koch con el generador



Las longitudes de los segmentos corto y largo son, respectivamente,  $r_1 = 1/2\sqrt{2}$  y  $r_2 = 1/\sqrt{2} = r_1^3$ . Con lo que la función generatriz de la dimensión es  $(1/\sqrt{2})^D + 2(1/2\sqrt{2})^D = 1$ , y la cantidad  $2^{D/2}$  es una raíz de  $x^3 - x^2 - 2 = 0$ .

DRAGONES ALTERNADOS. (Davis y Knuth, 1970) Tómesese una sucesión infinita cualquiera  $x_1, x_2, \dots$ , en la que cada  $x_k$  puede tomar los valores 0 y 1, y úsese el valor de  $x_k$  para determinar la primera posición del generador en el  $k$ -ésimo estadio de la iteración, de modo que para  $x_k = 1$  el primer generador se orienta hacia la derecha, mientras que para  $x_k = 0$  se orienta hacia la izquierda. Cada sucesión genera un dragón alternado distinto.





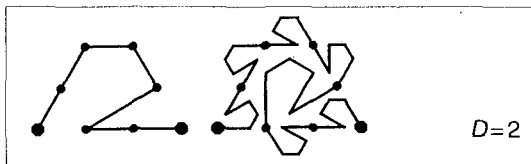
FIGS. 100 y 103 *Los barridos en copo de nieve: Nuevas curvas y árboles de Peano (dimensiones del río y la cuenca  $D \sim 1,2618$ )*

Estas láminas ilustran una familia de curvas de Peano de mi invención. Rellenan el copo de nieve original de Koch (lámina 73), con lo que se relacionan dos monstruos clásicos que datan de 1900.

Una virtud más importante es que basta con una mirada para documentar uno de los temas principales del presente ensayo: las curvas de Peano no son, ni mucho menos, monstruos matemáticos sin una interpretación concreta. Si no tienen autocontactos, presentan una serie de árboles conjugados fácilmente visibles e interpretables. En una primera aproximación, son buenos modelos de los ríos, las cuencas fluviales, los árboles de la botánica y los sistemas vasculares humanos.

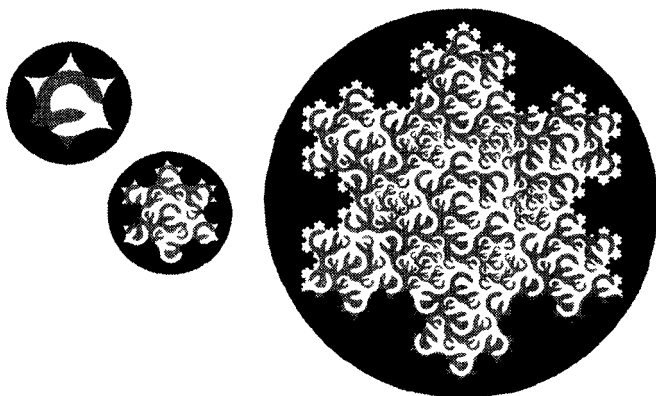
De rebote, obtenemos una manera de embaldosar el copo de nieve con copos desiguales.

GENERADOR DE SIETE SEGMENTOS. Sea  $[0,1]$  el iniciador, y sean el generador y el segundo estadio de la construcción



Concretando más, denotemos por  $S$  el generador de arriba, al que llamaremos directo, y definamos el generador inverso  $F$  como la imagen especular de  $S$  según la vertical  $x = 1/2$ . En cualquier estadio de la construcción del barrido del copo de nieve se puede escoger libremente el generador  $F$  o el  $S$ . Por tanto, cada sucesión infinita de  $F$  y  $S$  da un barrido distinto del copo de nieve.

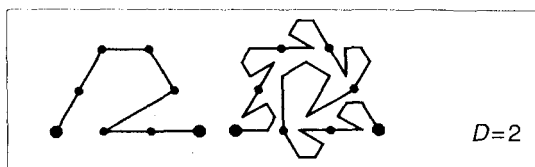




**REDONDEO DE LOS TERAGONOS.** Las líneas quebradas suelen parecer toscas, pero se puede dar a los terágonos del barrido del copo de nieve una apariencia más «natural» e isótropa si se redondea cada segmento sustituyéndolo por un sexto de circunferencia.

**LÁMINA 73.** Ya en la lámina 73, y con la idea de tener un sombreado de fondo ondulante, hemos presentado un terágono avanzado de un barrido de copo de nieve de siete segmentos, redondeado y relleno. Mirándolo de nuevo, evoca una corriente de líquido pasando junto a un contorno fractal, y los remolinos entre dos corrientes paralelas con velocidades distintas.

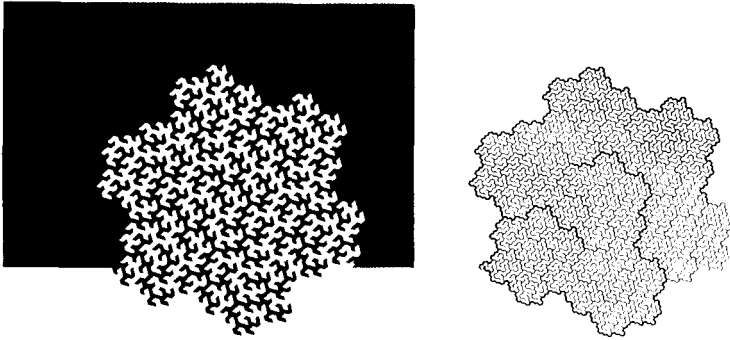
**GENERADOR DE TRECE SEGMENTOS.** Modifiquemos ahora el anterior generador de 7 segmentos sustituyendo la quinta pata por una réplica del total a tamaño reducido. Dicha réplica se puede colocar tanto en posición *S* como *F*. En este último caso, el generador y el segundo estadio de la iteración presentan el siguiente aspecto



**LÁMINA 102.** Este terágono avanzado, como frontera entre dos dominios fantásticamente entrelazados, vale más que cualquier número de palabras para explicar qué significa llenar un dominio plano.

**LÁMINA 103.** Redondéese el anterior generador de 13 segmentos y hágase lo propio con la curva del copo de nieve. El resultado, al cabo de unos pocos pasos en la construcción, es el que se muestra en la lámina 103.

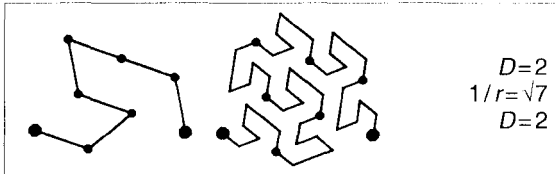
**DIMENSIONES DE LOS RÍOS.** En la curva original de Peano, cada río por separado tiene longitud finita y, por lo tanto, su dimensión es 1. Aquí cada río tiene dimensión  $\log 4 / \log 3$ . Para alcanzar la dimensión  $D=2$  hay que tomar todos los ríos a la vez.



FIGS. 104 y 105. *La curva de Peano-Gosper. Sus árboles y sus parientes de Koch (dimensiones del río y la cuenca  $D \sim 1,1291$ )*

VOLVAMOS A LA LÁMINA 74. Las líneas quebradas delgadas de esta lámina, que no hemos comentado en su momento, representan los primeros estadios (del primero al cuarto) de una curva debida a Gosper (Gardner 1976). Se trata de la primera curva de Peano autoevitante construida por el método de Koch sin otros aditamentos.

El iniciador es  $[0,1]$  y el generador es



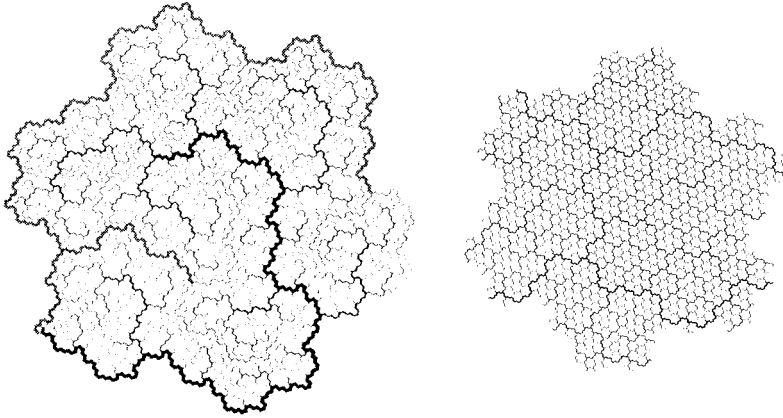
Si hacemos girar el generador en sentido contrario al de las agujas del reloj hasta situar el primer tramo en posición horizontal, se ve que tiene la forma de un retículo triangular, con 7 de los  $3 \times 7$  enlaces ocupados. Esta característica hace extensiva a los retículos triangulares una propiedad que hemos discutido para los cuadrangulares las figuras 99 y 100.

Una vez visto cómo esta curva de Peano llena la curva de Koch de la lámina 74, se puede explicar la idea del grosor variable de las líneas de la lámina 74: representa el quinto estadio de la construcción de la curva de Gosper.

LÁMINA 104, IZQUIERDA. Representa el cuarto terángono de la curva de Gosper como frontera de las zonas blanca y negra.

LÁMINA 104, DERECHA. CUENCAS Y ÁRBOLES FLUVIALES. Se han dibujado los ríos y las cuencas siguiendo las líneas medias de los «dedos» blancos y negros de la figura de la izquierda.

PARTE SUPERIOR DE LA LÁMINA 105. Partiendo de las cuencas y árboles fluviales de la derecha de la lámina 104, se han dibujado de nuevo las líneas de

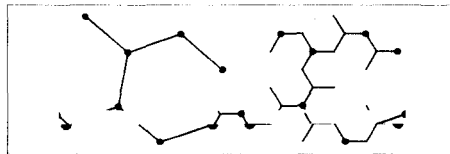


acuerdo con su importancia relativa en el esquema de Horton-Strahler (Leopold, 1962). En este ejemplo se ha dado a los enlaces que forman los ríos y las cuencas una anchura proporcional a sus longitudes en línea recta. Los ríos van en negro y las cuencas en gris.

**DIMENSIONES.** Cada curva de Peano determina la  $D$  de su propia frontera. En las láminas 93 y 96 se trataba simplemente de un cuadrado. En otras láminas posteriores ha sido la piel de un dragón, y luego una curva en copo de nieve. En este caso se trata de un fractal con  $D \sim 1,1291$ .

**FRANCIA.** Cualquiera que en sus tiempos de escolar haya echado una mirada a un mapa que represente los ríos Loira y Garona no se sentirá demasiado lejos de casa.

**PARTE INFERIOR DE LA LÁMINA 105. ARBOL FLUVIAL CONSTRUIDO DIRECTAMENTE POR UNA CASCADA DE KOCH.** Cuando el mismo generador ya tiene forma de árbol, genera un árbol. Tómese, por ejemplo, el generador

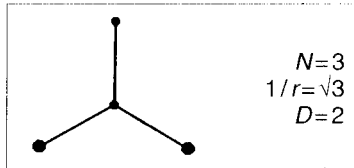


Se obtiene una manera alternativa de drenar la curva de Koch de la lámina 74. (Se han recortado las ramas últimas y más cercanas a las «fuentes».)

FIGS. 107 y 108. *Árboles fractales que llenan el plano, copo deforme y cuarteto.*

Los árboles «fluviales» que llenan un dominio plano deducidos a partir de algunas curvas de Peano se pueden obtener también por iteración directa. La clave consiste en tomar el propio generador en forma de árbol. Tenemos un ejemplo trivial en el caso del generador formado por cuatro patas dispuestas en forma de signo +. De este modo se obtiene el árbol fluvial de la curva de Peano Cesàro (lámina 97).

COPO DEFORME. Tenemos un ejemplo mejor tomando el iniciador  $[0,1]$  y el generador siguiente



Empezamos por notar que cada río en particular es generado por desplazamiento del punto medio, como en la lámina 71. Por lo tanto, cada río asintótico tiene dimensión  $D=\log 2/\log\sqrt{3}=\log 4/\log 3$ . Esto es, el valor ya conocido de la dimensión del copo de nieve. Pero ahora no se trata de un copo de nieve, pues la colocación de los generadores sucesivos sigue una regla distinta.

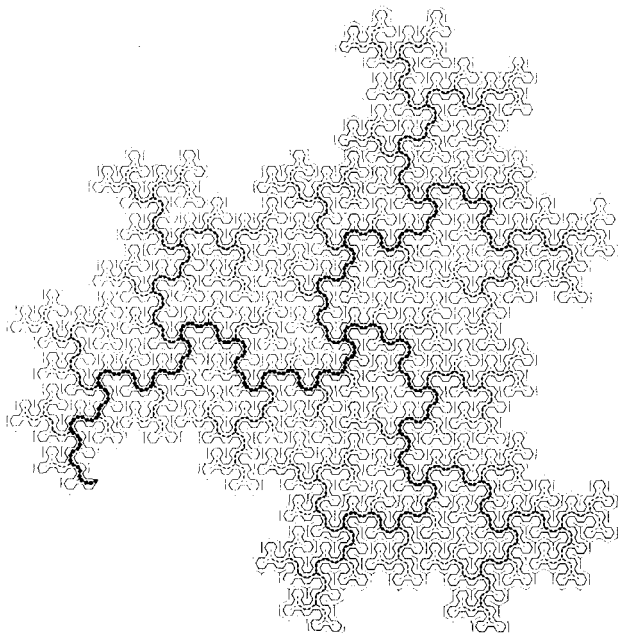


Con objeto de dejar lugar para los ríos, hay que alternar el generador a derecha e izquierda. Con ello, la simetría del copo de nieve queda contrahecha, y por ello llamamos *copo deforme* al dominio drenado por estos ríos.

Consideremos ahora el árbol fluvial. Sus terágonos no se autosolapan, pero irremediabilmente presentan autocontactos. Este rasgo de la variante asintótica es inevitable y también perfectamente aceptable, pues expresa a la perfección el hecho de que varios ríos puedan nacer del mismo punto. Sin embargo, veremos más adelante cómo los terágonos de los ríos *pueden* evitar los autocontactos. Debido a estos autocontactos, el terágono de los ríos que estamos considerando es un pedazo de papel ilegible con una cuadrícula hexagonal, limitado por un fractal aproximado.

PARTE SUPERIOR DE LA LÁMINA 108. El aspecto general del árbol fluvial resulta más aparente si se borran todos los segmentos de río que están en contacto con una fuente y se marca el río principal con un trazo más grueso. El área drenada por este árbol es  $\sqrt{3}/2 \sim 0,8660$ .

BARRIDO DEL COPO DEFORME. Dibújese ahora una curva de Peano con un

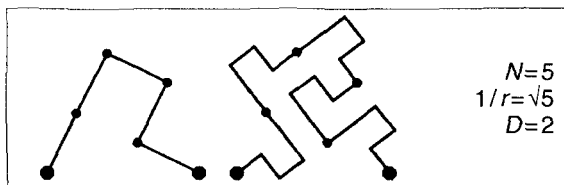


iniciador en forma de  $\Delta$  y un generador en forma de Z con los tres trazos iguales y formando un ángulo de  $60^\circ$ . Se trata del caso extremo, para  $M=3$ , de la familia de generadores usados en las láminas 74 y 75, pero es muy distinto de todos los demás casos. Está estudiado en Davis y Knuth (1970).

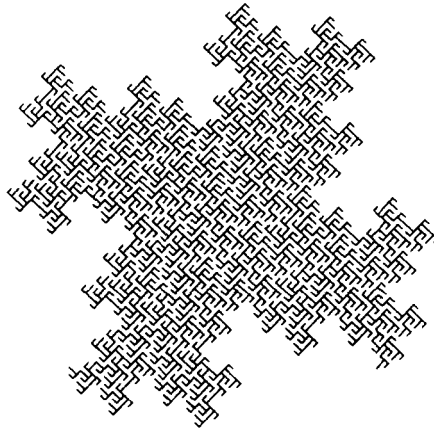
Se puede comprobar que el árbol fluvial correspondiente a esta curva no es otro que el que acabamos de dibujar directamente. Los lados del iniciador tienen longitud 1 y la curva de Peano correspondiente barre un área igual a  $\sqrt{3}/6 \sim 0,2886$  (¡vaya ineficacia!).

CUARTETO. A continuación consideraremos otra curva de Koch y tres curvas que la llenan: una es una curva de Peano y las otras dos, árboles. Dichas curvas, diseñadas por mí, ilustran otro tema de interés.

Tómese el iniciador  $[0,1]$  y el generador siguiente

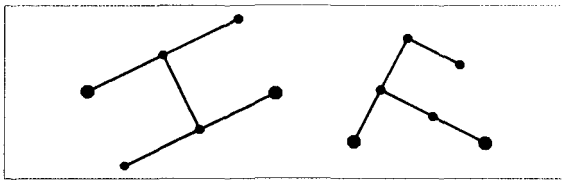


La frontera de estas curvas converge a una curva de Koch de dimensión  $D = \log 3 / \log \sqrt{5} = 1,3652$ . En el centro de la lámina 76 se pueden ver terágono



avanzados de esta curva de Peano y su frontera. Las llamo *el cuarteto*. Cada «jugador», y la mesa entre ellos, están perembaldosados.

El interior del cuarteto es drenado, por supuesto, por su propio árbol fluvial intrínseco, aunque se pueden obtener formas de encadenado completamente distintas con cualquiera de los generadores siguientes



El generador de la izquierda da lugar a terángonos con autocontactos, como en el primer ejemplo de este pie de figura, y el área drenada es  $1/2$ . El generador de la derecha produce terángonos *sin* autocontactos y el área drenada es 1. En la parte inferior de la lámina 108 se muestra un terángono avanzado.

El principal objetivo de este capítulo es que el lector se familiarice sin demasiado esfuerzo con otro objeto matemático que ordinariamente se considera patológico, el polvo de Cantor  $C$ . Este y otros polvos parecidos que describiremos tienen dimensiones fractales comprendidas entre 0 y 1.

Al estar formados por puntos sobre una recta son fáciles de estudiar. Además, ayudan a introducir de la forma más simple varios conceptos centrales referentes a las fractales que, al haber sido tan poco utilizados en el pasado, no han recibido nombres específicos. Primero se da un significado técnico a la palabra *polvo*, sinónimo informal de *conjunto de dimensión topológica*  $D_T = 0$ , al igual que «curva» y «superficie» denotan conjuntos de dimensión topológica  $D_T = 1$  y  $D_T = 2$ . Otras voces nuevas serán *coágulo*, *hueco* y *trema*, y las explicaremos más adelante.

### *Ruido*

Para un profano, ruido es un sonido demasiado fuerte, sin un ritmo agradable o pauta, o que interfiere con otros sonidos más deseables.

¶Partridge (1958) afirma que el término noise (ruido) «se deriva del latín *nausea* (relacionado con *nautes*=marinero); el enlace semántico habría que buscarlo en el ruido que hacía el pasaje de un barco antiguo gimiendo y vomitando durante el mal tiempo». (El *Oxford English Dictionary* no está tan seguro de ello.)¶

Por lo que respecta al significado del término en la física contemporánea, no es tan pintoresco ni tampoco tan preciso: es un sinónimo de fluctuación al azar o de error, independientemente de cuál sea su origen y cómo se manifieste. En este capítulo se introduce  $C$  mediante el caso de un ruido esotérico pero simple.

## *Los errores en las líneas de transmisión de datos*

Un canal de transmisión es un sistema físico que conduce la electricidad. Ahora bien, la corriente eléctrica es susceptible de ruido espontáneo. La calidad de la transmisión depende de la probabilidad de error debida a la distorsión, que depende a su vez de las intensidades relativas de la señal y el ruido.

Este capítulo se ocupa de canales que transmiten datos informáticos y utilizan señales muy intensas. Es importante el hecho de que la señal sea discreta, pues la distribución de errores reduce la distribución de ruido, por así decirlo, a su esqueleto. La función de ruido puede tomar diversos valores, mientras que el error es descrito por una función que sólo puede tomar dos valores. Podría ser, por ejemplo, la función del indicador, que es 0 cuando no hay error en el instante  $t$ , y 1 cuando sí lo hay.

Los físicos son maestros en lo que concierne a la estructura de los ruidos que predominan en el caso de señales débiles, el ruido térmico, por ejemplo. Sin embargo, en el problema que acabamos de describir, la señal es tan fuerte que los ruidos clásicos son despreciables.

Los *ruidos excedentes* no despreciables son fascinantes y difíciles de tratar, pues se sabe muy poco de ellos. En este capítulo estudiaremos un ruido excedente que, hacia 1962, tuvo importancia práctica para la electrotecnia, por lo que se indicó un cierto esfuerzo a investigar el problema. Mi contribución a estas investigaciones fue la primera situación concreta en la que experimenté la necesidad de usar los fractales. Por aquel entonces nadie podía imaginar ni remotamente que un estudio minucioso de ese modesto problema de ingeniería fuera a llevarnos tan lejos.

### *Ráfagas y huecos*

Sometamos los errores a un análisis cada vez más refinado. Un ligero examen muestra la presencia de períodos en los que no se da ningún error. Llamemos «huecos de orden 0» a estos periodos de remisión, si su duración es superior a una hora. Por contra, cualquier intervalo de tiempo flanqueado por huecos de orden 0 queda singularizado como una «ráfaga de errores de orden 0». Un análisis tres veces más fino revela que la ráfaga original es a su vez «intermitente», esto es, que hay unos huecos más cortos «de orden 1», de unos 20 minutos de duración o más, que separan ráfagas, también más cortas, «de orden 1». Del mismo modo, cada una de éstas contiene varios huecos «de orden 2», de unos 400 segundos de duración, intercalados entre ráfagas «de orden 2», y así sucesiva-



mente, de modo que cada estadio está formado por huecos y ráfagas tres veces más cortos que el anterior. La lámina 117 presenta una ilustración aproximada de todo el proceso. (Aunque de momento no hay que hacer demasiado caso al pie de figura.)

La descripción anterior nos sugiere una propiedad de las posiciones relativas de las ráfagas de orden  $k$  contenidas en una ráfaga de orden  $k-1$ . Parece que la distribución de probabilidad de dichas posiciones relativas no tenga que depender de  $k$ . Esta invariancia es un ejemplo claro de autosemejanza, y la dimensión fractal no puede andar lejos, pero no nos precipitemos. Los diversos casos que se tratan en este ensayo pretenden, entre otras cosas, sacar temas nuevos o clarificar otros ya conocidos. Con esta idea, parece más apropiado prescindir del orden histórico e introducir un tema nuevo a partir de una variante no aleatoria del modelo estocástico de Berger y Mandelbrot para los errores (capítulo 31).

### *Un modelo aproximado de las ráfagas de errores: el polvo fractal de Cantor $C$*

En la sección anterior se ha construido el conjunto de errores a partir de una línea recta, el eje de tiempos, a la que se van arrancando huecos sin errores cada vez más cortos. Aunque este procedimiento pueda ser poco habitual en las ciencias de la naturaleza, la matemática pura lo ha utilizado ya, por lo menos desde Georg Cantor (Hawkins, 1970, en especial pág. 58).

En Cantor (1883) el iniciador es el intervalo cerrado  $[0,1]$ . El adjetivo «cerrado» y los corchetes indican que los extremos están incluidos; esta notación se usó ya en el capítulo 6, pero hasta ahora no ha sido necesario explicitarla. El primer estadio de la construcción consiste en dividir  $[0,1]$  en tres partes y extraer el tercio central abierto, denotado por  $]1/3, 2/3[$ . El adjetivo «abierto» y los corchetes invertidos indican que se excluyen los extremos. A continuación se quitan los tercios centrales abiertos de cada uno de los  $N=2$  tercios restantes, y así sucesivamente.

El conjunto  $C$  resultante se llama, bien *diádico*, por el hecho de que  $N=2$ , bien *triádico* o *ternario*, por el hecho de que  $[0,1]$  se subdivide en tres partes.

En general, el número de partes se llama *base* y se denota por  $b$ . Así la razón entre cada  $N$ -ésimo del conjunto y el todo es  $r=1/b$ .  $C$  se llama también *discontinuo de Cantor*, y yo sugeriré la denominación *polvo fractal de Cantor*. Como cada punto del eje de tiempos señala un «suceso»,  $C$  es una sucesión fractal de sucesos.

## *Coágulo, tremas y suero*

El procedimiento de Cantor es una *casca*, por usar un término que Lewis Richardson aplicó a la turbulencia, y que ya tomamos prestado en el capítulo 6 para referirnos a las costas y a la curva de Koch. Un «material» uniformemente distribuido sobre un iniciador  $[0,1]$  es sometido a un remolino centrifugador que lo manda a los tercios de los extremos.

El tercio central arrancado de  $[0,1]$  para formar un hueco se denomina en lo sucesivo *generador de tremas*. En esta sección se acuña este neologismo a partir de TREMA, que significa agujero y está en cierto modo emparentada con el latín *termes*=termita. Acaso sea la palabra griega más corta a la que todavía no se le ha dado un significado científico importante.

En el presente contexto, las tremas y los huecos coinciden, pero no será así en otras situaciones que encontraremos más adelante, por lo que son necesarios dos términos distintos.

Al vaciarse una «trema de primer orden», el material total se conserva y se redistribuye uniformemente sobre los tercios extremos, que llamaremos *pregrumos*. Luego vienen dos remolinos centrífugos y repiten la misma operación con los dos intervalos  $[0,1/3]$  y  $[2/3,1]$ . El proceso continúa como una cascada de Richardson y, en el límite, converge hacia un conjunto que llamaremos *coágulo*. Si la duración de cada estadio es proporcional al tamaño de los remolinos, el proceso total tiene una duración finita.

Paralelamente, propongo el término *suero* para denotar el espacio que no está ocupado por el coágulo.

Sugiero también que esas palabras se usen con un sentido físico, además de matemático. Así, el proceso de *coagulación* denotará una cascada de inestabilidades que produzca una contracción, y el *coágulo* será el volumen en el que se concentra una característica física como resultado de dicho proceso.

Obsérvense las asociaciones libres siguientes: coágulo  $\rightarrow$  queso  $\rightarrow$  leche  $\rightarrow$  Vía Láctea  $\rightarrow$  Galaxia ( $\gamma\alpha\lambda\alpha$ =leche)  $\rightarrow$  galaxias. Acuñé el término *curdling* (coágulo) cuando trabajaba con galaxias, y las connotaciones etimológicas de «curdling galáctico» no me pasaron desapercibidas.

## *Corte externo y polvos de Cantor extrapolados*

Como preludio de la extrapolación de  $C$ , recordemos un aspecto histórico. Cuando Cantor introdujo el conjunto  $C$  apenas se apartó de su

tema original, el estudio de las series trigonométricas. Como dichas series se ocupan de las funciones periódicas, la única extrapolación posible es la repetición indefinida. Recordemos ahora las expresiones *corte interior* y *exterior*, que se explican por sí mismas, y que en el capítulo 6 se tomaron prestadas de la teoría de la turbulencia. Son los tamaños  $\varepsilon$  y  $\Omega$  de los rasgos menor y mayor, respectivamente, presentes en el conjunto. Se puede decir que Cantor se limitó al caso  $\Omega=1$ . En el  $k$ -ésimo estadio de la iteración se tiene que  $\varepsilon=3^{-k}$ , pero, para  $C$ ,  $\varepsilon=0$ . Para obtener cualquier otro  $\Omega<\infty$  (por ejemplo  $2\pi$ , como correspondería a una serie de Fourier) se dilata el polvo de Cantor periódico en un factor  $\Omega$ .

Sin embargo, la autosemejanza, que es una característica muy apreciada en este ensayo, se pierde con la repetición. Aunque se puede recuperar fácilmente si el iniciador se usa sólo en la extrapolación y ésta sigue una *cascada inversa* o *ascendente*. El primer estadio dilata  $C$  en un factor  $1/r=3$ , situándolo en  $[0,3]$ . El resultado es el propio  $C$  y una réplica de sí mismo separada de  $C$  por una nueva trema de longitud 1. En el segundo estadio, el resultado del primero se dilata también en un factor 3 y queda situado en la posición  $[0,9]$ . El resultado es  $C$ , más tres réplicas de sí mismo, separadas por dos tremas de longitud 1 y una de longitud 3. La cascada ascendente continúa, dilatando  $C$  en factores sucesivos de la forma  $3^k$ .

Si se prefiere, se pueden realizar alternativamente dos estadios de interpolación y uno de extrapolación. De este modo, cada serie de tres pasos multiplica el corte exterior  $\Omega$  por 3 y el interior  $\varepsilon$  por 9.

□ En este polvo extrapolado, el eje negativo está vacío, es una trema infinita. El concepto subyacente se comentará más adelante, en el capítulo 13, cuando ataquemos el problema del continente (infinito) y el racimo infinito. ■

### *Dimensiones $D$ comprendidas entre 0 y 1*

El conjunto que resulta de estas extrapolación e interpolación infinitas es autosemejante y

$$D = \log N / \log(1/r) = \log 2 / \log 3 \sim 0,6309.$$

que es una fracción comprendida entre 0 y 1.

Con otras reglas de coagulación distintas se pueden obtener otras  $D$ ; de hecho, cualquier valor entre 0 y 1 es alcanzable. Si la trema del primer estadio tiene longitud  $1-2r$ , con  $0 < r < 1/2$ , entonces la dimensión es  $\log 2 / \log(1/r)$ .

Se puede tener una mayor variedad dejando que  $N=2$ . Para los conjuntos con  $N=3$  y  $r=1/5$ , obtenemos

$$D = \log 3 / \log 5 \sim 0,6826.$$

Para los conjuntos con  $N=2$  y  $r=1/4$ , se tiene

$$D = \log 2 / \log 4 = 1/2.$$

Para conjuntos con  $N=3$  y  $r=1/9$ , se tiene también

$$D = \log 3 / \log 9 = 1/2.$$

Aunque tengan la misma  $D$ , los dos últimos conjuntos tienen «aspectos» muy distintos. Volveremos sobre esta apreciación en el capítulo 34, y reflexionando sobre ella llegaremos al concepto de lagunaridad.

Nótese también que hay por lo menos un polvo de Cantor para cada  $D < 1$ . Además, de  $Nr < 1$  se sigue que  $N < 1/r$ , con lo que  $D$  nunca es mayor que 1.

*C es un polvo porque  $D_T=0$*

Mientras la  $D$  de un conjunto de Cantor puede variar entre 0 y 1, desde el punto de vista topológico todos los conjuntos de Cantor tienen dimensión  $D_T=0$ , pues, por definición, cada punto está separado de los demás, sin que haya que sacar nada para separarlo del resto. Mirado así, ¡no hay ninguna diferencia entre  $C$  y los conjuntos finitos de puntos! El hecho de que en este último caso  $D_T=0$  es algo ya sabido en la geometría estándar, y se usa en el capítulo 6 para razonar que la curva  $K$  de Koch tiene dimensión topológica 1. Pero para los conjuntos totalmente inconexos,  $D_T=0$ .

A falta de un equivalente coloquial de «curva» y «superficie» (que son conjuntos conexos con  $D_T=1$  y  $D_T=2$ ), propongo llamar *polvos* a los conjuntos con  $D_T=0$ .

*Distribución de longitudes de los huecos*

Considérese un polvo de Cantor, sea  $u$  un valor posible de la longitud de un hueco, y denótese por  $U$  la variable aleatoria longitud y por  $Nr$  ( $U > u$ )

el número de huecos o tremas cuya longitud  $U$  sea mayor que  $u$ . ▯ Esta notación es un derivado de la notación  $Pr(U > u)$ , propia de la teoría de la probabilidad. ▮ Se encuentra que hay un factor constante  $F$  tal que la gráfica de la función  $Nr(U > u)$  corta constantemente la gráfica de  $Fu^{-D}$ . Y vuelve a aparecer la dimensión. Si tomamos como coordenadas  $\log u$  y  $\log Nr$ , los escalones son uniformes.

### *Números medios de errores*

Como en el caso de una costa, uno puede obtener una imagen aproximada de la secuencia de errores si la coagulación de Cantor se detiene al llegar a intervalos de  $\varepsilon = 3^{-k}$ . Podría tomarse como  $\varepsilon$  el tiempo necesario para transmitir un símbolo. Hay que usar también la extrapolación periódica de Cantor con un  $\Omega$  grande pero finito.

El número de errores entre los instantes 0 y  $R$ , que denotamos por  $M(R)$ , registra el tiempo contando sólo aquellos instantes que tienen algo que merezca la pena. Es un ejemplo de *tiempo fractal*.

Si la muestra empieza en  $t=0$  (es el único caso que consideraremos aquí), la  $M(R)$  se obtiene como en el caso de la curva de Koch. Siempre y cuando  $R$  sea menor que  $n$ , el número de errores se dobla cada vez que  $R$  se triplica. En consecuencia,  $M(R) \propto R^D$ .

Esta expresión es parecida a la fórmula conocida de la masa de un disco o una bola de radio  $R$  en un espacio euclídeo de dimensión  $D$ . Es también idéntica a la fórmula obtenida en el capítulo 6 para la curva de Koch.

Tenemos como corolario que el número medio de errores por unidad de longitud varía aproximadamente como  $R^{D-1}$ , para  $R$  comprendido entre los cortes inferior y superior. Si  $\Omega$  es finito, el número medio de errores por unidad de longitud disminuye hasta el valor final  $\Omega^{D-1}$ , que se alcanza para  $R = \Omega$ . A partir de ahí la densidad permanece más o menos constante. Si  $\Omega$  es infinito, el número medio de errores disminuye hasta hacerse nulo. Finalmente, los datos empíricos sugieren que  $\Omega$  es finito y muy grande, pero no permiten determinar su valor con ninguna precisión. Si las cosas son así, el número medio de errores tiene un límite inferior no nulo, que, al estar tan mal determinado, en la práctica carece de utilidad.

### *Los extremos de las tremas y sus límites*

▮ Los elementos más destacados de  $C$ , a saber, los extremos de las tremas, no llenan todo  $C$ ; de hecho sólo son una pequeña parte del mismo. En

el capítulo 19 comentaremos la importancia física de los otros puntos. ■

### *La verdadera naturaleza de los polvos de Cantor*

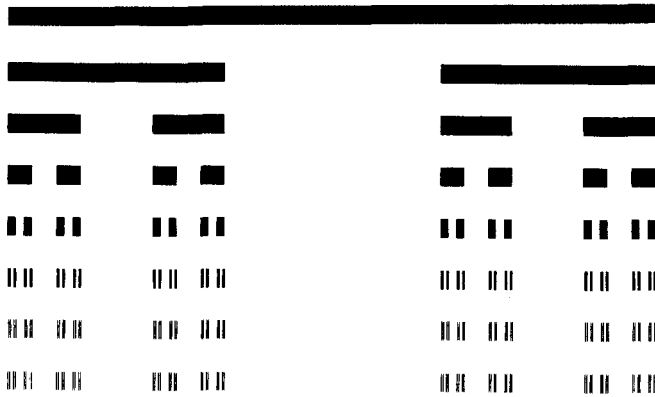
Al lector que haya llegado hasta aquí y/o haya oído el eco de la creciente literatura sobre las Escaleras del Diablo (pie de la lámina 121) le parecerá difícil creer que, cuando empecé con este tema en 1962, todo el mundo estaba de acuerdo en que los polvos de Cantor eran *por lo menos* tan monstruosos como las curvas de Koch y Peano.

Cualquier físico con amor propio «desconectaba» automáticamente con la simple mención de Cantor, fácilmente echaba a correr ante cualquiera que pretendiera que  $C$  tenía algún interés científico, y afirmaba vehementemente que tales pretensiones se habían presentado ya, habían sido sometidas a prueba y habían resultado defectuosas. Sólo recibí aliento de las sugerencias de S. Ulam, tentadoras a pesar de que ni fueron aceptadas ni progresaron, relativas al posible papel de los conjuntos de Cantor en el equilibrio gravitatorio de los agregados estelares (véase Ulam, 1974).

¡Para publicar algo sobre polvos de Cantor tuve que eliminar cualquier mención a Cantor!

Pero aquí hemos llegado a  $C$  por las propias peculiaridades de la naturaleza. En el capítulo 19 se describe un segundo significado físico de  $C$ , completamente distinto del presente. Lo cual debe significar que la verdadera naturaleza del polvo de Cantor es muy distinta.

Es innegable que en la mayoría de casos  $C$  es sólo un modelo muy tosco que precisa de muchas mejoras. Sostengo, no obstante, que son precisamente las mismas propiedades que hacen patológicos los discontinuos de Cantor las que son indispensables en un modelo de la intermitencia, y hay que conservarlas al buscar alternativas más realistas a  $C$ .



FIGS. 117 y 118. *Barra y pastel triádicos de Cantor*  
 (dimensión de la sección horizontal  $D = \log 2 / \log 3 = 0,6309$ ).  
*Anillos de Saturno. Cortinas de Cantor.*

El iniciador del polvo de Cantor es  $[0,1]$  y su generador es

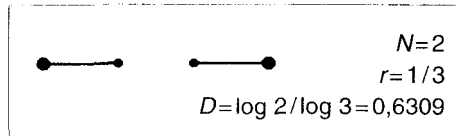
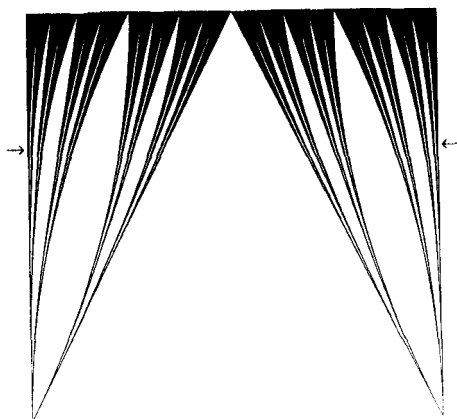
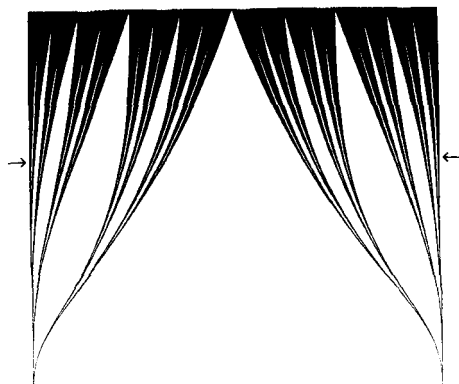


LÁMINA. 117. El polvo de Cantor es extraordinariamente difícil de ilustrar, pues, de tan fino y disperso, resulta invisible. Para ayudar a la intuición a hacerse una idea de su forma, lo hacemos más grueso hasta convertirlo en lo que se podría llamar una barra de Cantor.

■ En palabras técnicas, la figura representa el producto cartesiano de un polvo de Cantor de longitud 1 por un intervalo de longitud 0,03. ■

COAGULO. La construcción de la barra de Cantor es el resultado del proceso que llamo de coagulación. Empieza con una barra cilíndrica (cuya proyección es un rectángulo con anchura/longitud=0,03). Lo mejor es considerar que su densidad es muy baja. La materia del tercio central se «cuaja» en los dos tercios de ambos extremos, de manera que la posición de éstos no cambia. Luego, la materia del tercio central de cada tercio extremo coagula en sus tercios extremos, y así indefinidamente hasta que sólo queda una infinidad de lingotes infinitamente delgados con una densidad infinitamente grande. Estos lingotes se distribuyen sobre la recta de una manera muy concreta, inducida por el propio proceso generador. En esta ilustración, la coagulación se detiene cuando tanto la imprenta como nuestro ojo claudican; la última línea y la penúltima son indistinguibles: cada una de las partes últimas parece más un lingote gris que un par de lingotes negros y paralelos.



PASTEL DE CANTOR. Cuando la coagulación empieza con una torta, mucho menos gruesa que ancha, y la masa cuaja en tortitas más delgadas (rezumando un relleno apropiado), se obtiene un Napoleón infinitamente extrapolado, que podríamos llamar *pastel de Cantor*.

ANILLOS DE SATURNO. Al principio se pensaba que Saturno estaba rodeado por un solo anillo. Pero luego se descubrió un corte, después dos, y ahora el Voyager I ha identificado un número muy grande de cortes, la mayoría de ellos muy finos. El Voyager ha descubierto también que son diáfanos y dejan pasar la luz del Sol ... como corresponde a un conjunto que hemos calificado de «fino y disperso».

Así pues, la estructura de los anillos (véase Stone y Minen, 1981, y en especial la ilustración de la sobrecubierta) sugiere una colección de círculos pró-



ximos, cuyos radios corresponden a la distancia de un cierto origen a los puntos de un polvo de Cantor. □ La expresión técnica es «producto cartesiano de un polvo de Cantor por un círculo». En realidad, una imagen más realista sería quizá la dada por el producto cartesiano de un círculo por un polvo de medida positiva, como los que se estudian en el capítulo 15. ■ Inserción de última hora: Avron y Simon (1981), introducen independientemente la misma idea, relacionándola con la ecuación de Hill; su Nota 6 contiene muchas otras referencias interesantes.

ESPECTROS. Harter 1979-1981 describe algunos espectros de moléculas orgánicas cuyo parecido con un polvo de Cantor es asombroso.

LÁMINA 118. Aquí se aclara la forma del polvo de Cantor colocándolo entre otros polvos generalizados con  $N=2$  y  $r$  variable. La coordenada vertical corresponde a  $r$  (figura inferior), que varía entre 0 y  $1/2$ , o  $D$  (figura superior), que varía entre 0 y 1. La parte superior de ambas cortinas de teatro está rematada por el intervalo  $[0,1]$ . Los cortes horizontales son polvos de Cantor. Las flechas señalan el caso  $r=1/3$  y  $D=0,6309$ .

UNA FAMOSA PARADOJA GRIEGA. Los filósofos griegos creían que, para ser indefinidamente divisible, un cuerpo tenía que ser continuo. Sin duda no sabían de los polvos de Cantor.

FIG. 121. *Función de Cantor o escalera del diablo*  
(dimensión  $D=1$ , las abscisas de los ascendentes tienen dimensión  
 $D\sim 0,6309$ ). *Movimiento de Cantor.*

La función de Cantor describe la distribución de masa sobre la barra de Cantor de la lámina 117. Su gráfica es denominada *escalera del diablo* por muchos autores, pues es verdaderamente estrambótica. Tómense iguales a 1 la longitud y la masa de la barra, y para cada valor  $R$  de la abscisa defínase  $M(R)$  como la masa comprendida entre 0 y  $R$ . Como los huecos no tienen masa,  $M(R)$  permanece constante sobre un conjunto de intervalos que tienen una longitud total igual a la de la barra. No obstante, como el martilleo no afecta a la masa total de la barra,  $M(R)$  tiene que apañárselas para encontrar *alguna parte* en la que crecer desde (0,0) hasta (1,1). Los incrementos se producen en una infinidad de saltos infinitamente pequeños y muy agrupados, que corresponden a los lingotitos. Hille y Tamarkin (1929) describen con detalle las propiedades singulares de esta función.

APLICACIONES REGULARIZADORAS. La escalera del diablo lleva a cabo la proeza de aplicar la drástica falta de uniformidad de la barra de Cantor en algo uniforme y homogéneo. A partir de dos intervalos distintos, de la misma longitud sobre la escala vertical, la función inversa de la escalera de Cantor da dos conjuntos de lingotes que contienen la misma masa (aun cuando, normalmente, sus aspectos son muy distintos).

Como la ciencia se siente cómoda en la uniformidad, suele ocurrir que esas transformaciones regularizadoras hacen que la irregularidad fractal sea accesible al análisis.

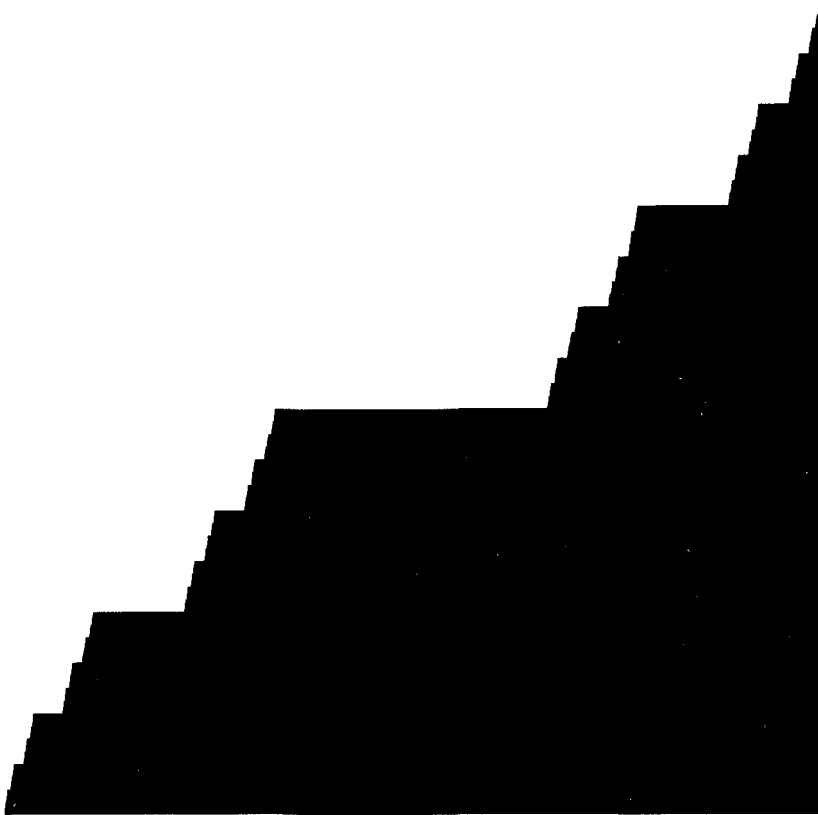
HOMOGENEIDAD FRACTAL. Por conveniencia, diremos que la distribución de masa de la barra de Cantor es *fractalmente homogénea*.

MOVIMIENTO DE CANTOR. Como en el caso de la curva de Koch, que hemos interpretado como un movimiento de Koch, o en el del movimiento de Peano, a veces es útil interpretar la ordenada  $M(R)$  como un tiempo. En tal caso, la función inversa  $R(M)$  da la posición de un *movimiento de Cantor* en el instante  $M$ . Tal movimiento es discontinuo. En los capítulos 31 y 32 se describen generalizaciones lineales y espaciales aleatorias del mismo.

DIMENSIÓN FRACTAL. La suma de las alturas de los escalones, así como la de sus longitudes, es 1, con lo que esta curva tiene una longitud bien definida e igual a 2. Una curva de longitud finita se dice que es rectificable, y su dimensión es  $D=1$ . Con este ejemplo se demuestra que la dimensión  $D=1$  es compatible con la existencia de una infinidad de irregularidades, siempre y cuando estén lo bastante dispersas.

□ Uno se sentiría tentado de decir que esta curva es un fractal, pero para ello habría que definir los *fractales* de forma menos rigurosa y en base a otros conceptos aparte de la  $D$ . ■

FUNCIONES SINGULARES. La escalera de Cantor es una función no decreciente, no constante y singular, en el sentido de que es continua pero *no* dife-



renciable. Su derivada es nula casi por doquier y su variación se produce en un conjunto de longitud —es decir, medida lineal— nula.

Cualquier función no decreciente se puede expresar como suma de una función singular, una función formada por saltos discretos, y una función diferenciable. Las dos últimas componentes son clásicas en matemáticas y su uso en física está muy extendido. Por el contrario, en física se considera que la componente singular es patológica y carece de aplicaciones prácticas. Una de las tesis centrales de este ensayo es que tal opinión carece de sentido.

ESCALERAS DEL DIABLO EN FÍSICA ESTADÍSTICA. La publicación de esta lámina en mi ensayo de 1977 atrajo la atención de los físicos sobre la escalera del diablo y estimuló una literatura bastante extensa. Cada vez es más frecuente encontrarse con diagramas semejantes a las «cortinas» de la lámina 118, o la cortina de Fatou de la lámina 265. Véase Aubry (1981). Importantes trabajos anteriores (Azbel, 1964, Hofstadter, 1976), aparentemente aislados, se comprenden conjuntamente a la luz de estos nuevos avances.



### III Galaxias y remolinos



En los capítulos 6 y 7 se introdujeron los fractales de Koch y de Peano mediante una imagen geomorfológica, pero las aplicaciones más importantes de los fractales han arraigado en otros dominios. Adentrándonos cada vez más en la corriente principal de la ciencia, este capítulo y los dos siguientes atacan dos problemas de excepcional antigüedad, importancia y dificultad.

La distribución de las estrellas, las galaxias, los cúmulos de galaxias, etc. fascina tanto al aficionado como al especialista, y sin embargo es algo que sigue estando al margen de la astronomía y la astrofísica en conjunto.

Ello se debe básicamente a que nadie ha explicado aún por qué la distribución de materia sigue una jerarquía irregular, por lo menos en una cierta gama de escalas. Y mientras en la mayoría de trabajos sobre el tema hay alusiones al arracimamiento, los trabajos teóricos serios se apresuran a esconderlo bajo la alfombra, afirmando que a partir de un cierto umbral, grande pero no especificado, las galaxias están uniformemente distribuidas.

Otra razón, aunque menos fundamental, de esta vacilación para tratar con lo irregular es la falta de útiles para describirlo matemáticamente. Se pide a la estadística que decida entre dos hipótesis, de las que sólo una ha sido completamente estudiada (la uniformidad asintótica). ¿Nos debe sorprender, pues, que los resultados no sean concluyentes?

No obstante, estas cuestiones se resisten a ser dejadas de lado. En mi opinión, paralelamente a los esfuerzos por explicar, es indispensable describir el arracimamiento e imitar la realidad con medios puramente geométricos. El tratamiento fractal de este tema, repartido en varios capítulos de este ensayo, se propone demostrar con modelos construidos explícitamente que la evidencia es compatible con un grado de agregación que se extiende mucho más allá de los límites sugeridos por los modelos existentes.

Este capítulo introductorio describe una teoría muy influyente de Hoyle sobre la formación de estrellas y galaxias, junto con el principal modelo descriptivo de su distribución, de Fournier d'Albe (conocido también como modelo de Charlier), y, sobre todo, presenta algunos datos empíricos. Se demuestra que tanto las teorías como los datos experimentales se pueden interpretar en términos de un polvo fractal escalante. Sosiego que en la distribución de estrellas y galaxias hay una zona de auto-semejanza en la que la dimensión fractal cumple  $0 < D < 3$ . Se esbozan las razones teóricas por las que cabría esperar que  $D = 1$ , planteándose la pregunta de por qué la  $D$  observada es aproximadamente  $\sim 1,23$ .

ANTICIPO. En el capítulo 22 se echa mano de los fractales para mejorar nuestra comprensión del significado del principio cosmológico, de cómo habría que modificarlo y de por qué dicha modificación hace necesaria la introducción del azar. La discusión de modelos mejorados de agregación se retrasa hasta los capítulos 22, 23 y del 32 al 35.

*¿Hay una densidad global de la materia?*

Empecemos por examinar el concepto de densidad global de la materia. Como en el caso de la longitud de una costa, las cosas parecen sencillas, pero lo cierto es que se complican con mucha facilidad, y de un modo sumamente interesante. Para definir y medir la densidad, se empieza con la masa  $M(R)$  contenida en una esfera de radio  $R$  con centro en la Tierra. Se evalúa la densidad aproximada

$$M(R) / [(4/3) \pi R^3].$$

Luego se hace que el valor de  $R$  tienda a infinito, y se define la densidad global como el límite al que converge la densidad aproximada.

Pero, ¿tiene que converger necesariamente dicha densidad aproximada a un límite positivo y finito? De ser así, la velocidad de convergencia deja mucho que desear. Además, las estimaciones de la densidad límite en el pasado presentaban un comportamiento muy singular. A medida que aumentaba la profundidad del universo accesible a los telescopios, la densidad aproximada disminuía de un modo sorprendentemente sistemático. Según De Vaucouleurs (1970), ha permanecido  $\propto R^{D-3}$ . El exponente  $D$  observado es mucho menor que 3, y la mejor estimación, en base a evidencias indirectas es  $D = 1,23$ .

La tesis de de Vaucouleurs es que el comportamiento de la densidad aproximada refleja la realidad, en el sentido de que  $M(R) \propto R^D$ . Esta fór-



mula nos recuerda el resultado clásico según el cual una bola de radio  $R$  en un espacio euclídeo de dimensión  $E$  tiene un volumen  $\propto R^E$ . En el capítulo 6 nos encontramos con la misma fórmula para la curva de Koch, con la diferencia importante de que el exponente no era la dimensión euclídea  $E=2$ , sino una dimensión fractal  $D$  no entera. Y en el capítulo 8 se obtiene  $M(R) \propto R^D$  para el polvo de Cantor en el eje temporal (para el cual  $E=1$ ).

Todos estos precedentes sugieren con gran fuerza que el exponente  $D$  de Vaucouleurs es una dimensión fractal.

### *¿Están las estrellas en el dominio escalante?*

Es evidente que el dominio escalante en el que  $0 < D < 3$  debe acabarse antes de llegar a objetos con límites bien definidos, como los planetas. Pero ¿incluye o no las estrellas? Según los datos de Webbink, presentados en Faber y Gallagher (1980), la masa de la Vía Láctea contenida en una esfera de radio  $R$  se puede representar perfectamente por  $M(R) \propto R^D$ , con la  $D$  extrapolada a partir de las galaxias. No obstante, continuaremos nuestra discusión exclusivamente en términos de galaxias.

### *¿Existe una cota superior del dominio escalante?*

La cuestión de hasta qué escalas alcanza el dominio en el que  $0 < D < 3$  es controvertida y es tema de actividad renovada. Muchos autores todavía afirman o suponen que el dominio escalante admite una cota superior que corresponde a los cúmulos de galaxias. Otros autores no comparten esta opinión. De Vaucouleurs (1970) afirma que «el arracimamiento de las galaxias, y presumiblemente de todas las formas de materia, es la característica dominante de la estructura del universo a cualquier escala observable, sin ningún indicio de una tendencia a la uniformidad; la densidad media de materia disminuye continuamente a medida que se consideran volúmenes cada vez mayores, y no hay base observacional alguna para la hipótesis de que esta tendencia no vaya a mantenerse para distancias mucho mayores y densidades más bajas».

El debate entre estas dos escuelas es interesante e importante para la cosmología (pero no para los objetivos de este ensayo). Aun en el caso de que el dominio en el que  $0 < D < 3$  esté acotado en ambos extremos, su importancia es suficiente para merecer un estudio cuidadoso.

En cualquier caso, el universo (al igual que la bola de hilo a que hacía-

mos referencia en el capítulo 3) parece presentar una sucesión de dimensiones efectivas distintas. Partiendo de una escala del orden del radio de la Tierra, se encuentra primero la dimensión 3 (correspondiente a cuerpos sólidos con contornos bien definidos). Luego la dimensión pasa a ser 0 (contemplándose la materia como una colección de puntos aislados). A continuación viene el dominio que nos interesa, en el que la dimensión toma un valor no trivial comprendido ente 0 y 3. Si la agregación escalante continúa indefinidamente, ocurrirá lo mismo con este valor de  $D$ . Si, por el contrario, hay una cota inferior a este fenómeno, hay que añadir un cuarto dominio en el que los puntos pierden su identidad y se tiene un fluido uniforme, con lo que la dimensión vuelve a ser 3.

Por otra parte, lo más ingenuo es imaginar que las galaxias están casi uniformemente distribuidas en el universo. En el caso de esta hipótesis insostenible, se tiene la sucesión  $D=3$ , luego  $D=0$  y finalmente  $D=3$  otra vez.

▣ La teoría general de la relatividad afirma que en ausencia de materia la geometría local del espacio tiende a ser plana y euclídea, mientras que la presencia de materia la convierte en localmente riemanniana. En nuestro caso podríamos hablar de un universo globalmente plano de dimensión 3 con una  $D<3$  local. Este tipo de perturbación es considerada en Selety (1924), un trabajo oscuro que no cita a Koch aunque contiene (pág. 312) un ejemplo de la construcción vista en el capítulo 6. ▣

### *El universo de Fournier*

Queda por construir un fractal que cumpla  $M(R) \propto R^D$  y ver cómo se ajusta a las imágenes aceptadas del Universo. El primer modelo completo de esta clase se debe a E. E. Fournier d'Albe (capítulo 40). Aunque Fournier (1907) es, con mucho, una obra de ficción disfrazada de ciencia, contiene también consideraciones auténticamente interesantes que comentaremos dentro de un momento. Conviene, no obstante, describir primero la estructura que propone.

Su construcción empieza con el octaedro regular centrado, cuya proyección se representa casi en el centro de la lámina 139. La proyección se reduce a los cuatro vértices de un cuadrado, cuya diagonal mide 12 «unidades» de longitud, y al centro de dicho cuadrado. El octaedro incluye también dos puntos, uno encima del plano y otro debajo, en la vertical del centro y a 6 unidades de distancia del mismo.

Ahora, cada vértice se sustituye por una bola de radio 1, que será considerada como un «agregado estelar de orden 0»; y la menor bola que

contiene las 7 bolas elementales constituirá lo que llamaremos un «agregado estelar de orden 1». Un agregado de orden 2 se obtiene aumentando un agregado de orden 1 en una razón  $1/r=7$  y sustituyendo cada una de las bolas resultantes, de radio 7, por una réplica del agregado de orden 1. Del mismo modo, un agregado de orden 3 se obtiene aumentando un agregado de orden 2 en una razón  $1/r=7$  y sustituyendo cada bola por una réplica del agregado de orden 1. Y así sucesivamente.

En resumen, entre dos órdenes de agregación consecutivos, el número de puntos y el radio aumentan en una razón  $1/r=7$ . Por tanto, cualquiera que sea el radio  $R$  de un agregado, la función  $M_0(R)$  que da el número de puntos contenido en una bola de radio  $R$  es  $M_0(R)=R$ . Para valores intermedios de  $R$ ,  $M_0(R)$  es menor (llegando a disminuir hasta  $R/7$ ), pero la tendencia global es  $M_0(R)\propto R$ .

Partiendo de los agregados de orden 0, se puede también, procediendo por pasos sucesivos, interpolar agregados de órdenes  $-1$ ,  $-2$ , etc. El primer estadio sustituye cada agregado de orden 0 por una imagen reducida del agregado de orden 1, con una razón de proporcionalidad de  $1/7$ , y así sucesivamente. Procediendo así, la validez de la relación  $M_0(R)\propto R$  se extiende a valores de  $R$  cada vez menores. Y después de continuar indefinidamente la extrapolación y la interpolación, se obtiene un conjunto autosemejante con  $D=\log 7/\log 7=1$ .

Podemos apreciar de paso que un objeto con  $D=1$  en el espacio tridimensional no tiene por qué ser una recta ni una curva rectificable. Ni tan sólo tiene por qué ser conexo. Cualquier  $D$  es compatible con cualquier valor menor o igual de la dimensión topológica. En el caso particular del doblemente infinito universo de Fournier, como se trata de un «polvo» totalmente inconexo, la dimensión topológica es 0.

### *La distribución de masa; homogeneidad fractal*

El paso de la geometría a la distribución de masa es obvio. Si se asigna una unidad de masa a cada agregado estelar de orden 0, la masa  $M(R)$  interior a una bola de radio  $R>1$  es idéntica a  $M_0(R)$  y por tanto  $\propto R$ . Además, la producción de agregados de orden  $-1$  a partir de los agregados de orden 0 equivale a romper una bola que se consideraba uniforme y ver que está formada por otras 7 bolas menores. Este proceso generaliza la regla  $M(R)\propto R$  para  $R<1$ .

Si se contempla la construcción en el espacio tridimensional, la distribución de masa resultante es marcadamente heterogénea, pero contemplada en el fractal de Fournier es tan homogénea como puede serlo. (Re-

cuérdese la lámina 117.) En concreto, dos porciones geoméricamente idénticas cualesquiera del universo de Fournier tienen la misma masa. Propongo la denominación *fractalmente homogénea* para las distribuciones de masa de este tipo.

□ La anterior definición se ha presentado en términos de fractales escalantes, pero el concepto de homogeneidad fractal es más general. Se puede aplicar a cualquier fractal que tenga medida de Hausdorff de dimensión  $D$  positiva y finita. La homogeneidad fractal significa que la masa contenida en una parte del conjunto es proporcional a su medida de Hausdorff. ■

### *El Universo de Fournier como polvo de Cantor. Generalización a $D=1$*

Confío en que el hecho de haber empleado superficialmente una terminología fractal en los párrafos iniciales de este capítulo no haya confundido al lector. Resulta claro que, sin ser consciente de ello, Fournier andaba siguiendo un camino paralelo al de su contemporáneo Cantor. La diferencia principal estriba en que la construcción de Fournier se hace en el espacio en vez de la recta. Para mejorar el parecido, basta con cambiar la forma esférica de los agregados de Fournier por la forma cúbica (o de ladrillo). Así, cada agregado de orden 0 es un ladrillo de lado 1, que contiene 7 agregados de lado  $1/7$ ; uno de éstos tiene el mismo centro que el cubo inicial y los seis restantes están en contacto con los cuadraditos centrales de las caras del cubo original.

Veremos más adelante cómo Fournier llega al valor  $D=1$  a partir de fenómenos físicos elementales, y también como llega Hoyle a este mismo valor. No obstante, desde el punto de vista geométrico,  $D=1$  es un caso especial, aun conservando la estructura octaédrica global y el valor  $N=7$ .

Como las bolas no se solapan,  $1/r$  puede tomar cualquier valor entre 3 e infinito, obteniéndose  $M(R) \propto R^D$ , donde  $D = \log 7 / \log(1/r)$  toma cualquier valor entre 0 y  $\log 7 / \log 3 = 1,7712$ .

Además, dado cualquier  $D < 3$ , es fácil cambiar  $N$  para construir una variante del modelo de Fournier con esa dimensión.

### *El modelo de Charlier y otros universos fractales*

Las construcciones anteriores presentan uno de los defectos imputables a los primeros modelos fractales. El más notable es que, al igual que

el modelo de la curva de Koch del capítulo 6 y el del polvo de Cantor del capítulo 8, el modelo de Fournier es regular hasta lo grotesco. Para corregir esto, Charlier (1908, 1922) sugirió que hay que dejar que  $N$  y  $r$  varíen de un nivel de jerarquía a otro, tomando valores  $N_m$  y  $r_m$ .

La eminencia científica de Charlier era tal que, a pesar de prodigarse en elogios a Fournier escribiendo en los idiomas científicos dominantes de su época, incluso el modelo simple acabó siendo atribuido a su famoso divulgador y no a su desconocido autor. Fue muy discutido en su tiempo, en particular por Selety (1922, 1923a, 1923b, 1924). Además, el modelo llamó la atención de Emile Borel, cuyos comentarios en Borel (1922), aunque secos, fueron perceptivos. Pero desde entonces, aparte de algunos resurgimientos caprichosos, el modelo cayó en el olvido (por razones no muy convincentes apuntadas en North, 1965, págs. 20-22 y 408-409). Sin embargo, se resiste a morir. La idea fundamental ha sido reinventada independientemente varias veces desde entonces, de las que es de destacar Levy (1930). (Véase la entrada LEVY del capítulo 40.) Y lo que es más importante, el concepto fractal central del universo de Fournier está presente implícitamente en las consideraciones sobre turbulencia y galaxias de Weizsacker (1950) (véase el capítulo 10) y en el modelo de Hoyle (1953) de la génesis de las galaxias, que discutiremos en breve.

El ingrediente fractal básico también se encuentra en mis modelos de los capítulos 32 al 35.

Bajo esta luz, se plantea la cuestión de si un modelo de distribución de galaxias puede dejar de ser un fractal con uno o dos cortes. En mi opinión, no. Si se está de acuerdo en que dicha distribución debe ser escalante (por razones que elaboraremos en el capítulo 11) y que el conjunto en el que se concentra no es un conjunto escalante trivial, tiene que tratarse de un conjunto fractal.

Admitida la importancia del carácter escalante, la generalización no escalante del modelo de Fournier está mal inspirada. No obstante, deja que  $\log N_m / \log (1/r_m)$  varíe con  $m$  entre dos cotas,  $D_{\min} > 0$  y  $D_{\max} < 3$ . Esto plantea otra cuestión: la dimensión efectiva no tiene por qué tomar un solo valor, puede oscilar entre dos valores límite. Volveremos sobre ello en el capítulo 15.

### *Las razones de Fournier para esperar $D=1$*

Presentamos ahora los argumentos que llevaron a Fournier (1907, pág. 103) a la conclusión de que  $D$  debe ser igual a 1. Este argumento es una razón poderosa para no olvidar a su autor.

Considérese un agregado de galaxias de orden arbitrario, masa  $M$  y radio  $R$ . Usando sin temor una fórmula aplicable a objetos con simetría esférica, supongamos que el potencial gravitatorio en la superficie es  $GM/R$  (siendo  $G$  la constante gravitatoria). Una estrella cayendo sobre este universo entra en él con una velocidad  $V=(2GM/R)^{1/2}$ .

Parafraseando a Fournier, se puede sacar una conclusión importante del hecho de que, según los datos observados, ninguna estrella tiene una velocidad superior a 1/300 de la velocidad de la luz. Resulta, pues, que la masa comprendida en una esfera universal aumenta en proporción al radio y no al volumen. En otras palabras, que la densidad en una esfera universal varía en razón inversa a su superficie... O más claro aún, el potencial en la superficie sería siempre el mismo, por ser directamente proporcional a la masa e inversamente proporcional a la distancia. A consecuencia de ello, no habría estrellas con velocidades próximas a la de la luz en ninguna parte del universo.

### *Coagulación de Hoyle; el criterio de Jeans da también $D=1$*

También aparece una distribución jerárquica en una teoría presentada por Hoyle (1953). Según dicha teoría, las galaxias y estrellas se forman por un proceso en cascada a partir de un gas uniforme.

Considérese una nube de gas de masa  $M_0$  y a temperatura  $T$ , distribuido uniformemente en el interior de una esfera de radio  $R_0$ . Como demostró Jeans, se alcanza una situación crítica cuando  $M_0/R_0 = JkRT/G$ . (Aquí  $k$  es la constante de Boltzmann y  $J$  un coeficiente numérico). En este punto crítico, la nube gaseosa primordial es inestable y se contrae inevitablemente.

Hoyle postula (a) que  $M_0/R_0$  alcanza este valor crítico en algún instante inicial, (b) que la contracción resultante se detiene cuando el volumen de la nube gaseosa se reduce a 1/25 de su valor inicial y (c) que la nube se fragmenta entonces en cinco nubes iguales, de masa  $M_1 = M_0/5$  y radio  $R_1 = R_0/5$ . Con ello el proceso acaba igual que empezó: en una situación inestable que va seguida de un segundo estadio de contracción y subdivisión, luego un tercero, y así sucesivamente. Finalmente, el proceso de coagulación se detiene cuando las nubes se hacen tan opacas que el calor desprendido por el colapso del gas no puede ya escapar.

Como en otros campos en los que se da un proceso en cascada similar, propongo llamar grumos a las cinco nubes y coagulación al proceso en cascada global. Como ya dije al introducir este último término, no podía resistirme a usarla junto con el adjetivo galáctico.

Fournier toma  $N=7$  para facilitar la ilustración gráfica, pero según Hoyle  $N=5$  tiene un fundamento físico. También a diferencia de Fournier, que detalla su ilustración gráfica más allá de lo razonable y necesario, Hoyle es poco explícito en lo que concierne a la distribución espacial de los grumos. La realización explícita del modelo habrá de esperar a que en el capítulo 33 describamos la coagulación aleatoria. Pero estas discrepancias no tienen gran importancia, y lo principal es que  $r=1/N$ , con lo que  $D=1$  es una parte crucial del mecanismo si la coagulación tiene que acabar como empezó, en la inestabilidad de Jeans.

Además, si se toma igual a 1 la duración del primer estadio, la dinámica de gases muestra que la duración del  $m$ -ésimo estadio es  $5-m$ . En consecuencia, el mismo proceso puede repetirse indefinidamente con una duración total de 1,2500.

### *Equivalencia de las deducciones de $D=1$ por Fournier y Hoyle*

En el borde de una nube inestable de gas que satisfaga el criterio de Jeans, la velocidad y la temperatura están relacionadas por  $V_2/2 = JkT$ , pues  $GM/R$  es igual a  $V_2/2$  (Fournier) y a  $JkT$  (Jeans). Recuérdese ahora que, en termodinámica estadística, la temperatura de un gas es proporcional a la velocidad cuadrática media de sus moléculas. Por tanto, la combinación de los criterios de Jeans y Fournier sugiere que en el borde de una nube la velocidad de caída de un objeto macroscópico es proporcional a la velocidad media de sus moléculas. Un análisis cuidadoso del papel de la temperatura en el criterio de Jeans debe mostrar forzosamente que ambos criterios son equivalentes. ■ Lo más probable es que la analogía sea válida también para la relación  $M(R) \propto R$  en el interior de las galaxias, presentada en Wallenquist (1957). ■

*¿Por qué  $D=1,23$  y no  $D=1$ ?*

El desacuerdo entre el valor empírico  $D=1,23$  y la  $D=1$  teórica de Fournier y Hoyle plantea un problema importante. P.J.E. Peebles lo afrontó en 1974 mediante la teoría de la relatividad. Peebles (1980) presenta un tratamiento a fondo de la física y la estadística del tema (aunque no de su geometría).

## *La dimensión fractal del cielo*

El cielo es una proyección del universo en el que cada punto, descrito primero por sus coordenadas esféricas  $\rho$ ,  $\theta$  y  $\phi$ , es proyectado sobre el punto de coordenadas esféricas  $l$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ . Si el universo es un fractal de dimensión  $D$ , y el origen de coordenadas pertenece al universo (véase el capítulo 22), la estructura de la proyección obedece «por lo general» la regla siguiente:  $D > 2$  implica que la proyección cubre una porción no nula del cielo, y  $D < 2$  implica que la propia proyección tiene también dimensión  $D$ . Como se muestra en las láminas 139 y 140 con un ejemplo, esto admite excepciones, asociadas a la estructura del fractal y/o a la elección del origen. Hay que entenderlo como «verdadero con probabilidad 1».

### *Aparte acerca del efecto del cielo en llamas (mal llamado paradoja de Olbers)*

La sección anterior se ha referido directamente a las motivaciones que llevaron a diversos autores (Fournier incluido) a variantes de un universo fractal. Se dieron cuenta de que esos universos «exorcizaban» geoméricamente el efecto del cielo en llamas, también conocido (aunque equivocadamente) como paradoja de Olbers. Si se supone que la distribución de los cuerpos celestes es uniforme, esto es, que  $D = 3$  a todas las escalas, el cielo estaría iluminado casi uniformemente, día y noche, con un brillo semejante al del disco solar.

Esta paradoja ya no tiene interés para los físicos, pues la teoría de la relatividad, la teoría de la expansión del universo y otros argumentos la han resuelto. Pero su ocaso nos legó un subproducto peculiar: numerosos críticos invocan su explicación preferida del efecto del cielo en llamas como excusa para no tener en cuenta el arracimamiento, e incluso como un argumento para negar la realidad del mismo. Se trata de un punto de vista verdaderamente singular: aunque no haga falta que las galaxias estén arracimadas para evitar el efecto del cielo en llamas, lo están, y este hecho merece un estudio cuidadoso. Además, como veremos en el capítulo 32, la expansión del universo es compatible con la homogeneidad fractal, y no sólo con la homogeneidad estándar.

El argumento del cielo en llamas es la simplicidad misma. Si la luz emitida por una estrella es proporcional a su superficie, la cantidad de luz recibida por un observador a una distancia  $R$  es  $\propto 1/R^2$ . Pero la superficie aparente de la estrella es también  $\propto 1/R^2$ , con lo que la razón apa-



rente entre la luz recibida y el ángulo sólido es independiente de  $R$ . Además, si la distribución de estrellas en el universo es uniforme, casi en cualquier dirección del cielo nos encontramos, tarde o temprano, con una estrella. Por lo tanto, el brillo del cielo es uniforme y parece en llamas. (El disco lunar sería un dominio excepcionalmente oscuro, por lo menos en ausencia de difusión atmosférica.)

Por otra parte, la hipótesis de que el universo es fractal con  $D < 2$  resuelve la paradoja. En tal caso la proyección del universo sobre el cielo es un fractal con la misma  $D$  y, por tanto, un conjunto de área nula. Aun tomando las estrellas con radio distinto de cero, una gran parte de las direcciones del cielo se pueden prolongar hasta el infinito sin encontrar ninguna estrella. En estas direcciones el cielo nocturno es negro. Cuando el dominio en el que  $D < 3$  es sucedido por una escala mayor en la que  $D = 3$ , el fondo celeste no es estrictamente negro, sino que tiene una iluminación sumamente débil.

El efecto del cielo en llamas fue apuntado por Kepler poco después de que el *mensajero sideral* de Galileo se hubiera pronunciado favorablemente sobre la idea de que el universo no tiene límites. En su *Conversación con el mensajero sideral* de 1610, Kepler replicaba: «Afirmáis sin titubeos que hay más de 10.000 estrellas visibles... Si es así y si (las estrellas son de) la misma naturaleza que nuestro Sol, ¿cómo es que estos soles no superan en brillo, por su acción colectiva, al nuestro?... ¿Acaso el éter intermedio los oscurece? Ni muchísimo menos. Está absolutamente claro que... este mundo nuestro no forma parte de un enjambre indiferenciable e innumerable de otros mundos» (Rosen, 1965, págs. 34-35).

Esta conclusión siguió siendo controvertida, pero el argumento no fue olvidado, como lo prueba el comentario de Samuel Halley, en 1720, según el cual: «Otro argumento que he oído es que si el número de las estrellas fijas fuera más que finito, toda la superficie de su esfera aparente sería luminosa». Posteriormente fue discutida también por De Chéseaux y J. H. Lambert, pero acabó siendo atribuida a Olbers, gran amigo de Gauss. Así pues, la denominación «paradoja de Olbers» es escandalosa pero sintomática. Las observaciones que habían sido realizadas y enviadas al «residuo sin clasificar» (página 28) acaban a menudo siendo atribuidas a la primera figura oficial que la decora con un envoltorio clasificable, por transitorio que sea éste. Se pueden encontrar discusiones históricas sobre el tema en Gamow (1954), Munitz (1957), North (1965), Dickson (1968), Wilson (1965), Jaki (1969), Clayton (1975) y Harrison (1981).

### *Aparte sobre la gravitación newtoniana*

El reverendo Bentley no dejó de importunar a Newton con una observación fuertemente emparentada con el efecto del cielo en llamas: si la distribución de las estrellas es homogénea, la fuerza que ejercen sobre una de ellas es infinita. Se podría añadir que su potencial gravitatorio es infinito, y que cualquier distribución en la que  $M(R) \propto R^D$  para valores grandes de  $R$  da también un potencial infinito, a menos que  $D < 1$ . La teoría moderna del potencial (teoría de Frostman) confirma que hay una conexión privilegiada entre la gravitación newtoniana y el valor  $D = 1$ . Las deducciones de  $D = 1$  por Fournier y Hoyle deben tener algo que ver con esta conexión. La idea de Fournier de que «el potencial gravitatorio en la superficie será siempre el mismo» tiene un papel central en la moderna teoría del potencial.

### *Aparte sobre la teoría de la relatividad*

▮ Parafraseando a de Vaucouleurs (1970): «La teoría de la relatividad nos ha llevado a pensar que, para ser observable ópticamente, ninguna bola de material estacionario puede tener un radio  $R$  menor que el límite de Schwarzschild  $R_M = 2GM/c^2$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz. En una representación gráfica de la densidad media  $\rho$  y el radio característico de varios sistemas cosmológicos,  $\rho_M = 3c^2/8\pi GR_M^2$  define una cota superior. El cociente  $\rho/\rho_M$  podría llamarse factor de llenado de Schwarzschild. Para los objetos y sistemas astronómicos más corrientes (como las estrellas y las galaxias, respectivamente) el factor de llenado es muy pequeño, del orden de  $10^{-4}$  o  $10^{-6}$ ». El cuadrado de la razón de velocidades postulado por Fournier es  $(300)^{-2} \sim 10^{-5}$ , valor que cae precisamente en la parte central de dicho dominio. ▮

### *¿Un universo fractal aglutinado?*

Muchos autores piensan que se puede explicar la génesis de las estrellas y otros objetos celestes mediante una cascada *ascendente* (esto es, la aglutinación de partículas de polvo muy dispersas para formar pedazos cada vez mayores) más que mediante una cascada *descendente* al modo propuesto por Hoyle (esto es, la fragmentación de masas muy grandes y difusas en pedazos más y más pequeños).

Se plantea una alternativa análoga relativa a las cascadas en el estudio

de la turbulencia (capítulo 10). La cascada de Richardson desciende hacia remolinos cada vez más pequeños, aunque también tienen cabida las cascadas descendentes (véase la entrada «Richardson» en el capítulo 40). Es, pues, de esperar que las interrelaciones entre las cascadas ascendentes y las descendentes se aclaren pronto.

### *Hileras telescópicas fractales*

Para terminar esta discusión, nada más apropiado que un comentario acerca de los útiles empleados en la observación de las galaxias. Dyson (1977) sugiere que podría ser ventajoso sustituir los telescopios de una sola pieza por una hilera de telescopios pequeños, siendo el diámetro de cada uno del orden de 0,1 m, igual al tamaño de la menor perturbación atmosférica ópticamente significativa. Sus centros formarían una figura fractalmente jerárquica y estarían conectados mediante interferómetros de Currie. Un análisis aproximado nos lleva a la conclusión de que un valor conveniente de la dimensión sería  $2/3$ . Y la conclusión de Dyson: «Una hilera de 3 kilómetros de 1024 telescopios de diez centímetros conectados por 1023 interferómetros no es, hoy en día una proposición práctica. [Se ofrece] como ideal teórico, con el fin de mostrar lo que en principio se podría hacer».

### *Repaso de los modelos fractales aleatorios de los cúmulos de galaxias*

Si se acepta la afirmación de que ciertos modelos fractales no intencionados, con una sutilidad y versatilidad limitadas, proporcionan una descripción útil de la distribución de galaxias, el hecho de que los modelos fractales aleatorios diseñados adrede nos proporcionen una descripción mejor no debe constituir ninguna sorpresa. Para empezar, nuestra comprensión de la coagulación de Hoyle mejora cuando se la sitúa en el contexto adecuado: los fractales aleatorios (capítulo 23). Más importantes aún son, en mi opinión, los modelos aleatorios que desarrollé yo mismo, y que presento en los capítulos 32 a 35. Una razón para explicarme en varios modelos es que una mejor calidad de la descripción «se paga» con una mayor complicación. Otra razón es que en cada modelo interviene un polvo fractal que merece una cierta atención. Repasemos aquí dichos modelos, saltándonos el orden lógico.

Hacia 1965, mi ambición era implementar la relación  $M(R) \propto R^D$  con  $D < 3$  dentro de un modelo en el que no hubiera «centro del universo». La primera vez que lo conseguí fue con el modelo de paseo aleatorio descrito

en el capítulo 32. Luego, y como alternativa, desarrollé un modelo por tremas, que consiste en arrancar del espacio un conjunto de tremas de radio aleatorio, hasta una cota superior  $L$ , finito o infinito, y *dispuestas al azar*.

Como ambos modelos habían sido escogidos sólo por su simplicidad formal, fue una sorpresa agradable descubrir su valor predictivo. Mis funciones de correlación teóricas (Mandelbrot, 1975u) concuerdan con las ajustadas a los datos de Peebles (1980) (véanse las págs. 243-249). ¶ Concretando más, mis dos enfoques del problema concuerdan con la correlación a dos puntos, mi paseo aleatorio da una buena correlación a tres puntos y una mala correlación a cuatro puntos, y mi modelo por tremas esféricas es muy bueno para todas las correlaciones conocidas. ▀

Desafortunadamente, el aspecto de las muestras generadas con uno u otro modelo es muy poco realista. Empleando un término que inventé con este mismo objeto y que describo en el capítulo 35, dichas muestras presentan unas propiedades de lagunaridad inaceptables. En el caso del modelo por tremas este defecto se corrige introduciendo formas de tremas más complicadas. En el modelo del paseo aleatorio, uso un «subordinador» menos lagunar.

Así pues, el estudio de los cúmulos de galaxias ha estimulado muchísimo el desarrollo de la geometría fractal. Y en la actualidad las aplicaciones de esta última al estudio de los cúmulos de galaxias van mucho más allá de las tareas de coordinación y limpieza llevados a cabo en el presente capítulo.

### *Los diamantes tallados parecen estrellas*

Y la distribución de los diamantes en bruto en la corteza terrestre se parece a la distribución de estrellas y galaxias en el cielo. Consideremos un gran mapa mundi en el que cada mina de diamantes o cada lugar rico en diamantes —actual o del pasado— esté señalado por un alfiler. Mirada desde lejos, la densidad de alfileres es extraordinariamente desigual. Unos pocos aislados por acá y allá, pero la mayoría concentrados en unas pocas zonas benditas (o malditas). Sin embargo, la superficie de la Tierra en dichas zonas no está uniformemente cubierta de diamantes. Si se examina más de cerca, cualquiera de esas zonas resulta estar también vacía en su mayor parte, con unas subzonas dispersas de mayor concentración de diamantes. Y el proceso se repite a lo largo de varios órdenes de magnitud.

¿No resulta irresistible introducir la coagulación en este contexto? En efecto, de Wijs ha propuesto un modelo fractal no intencionado, como ya veremos al hablar de los «Fractales no lagunares» en el capítulo 39.

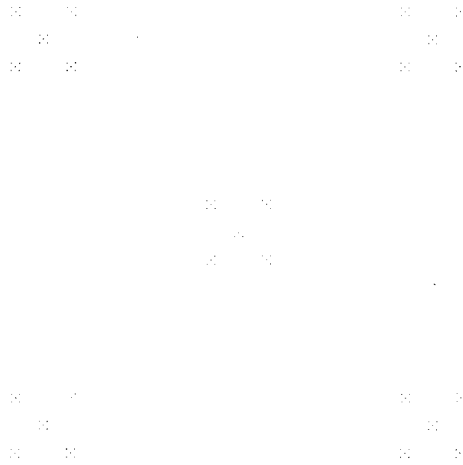


FIG. 139. *Proyección del multiuniverso de Fournier*  
(dimensión  $D \sim 0,8270$ )

Esta lámina es una representación a escala de la proyección y de la sección «ecuatorial» de un universo con  $D=1$  descrito en el texto. Véase también la lámina 140.

Parafraseando el título de Fournier (1907): «Un multiuniverso construido según un principio cruciforme u octaédrico no es el plan del mundo, pero sirve para mostrar que puede existir una serie infinita de universos sucesivos semejantes sin dar lugar a un “cielo en llamas”. *La materia contenida en cada esfera universal es proporcional al radio.* Esta es la condición requerida para que se cumplan las leyes de la gravitación y de la radiación. En algunas direcciones el cielo aparece totalmente negro, aunque haya una sucesión infinita de universos. La “proporción del mundo” es en este caso  $N=7$  en vez del  $10^{22}$  que correspondería a la realidad».

En el sentido que se describe en el capítulo 34, un universo con  $D=1$  y  $N=10^{22}$  tiene una lagunaridad muy baja, pero es extraordinariamente estratificado.

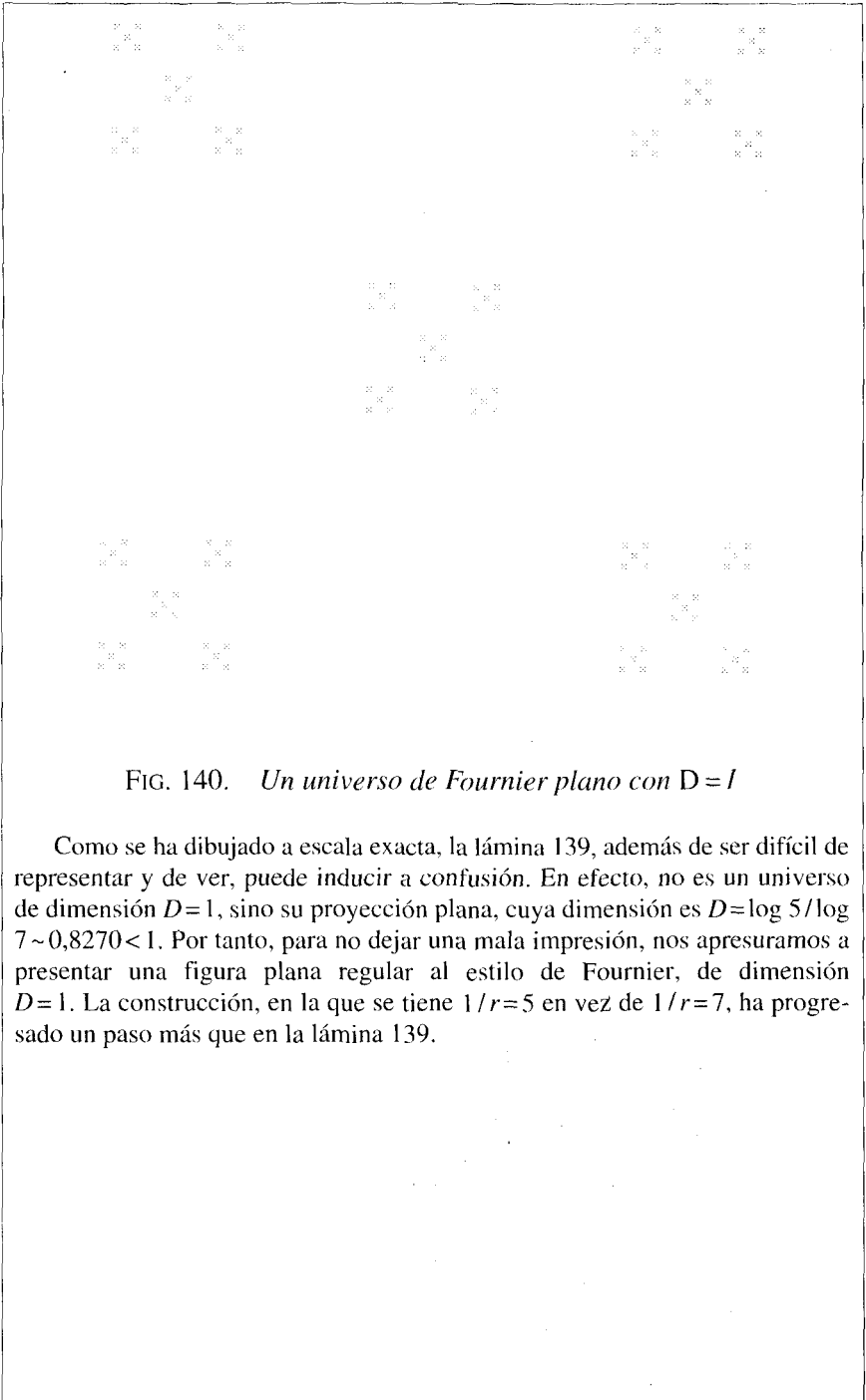


FIG. 140. *Un universo de Fournier plano con  $D=1$*

Como se ha dibujado a escala exacta, la lámina 139, además de ser difícil de representar y de ver, puede inducir a confusión. En efecto, no es un universo de dimensión  $D=1$ , sino su proyección plana, cuya dimensión es  $D=\log 5/\log 7 \sim 0,8270 < 1$ . Por tanto, para no dejar una mala impresión, nos apresuramos a presentar una figura plana regular al estilo de Fournier, de dimensión  $D=1$ . La construcción, en la que se tiene  $1/r=5$  en vez de  $1/r=7$ , ha progresado un paso más que en la lámina 139.

El estudio de la turbulencia es uno de los capítulos más antiguos, duros y frustrantes de la física. La experiencia común basta para mostrar que, bajo determinadas circunstancias, el flujo de un gas o un líquido es suave (o «laminar», usando un lenguaje más técnico) mientras que en otras circunstancias dista mucho de serlo. Pero ¿dónde habría que trazar la línea divisoria? ¿Hay que calificar de «turbulentas» todas las corrientes no suaves, incluyendo buena parte de las que se dan en meteorología y oceanografía? ¿O por el contrario es mejor reservar el término para una clase restringida y, en tal caso, cuál? Parece ser que cada especialista da una respuesta distinta a esta pregunta.

Esta falta de acuerdo no nos importará aquí, pues nos concentraremos en flujos cuyo carácter turbulento es incuestionable, y cuya característica más llamativa es la ausencia de una escala de longitud bien definida: en todas ellas coexisten «remolinos» de todos los tamaños. Este rasgo ya se puede apreciar en los dibujos de Leonardo y Hokusai, y demuestra que la turbulencia es algo necesariamente ajeno al espíritu de la física «antigua», que se concentró en fenómenos con escalas de longitud bien definidas. Sin embargo, esta misma razón es la que hace que el estudio de la turbulencia tenga un interés directo para nosotros.

Como ya sabrán algunos lectores, prácticamente todas las investigaciones sobre la turbulencia se centran en el estudio *analítico* de la corriente del fluido y dejan de lado la *geometría*. Prefiero pensar que esta descompensación no significa una falta de importancia real. De hecho, muchas figuras geométricas que tienen que ver con la turbulencia son fácilmente visibles y claman por una descripción propia. Pero no pudieron recibir la atención que merecían hasta el advenimiento de la geometría fractal. En efecto, como supe inmediatamente, la turbulencia presenta muchas facetas fractales, y en este capítulo y otros posteriores describiré unas cuantas de ellas.

Habrà que renunciar a dos cosas. En primer lugar, pasaremos por alto el problema de la aparición de la turbulencia en un flujo laminar. Hay poderosas razones para pensar que dicha aparición tiene aspectos fractales

muy importantes, pero no están lo bastante claros como para comentarlos aquí. En segundo lugar, no nos ocuparemos tampoco de estructuras periódicas como las celdas de Bénard y las calles de Kármán.

Este capítulo empieza con una serie de alegatos en favor de un enfoque más geométrico de la turbulencia y del uso de los fractales. El número de estos alegatos es grande, si bien cada uno de ellos es breve, pues se basan en sugerencias con pocos resultados firmes por el momento.

A continuación nos concentramos en el problema de la intermitencia, en el que he trabajado activamente. Mi conclusión más importante es que el dominio de disipación, esto es, el conjunto espacial en el que se concentra la disipación turbulenta, admite un modelo fractal. Medidas realizadas con otros fines sugieren que la  $D$  en este dominio cae entre 2,5 y 2,6, pero probablemente por debajo de 2,66.

Por desgracia, el modelo no se puede concretar con precisión hasta que no se determinen las propiedades topológicas del dominio de disipación. ¿Se trata de un polvo, de una curva ondulada y ramificada (tubo de torbellinos), o de una superficie ondulada y estratificada (hoja de torbellinos)? La primera conjetura es improbable, mientras que las otras dos sugieren modelos parecidos a los fractales ramificados del capítulo 14. Pero no estamos en condiciones de decidir. Los avances en el nuevo frente fractal no sirven para nada en el viejo frente topológico. Nuestro conocimiento de la geometría de la turbulencia sigue en mantillas.

El grueso de este capítulo no precisa de ningún conocimiento previo de la materia. Sin embargo, el especialista observará que una parte del análisis fractal de la turbulencia es la contrapartida geométrica del estudio analítico de correlaciones y espectros. La relación entre turbulencia y teoría de la probabilidad es algo que viene de antiguo. En efecto, después de las investigaciones de Perrin sobre el movimiento browniano, los primeros trabajos de G. I. Taylor fueron la segunda gran influencia sobre Norbert Wiener en su teoría matemática de los procesos estocásticos. Desde entonces, el análisis espectral ha «devuelto» con creces (con intereses acumulados) lo que había tomado prestado del estudio de la turbulencia, y ahora es tiempo de que la teoría de la turbulencia saque provecho de los progresos de una sofisticada geometría estocástica. En particular, el espectro de Kolmogorov tiene un homólogo geométrico que examinaremos en el capítulo 30. ■

*Nubes, estelas, chorros, etc.*

Un problema genérico de la geometría de la turbulencia se refiere a la forma de la frontera del dominio donde se encuentra determinada carac-



terística del fluido. Tenemos ejemplos sorprendentes de ello en las volutas sobre volutas que uno encuentra en las nubes comunes (de agua), así como en las nubes de las erupciones volcánicas y en los hongos de las explosiones nucleares. En este punto, resulta realmente difícil escapar a la impresión de que, en la medida en que hay un dominio de escalas según el cual una nube tiene unos límites bien definidos, los contornos de las nubes *tienen que* ser superficies fractales. La misma observación se puede aplicar a las figuras de los chubascos en las pantallas de radar. (Véase el capítulo 12 para una primera confirmación de esta sospecha.)

Pero prefiero tratar con figuras más sencillas. La turbulencia puede estar confinada en una parte de un flujo por lo demás laminar, una estela o un chorro, por ejemplo. En el grado de aproximación más bajo, la forma es la de una barra. Sin embargo, si examinamos el contorno con más detalle, aparece una jerarquía de muescas, cuya profundidad aumenta con el valor de la medida clásica de la escala hidrodinámica conocida como número de Reynolds. Esta estructura «local» compleja y palpable no evoca tanto una barra como una cuerda con muchos hilos que vagamente cuelgan de ella y flotan a su alrededor. Su sección transversal típica no es circular, sino más parecida a una curva de Koch, y más parecida aún a la más accidentada de las costas con islas estudiadas en los capítulos 5 y 28. En todo caso, el contorno de un chorro tiene una apariencia fractal. Si hay torbellinos su topología es de interés, pero no agotan toda la estructura.

Para el comentario siguiente hace falta que el lector se haga una imagen mental de una estela, la bella forma del aceite que se derrama de un buque cisterna siniestrado. La «barra» que describe tal estela en la peor de las aproximaciones tiene muchísima estructura: no es cilíndrica, pues su sección transversal se ensancha rápidamente al alejarse del barco, y su «eje» no es rectilíneo, sino que presenta meandros cuyo tamaño típico aumenta también con la distancia al buque.

Aparecen rasgos parecidos en la turbulencia debida a la cizalladura entre dos masas de fluido que se frotan, como se demuestra en Browand (1966) y Borwn y Roshko (1974). Los estructuras coherentes que resultan («animales») atraen hoy la atención general. Los fractales no tienen que ver con su forma global, pero creo que también es claro que la jerarquía de finos rasgos que «viajan» en los meandros es sorprendentemente fractal en su estructura.

La famosa mancha roja de Júpiter podría ser también un ejemplo de esta clase.

Se plantean problemas afines, aunque distintos, al estudiar la Co-

riente del Golfo. No se trata de una corriente marina única y bien definida, sino que se divide en una multitud de ramas ondulantes que, a su vez, se subdividen y ramifican. Sería útil disponer de una especificación global de esta tendencia a ramificarse que, sin duda, implicará fractales.

### *Isotermas, dispersión, etc.*

Análogamente, es interesante estudiar la forma de las superficies de temperatura constante o las isosuperficies de cualquier otra característica escalar del fluido. Se pueden trazar isotermas sobre la superficie que rodea un plancton que vive y se reproduce sólo en aguas con una temperatura  $T > 45^\circ$  y llena todo el volumen disponible. El contorno de tal burujo presenta un sinnúmero de convoluciones y, en el modelo concreto del capítulo 30, se puede demostrar que es un fractal.

Cuando un medio está completamente ocupado por la turbulencia, pero algunas partes están marcadas por una característica «pasiva» o inerte que no afecta al flujo, se plantean una serie de problemas geométricos bastante generales. El mejor ejemplo lo tenemos en la dispersión turbulenta de una gota de tinta. En todas las direcciones, y de manera incesante, emerge toda clase de ramas, pero ni los análisis existentes ni la geometría estándar sirven de gran cosa para la descripción de las figuras resultantes. En la lámina 83 y en Mandelbrot (1976c) se dan razones por las que dichas figuras deben ser fractales.

### *Otras cuestiones geométricas*

TURBULENCIA DEL AIRE TRANSPARENTE. He examinado algunas pruebas dispersas que sugieren que el conjunto soporte de este fenómeno es un fractal.

FLUJO ALREDEDOR DE UNA FRONTERA FRACTAL. Este es otro caso típico donde la mecánica de fluidos está condenada a emplear los fractales (láminas 73 y 102).

ALARGAMIENTO DE LOS VÓRTICES. El movimiento del fluido hace que los vórtices se alarguen. En este proceso, cada vórtice tiene que plegarse para poder acomodar una longitud cada vez mayor en un volumen fijo. En la medida que el flujo es escalante, mi conjetura es que el vórtice tiende a un fractal.

LA TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA DE FLUIDO. En una aproximación bastante burda, inspirada en el modelo ptolemaico del movimiento plane-

tario, supongamos que nuestra partícula es transportada verticalmente hacia arriba por una corriente global de velocidad unidad, mientras es perturbada por una jerarquía de remolinos, cada uno de los cuales es un movimiento circular en un plano horizontal. Las funciones resultantes  $x(t) - x(0)$  y  $y(t) - y(0)$  son sumas de funciones seno y coseno. Si la contribución de las frecuencias altas es pequeña, la trayectoria es continua y diferenciable, y por tanto es rectificable, con  $D = 1$ . Pero si la contribución de las frecuencias altas es importante, la trayectoria es un fractal, con  $D > 1$ . Suponiendo que los remolinos sean autosemejantes, dicha trayectoria resulta ser idéntica a un famoso contraejemplo del análisis: la función de Weierstrass (capítulos 2, 39 y 41). Esto le hace a uno preguntarse si la transición de la totalidad del fluido a la turbulencia se puede asociar a las circunstancias bajo las que la trayectoria es un fractal.

### *La intermitencia de la turbulencia*

Debido a la viscosidad del fluido, a la larga la turbulencia acaba por disiparse, pues la energía del movimiento visible acaba por convertirse en calor. Las teorías más primitivas suponen que la disipación es espacialmente uniforme. Pero la esperanza de que la «turbulencia homogénea» fuera un modelo razonable fue descartada por Landau y Lifshitz (1953-1959), quienes observan que, mientras algunas regiones presentan una disipación muy alta, otras parecen carecer de ella casi por completo. Esto significa que la propiedad tan conocida del viento, que parece ir a ráfagas, se refleja también —de un modo más consistente— a escalas más pequeñas.

Este fenómeno, *la intermitencia*, fue estudiado por primera vez en Batchelor y Townsend (1949, pág. 253; véase también Batchelor, 1953, sección 8.3, y Monin y Yaglom, 1963, 1971, 1975). La intermitencia es particularmente manifiesta cuando el número de Reynolds es muy grande, en el sentido de que el corte superior es grande en comparación con el corte inferior, como en las estrellas, los océanos y la atmósfera.

Diremos que las regiones en las que se concentra la disipación *la transportan o soportan*.

El hecho de que en este ensayo se traten juntas la intermitencia de la turbulencia y la distribución de las galaxias es algo natural y no es en absoluto nuevo. Hace algún tiempo, los físicos (von Weizsacker, 1950) trataron de explicar la génesis de las galaxias por medio de la turbulencia. Aceptando que la turbulencia homogénea no puede explicar la intermitencia estelar, von Weizsacker esbozó algunas correcciones que estaban

en el espíritu del modelo de Fournier («Charlier») del capítulo 9, y por tanto en el de la teoría que se presenta aquí. Si se reanudaran los esfuerzos unificadores de von Weizsacker, se podría establecer un nexo físico entre dos tipos de intermitencia y los correspondientes fractales autosemejantes.

Uno de los objetivos de dicho efecto unificador sería relacionar la dimensión de la distribución de galaxias (que, como ya sabemos, es  $D \sim 1,23$ ) con las dimensiones que aparecen en la turbulencia, que como apuntábamos caen entre 2,5 y 2,7.

### *Una definición de turbulencia*

Observamos anteriormente que, por raro que parezca, se aplica la misma expresión, *turbulencia*, a varios fenómenos distintos. Esta continua falta de definición se comprende fácilmente si, como pretendo y me propongo demostrar, para una definición correcta hacen falta los fractales.

La imagen mental habitual de la turbulencia está prácticamente «congelada» en los términos planteados por primera vez, hace ahora unos cien años, por Reynolds para una corriente de fluido en un tubo: cuando la presión aguas arriba es débil, el movimiento es regular y «laminar»; si la presión se aumenta lo suficiente, de repente todo se vuelve irregular. En este caso prototípico, el soporte de la disipación turbulenta es o bien «vacío», inexistente, o bien todo el tubo. En cualquier caso, además de no haber ninguna geometría que estudiar, tampoco hay razones imperativas para definir la turbulencia.

En las estelas las cosas son más complicadas. Hay una frontera entre la zona turbulenta y el mar circundante, y habría que estudiar su geometría. Sin embargo, esta frontera es tan clara que un criterio «objetivo» para definir la turbulencia tampoco es realmente necesario.

En la turbulencia plenamente desarrollada que se da en un túnel de viento las cosas también son simples, pues la turbulencia se manifiesta en el todo, como en el tubo de Reynolds. Sin embargo, los procedimientos empleados a veces para conseguir este objetivo son curiosos, si hay que dar crédito a ciertas versiones mantenidas con bastante tenacidad. Se sabe que, cuando se pone en marcha un túnel de viento, éste no sirve para el estudio de la turbulencia. Lejos de llenar por completo el volumen que se le ofrece, la propia turbulencia parece «turbulenta» y se presenta en ráfagas irregulares. Sólo después de esfuerzos graduales se consigue estabilizarla al estilo del tubo de Reynolds. Por esta razón, me cuento entre

los que se preguntan hasta qué punto la «turbulencia de laboratorio» no intermitente de los túneles de viento se puede considerar el mismo fenómeno físico que la «turbulencia natural», intermitente, que se da en la atmósfera. De ahí que sea necesario definir los términos.

Abordaremos esta tarea por un camino indirecto, partiendo de un concepto mal definido de qué es turbulento, y examinando los registros unidimensionales de la velocidad en un punto. Los movimientos del centro de gravedad de un aeroplano grande ilustran un primer análisis aproximado de dichos registros. De vez en cuando el aeroplano sufre una sacudida, y esto prueba que ciertas regiones de la atmósfera son fuertemente disipativas. Un aeroplano más pequeño es una sonda más sensible: «siente» las ráfagas turbulentas que no perturbaban al aeroplano mayor, y recibe cada choque de los que afectaban a este último como una ráfaga de choques más débiles. Así, cuando se examina con detalle un sector fuertemente disipativo de la sección eficaz, aparecen intervalos de comportamiento laminar. Y si se afina más el análisis, aparecen nuevos intervalos laminares más cortos.

A cada estadio se necesita una redefinición de qué es turbulento. La idea de un *minuto de registro turbulento* adquiere sentido cuando se interpreta como un «minuto de registro que no está totalmente libre de turbulencias». Por otra parte, el concepto más fuerte de un *minuto de registro densamente turbulento* parece carecer de significado observable. Procediendo por estadios sucesivos, la turbulencia se concentra cada vez más en una parte cada vez menor de la duración total del registro. El volumen del soporte de la disipación parece decrecer, y nuestra próxima tarea consistirá en modelizar este soporte.

### *El papel de los fractales autosemejantes*

Como ya se ha dicho, no me sorprende que muy pocos aspectos geométricos de la turbulencia se hayan investigado efectivamente, pues las únicas técnicas de las que se disponía eran las euclídeas. Para escapar de estas limitaciones se han usado muchas expresiones preeuclídeas. Por ejemplo, los artículos sobre la intermitencia hacen un uso insistente de expresiones poco corrientes tales como *manchado* y *lleno de grumos*. Batchelor y Townsend (1949) prevén «sólo cuatro tipos de figuras posibles: gotas, barras, tablas y cintas». Algunos conferenciantes (aunque pocos escritores) también emplean las expresiones *judías*, *espagueti* y *lechugas*, como parte de una terminología imaginativa que no trata de ocultar la pobreza de la geometría subyacente.

Por contra, las investigaciones que he llevado a cabo desde 1964, y que presenté por primera vez en el Kyoto Symposium de 1966 (Mandelbrot, 1967k), ampliaron la caja de herramientas de la geometría clásica con los fractales autosemejantes.

Propugnar el uso de fractales es un avance radical, pero restringir los fractales de la turbulencia a la categoría autosemejante es ortodoxo, pues el propio concepto de autosemejanza se elaboró en principio para describir la turbulencia. El pionero fue Lewis Fry Richardson, del que ya hablamos en el capítulo 5. Richardson (1926) introdujo el concepto de jerarquía de remolinos enlazados por una cascada. (Véase el capítulo 40.)

Fue también en el contexto de la teoría de la turbulencia donde la teoría de las cascadas y la autosemejanza alcanzó sus éxitos de predicción entre los años 1941 y 1948. Las principales contribuciones se deben a Kolmogorov, Obukhov, Onsager y von Weizsacker, aunque la tradición asocia los progresos de esta época al nombre de Kolmogorov. Sin embargo, se produjo un cambio sutil entre Richardson y Kolmogorov.

Mientras la autosemejanza viene sugerida por los remolinos visualmente perceptibles, la teoría de Kolmogorov es puramente *analítica*. Los fractales, por otra parte, permiten aplicar la técnica de la autosemejanza a la *geometría* de la turbulencia.

El enfoque fractal debería contrastarse con el hecho peculiar de que las gotas, barras, tablas y cintas de la cuádruple elección de teorías anteriores no consiguen ser autosemejantes. Esta podría ser la razón por la cual Kuo y Corrsin (1972) admiten que dicha elección es «primitiva» y que harían falta estructuras *intermedias*.

Vienen entonces a la mente una serie de posibles modificaciones ad hoc de las estructuras estándar. Así, por ejemplo, las barras se podrían dividir en cuerdas rodeadas de hebras sueltas (recuérdese una situación similar con las estelas y los chorros) y cortar las tablas en láminas rodeadas de capas también sueltas. De algún modo esas hebras y esas capas se podrían hacer autosemejantes.

Sin embargo, una tal inyección ad hoc de la autosemejanza no se ha intentado nunca, y la encuentro a la vez poco prometedor y desagradable. Prefiero seguir un rumbo completamente diferente, y dejar que las formas globales y los detalles de hebra y capa sean generados por el mismo proceso. Como los fractales autosemejantes básicos carecen de direcciones privilegiadas, nuestro estudio deja de lado (por el momento) todas las cuestiones geométricas interesantes que combinan la turbulencia con el movimiento global.

□ Obukhov (1962) y Kolmogorov (1962) son los primeros estudios analíticos de la intermitencia. Por lo que respecta a influencias inmediatas, casi enlazan con los artículos de 1941 de los mismos autores, pero tienen defectos importantes, por lo que su influencia a la larga se augura pequeña. (Véase Mandelbrot, 1972j, 1974f, 19760i y Kraichnan, 1974.) ■

### *Cortes superior e inferior*

Debido a la viscosidad, el corte inferior de la turbulencia es positivo. Y además, las estelas, chorros y otros flujos análogos presentan claramente un corte superior  $n$  finito. De todas formas, la corriente aceptación general de la finitud de  $n$  tendría que someterse a crítica. Richardson (1926) afirma que «la observación demuestra que los valores numéricos [que se suponen convergentes para muestras de tamaños cercanos a  $\Omega$ ] dependerían totalmente de durante cuánto tiempo se incluyó un volumen en el promedio. Los trabajos de Defant muestran que para la atmósfera no hay ningún límite». Los meteorólogos han descartado primero, y olvidado después, esta afirmación, y en mi opinión lo han hecho demasiado a la ligera. Los nuevos datos del capítulo II y el estudio de la lagunaridad del capítulo 34 refuerzan mi convicción de que el tema sigue abierto.

### *La coagulación y la turbulencia fractalmente homogénea*

En un estadio preliminar aproximado, podemos representar el soporte de la turbulencia por medio de uno de los fractales autosemejantes obtenidos en los capítulos anteriores por un proceso de coagulación. Este consistiría en una variante «desaleatorizada» del modelo de Novikov y Stewart del capítulo 23. Al cabo de un número finito  $m$  de estadios de una cascada de coagulación, la disipación se distribuye uniformemente sobre  $N=r^{-mD}$  subremolinos escogidos de entre  $r^{3m}$  subremolinos no solapantes de  $m$ -ésimo orden, cuyas posiciones vendrían especificadas por el generador. Después de continuar la cascada indefinidamente, la distribución límite de la disipación se extiende uniformemente sobre un fractal de dimensión  $D < 3$ . Propongo el nombre de turbulencia *fractalmente* homogénea para dicho límite.

La turbulencia homogénea de G. I. Taylor se obtiene en el límite  $D \rightarrow 3$ . El hecho notable es que la coagulación no excluye  $D = 3$ , pero permite la nueva posibilidad de que  $D < 3$ .

### *Evidencia experimental directa de que la intermitencia satisface $D > 2$*

Desde el punto de vista de las secciones lineales, muchas clases de fractales no acotados presentan un comportamiento muy simple: la sección es casi con toda seguridad vacía cuando  $D < 2$  y tiene una probabilidad no nula de ser no vacía para  $D > 2$ . (En el capítulo 23 se demuestra este resultado para un tipo simple de fractales.)

Si el conjunto soporte de la disipación turbulenta cumpliera que  $D < 2$ , el enunciado anterior implicaría que casi todas las sondas experimentales deberían escapar por entre las regiones turbulentas. El hecho de que no sea así sugiere que en realidad  $D > 2$ . Esta deducción es extraordinariamente fuerte, pues descansa en un experimento que se repite constantemente y cuyos posibles resultados se reducen a una alternativa entre «nunca» y «a menudo».

Una contrapartida topológica provisional es  $D_T > 2$ . (Mandelbrot, 1976o); esta posibilidad es tentadora, pero demasiado especial para detallarla aquí.

### *Las galaxias y la turbulencia comparadas*

La desigualdad  $D > 2$  para el conjunto soporte de la disipación turbulenta y la desigualdad contraria  $D < 2$  para la distribución de masa en el cosmos (capítulo 9) emanan de los efectos del signo de  $D - 2$  para la sección típica de un fractal y para su proyección típica en un plano o en el cielo. Para el fenómeno que se estudia en el presente capítulo, la sección debe ser no vacía. En el capítulo 9, por el contrario, el efecto del «cielo en llamas» se «exorciza» si la mayoría de rectas trazadas desde la Tierra *nunca* se encuentran con una estrella. Para ello hace falta que la proyección de las estrellas en el cielo tenga un área nula.

El contraste entre los signos de  $D - 2$  en estos dos problemas debe tener una relación vital con una diferencia de estructura.

### *(Des)igualdades entre exponentes (Mandelbrot, 1967k, 1976o)*

Muchas características útiles de la turbulencia fractalmente homogénea dependen únicamente de  $D$ . Este tema se estudia en Mandelbrot (1976o), donde la turbulencia intermitente se caracteriza por una serie de exponentes conceptualmente distintos relacionados por (des)igualdades. □ La situación recuerda los fenómenos que se dan en un punto crítico. ■



(DES)IGUALDADES ESPECTRALES. La primera (des)igualdad que se plantea en Mandelbrot 1967k (donde se usa la notación  $\theta = D - 2$ ), se expresa normalmente en función del espectro de la velocidad turbulenta, aunque aquí la presentamos en función de la varianza. En la turbulencia fractalmente homogénea, la velocidad de un punto cumple que

$$\langle [v(x) - v(x+r)]_2^2 \rangle = |r|^{2/3+B},$$

donde  $B = (3 - D)/3$ .

En la turbulencia homogénea de Taylor,  $D = 3$ , y  $B$  se anula, quedando el exponente clásico de Kolmogorov,  $2/3$ , que nos volveremos a encontrar en el capítulo 30.

Mandelbrot (1976o) también demuestra que el modelo más general de coagulación ponderada, descrito en Mandelbrot (1974f), implica la desigualdad  $B \leq (3 - D)/3$ .

EL MODELO  $\beta$ . Frisch, Nelkin y Sulem (1978) injertan un vocabulario pseudodinámico en la geometría de la turbulencia fractalmente homogénea descrita en Mandelbrot (1976o). La interpretación ha demostrado su utilidad, pero sus razonamientos matemáticos y sus conclusiones son idénticos a los míos. El nombre «modelo  $\beta$ » que se ha dado a su interpretación se usa bastante y se identifica a menudo con la homogeneidad fractal.

### *La topología de la turbulencia sigue siendo un tema abierto*

Los capítulos anteriores insistieron abundantemente en que el mismo valor de  $D$  se puede encontrar en conjuntos que son distintos en cuanto a su conexión topológica. La dimensión topológica  $D_T$  nos da una cota inferior para la dimensión fractal  $D$ , pero frecuentemente esta cota es superada por un margen tan amplio que no sirve prácticamente para nada. Una figura de dimensión fractal  $D$  comprendida entre 2 y 3 tanto puede ser «hojaldrada», «hilachuda» o «polvorosa», y puede presentar una tal variedad de configuraciones que resulte difícil acuñar o encontrar nombres para todas ellas. Por ejemplo, incluso en figuras fractales que en su mayor parte tienen forma de cuerda, las «hebras» pueden ser tan tupidas que el resultado sea realmente «algo más» que cordadas. Análogamente, las fractales próximas a las hojas son «algo más» que hojaldradas. Además, se pueden mezclar rasgos de las cuerdas y las hojas a gusto del consumidor. Intuitivamente se podría haber esperado que hubiera una relación más íntima entre la dimensión fractal y el grado de conexión, pero

los matemáticos perdieron esta esperanza entre 1875 y 1925. En el capítulo 23 trataremos un problema especial de esta clase, pero se puede decir que la verdadera relación entre estas estructuras es en esencia un terreno virgen aún.

La cuestión de la ramificación, planteada en el capítulo 14, es también de vital importancia, pero su impacto en el estudio de la turbulencia está también por explorar.

DESIGUALDADES DE CURTOSIS. Corrsin (1962), Tennekes (1968) y Saffman (1968) usan una medida de la intermitencia llamada curtosis para abordar el tema de la conexión. Sus modelos tratan claramente con figuras que tienen la dimensión topológica del plano (hojas) o de la recta (barras). Sin embargo, la topología es determinada indirectamente, mediante el exponente de una ley exponencial predicha entre la curtosis y un número de Reynolds. Desgraciadamente, este intento falla porque el exponente de curtosis está de hecho dominado por distintas suposiciones adicionales, y finalmente sólo depende de la dimensión fractal  $D$  de la figura generada por el modelo. Corrsin (1962) predice un valor de  $D$  igual a la dimensión topológica que postula,  $D_f=2$ . La predicción es incorrecta, debido a que, aunque los datos tengan que ver con fractales, el modelo no. Por otra parte, Tennekes (1968) postula  $D_f \approx 1$ , pero obtiene el valor fraccionario  $D=2,6$ , que implica por tanto un fractal aproximado. Sin embargo, la deducción que se pretendía de una combinación de «forma» intuitiva y dimensión topológica a partir de la medida de curtosis, no queda asegurada.

Este capítulo se ocupa de una primera relación entre la geometría fractal de la naturaleza y la corriente principal de la física matemática. El tema es tan importante que merece capítulo aparte. Los lectores que no estén interesados en él pueden saltárselo.

### *Un defecto de la teoría de la turbulencia*

Uno de los grandes defectos de la investigación teórica actual sobre la turbulencia es que se divide en por lo menos dos partes inconexas. En una de ellas tenemos la fructífera fenomenología (que examinamos con mayor detalle en el capítulo 30) propuesta por Kolmogorov (1941). Y en la otra están las ecuaciones diferenciales de la hidrodinámica: las de Euler para fluidos no viscosos y las de Navier (y Stokes) para fluidos viscosos. La relación entre ambas está por establecer todavía. Si «explicado» y «comprendido» significa «reducido a ecuaciones fundamentales», la teoría de Kolmogorov no está ni explicada ni comprendida. Tampoco ha contribuido Kolmogorov a resolver las ecuaciones del movimiento de los fluidos.

Pudiera parecer a primera vista que lo que he dicho en el capítulo 10 (que la disipación turbulenta no es algo homogéneo en todo el espacio, sino sólo sobre un subconjunto fractal) ensancha aún más la brecha. *Pero yo sostenía que esto no era así.* Y la evidencia a mi favor es cada vez mayor.

### *La importancia de las singularidades*

Repasemos ahora los procedimientos que nos permiten resolver con éxito las ecuaciones de la física matemática. Normalmente se empieza por hacer una lista de soluciones obtenidas resolviendo la ecuación en circunstancias especiales y soluciones adivinadas basándose en la observación física. A continuación, y prescindiendo de los detalles de las solu-

ciones, se hace una lista de las «singularidades» elementales características del problema. A partir de ahí, se pueden resolver en primera aproximación otros casos más complejos de la misma ecuación identificando las singularidades pertinentes y enlazándolas convenientemente. Así es también como un estudiante de cálculo infinitesimal se las arregla para trazar la gráfica de una función racional. En este caso las singularidades son conjuntos euclídeos comunes: puntos, curvas y superficies.

*Conjetura: las singularidades del movimiento de un fluido son conjuntos fractales (Mandelbrot, 1976c).*

Con esto en mente, interpreto que las dificultades que se encuentran al estudiar la turbulencia a partir de las soluciones de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes implican que una singularidad no común es la responsable de lo que percibimos intuitivamente como características típicas de la turbulencia.

Sostengo (Mandelbrot, 1976c) que las soluciones turbulentas de las ecuaciones fundamentales presentan singularidades o «cuasisingularidades» de una clase completamente nueva. Dichas singularidades son conjuntos fractales localmente escalantes, y las cuasisingularidades son aproximaciones a los mismos.

Esta opinión es, de entrada, legítima por cuanto, al haber fallado los conjuntos euclídeos comunes, uno puede probar con los conjuntos mejor conocidos de un grado de dificultad inmediatamente superior. Pero se pueden dar justificaciones más concretas.

*Fluidos no viscosos (Euler)*

PRIMERA CONJETURA CONCRETA. Parte de mi afirmación es que las singularidades de las soluciones de las ecuaciones de Euler son conjuntos fractales.

JUSTIFICACIÓN. Mi convicción se basa en la antigua idea de que las simetrías y otras invariancias presentes en una ecuación «deberían» manifestarse en sus soluciones. (Para una descripción elocuente, cuidada y autocontentida, véase el capítulo IV de Birkhoff, 1960.) Por supuesto que la conservación de la simetría no es, ni mucho menos, un principio general de la naturaleza, y por ello no se puede descartar aquí la posibilidad de una «rotura de simetría». Sin embargo, mi propuesta es intentar ver cuáles serían las consecuencias de la conservación de la simetría. Como las

ecuaciones de Euler son invariantes por cambio de escala, también deberían serlo sus soluciones típicas, y lo mismo debería ser cierto para las singularidades de dichas soluciones. Y si el fracaso de los intentos anteriores se toma como prueba de que las singularidades no son puntos, líneas ni superficies comunes, dichas singularidades deben ser fractales.

Podría ocurrir, naturalmente, que la forma y tamaño del contorno, así como la velocidad inicial, impusieran una escala. Sin embargo, es probable que el comportamiento local de la solución sea gobernado por un «principio de insensibilidad al contorno». Por tanto, localmente las soluciones tienen que carecer de escalas.

LA OBRA DE ALEXANDER CHORIN. Chorin (1981) da un sólido apoyo a mi opinión, aplicando un método del vórtice al análisis del dominio inercial en la turbulencia plenamente desarrollada. Su conclusión es que la vorticidad sumamente extendida se acumula en un dominio de volumen decreciente y dimensión  $D \sim 2,5$ , compatible con las conclusiones del capítulo 10. La corrección de los exponentes de Kolmogorov,  $B = 1,7 \pm 0,03$ , es compatible con los datos experimentales. Los cálculos sugieren que las soluciones a las ecuaciones de Euler en tres dimensiones surgen en un tiempo finito.

En trabajos no publicados, Chorin se aproxima aún más a los resultados experimentales:  $2,5 < D < 2,6$ .

### *Fluidos viscosos (Navier-Stokes)*

SEGUNDA CONJETURA ESPECÍFICA. También afirmé que las singularidades de las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes sólo podían ser fractales.

DESIGUALDADES DIMENSIONALES. Tenemos también la sensación intuitiva de que las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes tienen que ser más regulares, y por ello menos singulares, que las de la ecuación de Euler. Por tanto, la nueva conjetura es que en el caso de Euler la dimensión es mayor que en el caso de Navier Stokes. La transición a viscosidad nula es, sin duda, singular.

CUASI SINGULARIDADES. Una última conjetura en la puesta en práctica de mi concepción global del problema se refiere a los máximos de disipación implicados en la idea de intermitencia: son singularidades de Euler regularizadas por efecto de la viscosidad.

LA OBRA DE V. SCHEFFER. El examen de mis conjeturas sobre el caso viscoso fue promovido por V. Scheffer, al que recientemente se han unido otros, estudiando bajo esta luz un fluido finito o infinito, sometido a la ecuación de Navier-Stokes y con una energía cinética finita en  $t = 0$ .

En el supuesto de que haya efectivamente singularidades, Scheffer (1976) demuestra que cumplen necesariamente los siguientes teoremas. Primero, la dimensión fractal de su proyección sobre el eje de tiempos es menor o igual que  $1/2$ . Segundo, su proyección sobre las coordenadas espaciales es como máximo un fractal de dimensión 1.

Al final ha resultado que el primero de estos resultados es un corolario de una observación de un antiguo y famoso artículo de Leray (1934), que termina de repente con una desigualdad formal cuyo corolario es el primer teorema de Scheffer. De hecho, no es más que una reformulación. Pero ¿es justo decir «no es más que»? Rara vez se considera (y por fundadas razones) que reformular un resultado en una terminología más elegante sea un progreso científico, pero pienso que este caso es distinto. La desigualdad del teorema de Leray fue prácticamente inútil hasta que el corolario de Mandelbrot-Scheffer la situó en la perspectiva adecuada.

Los antecedentes de todas las aplicaciones casi rutinarias de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch a los estudios recientes de la ecuación de Navier-Stokes se remontan a mi conjetura.

### *Singularidades de otras ecuaciones no lineales de la física*

Hay otros fenómenos que, según sostiene este ensayo, también implican fractales escalantes, y que no tienen nada que ver ni con la ecuación de Euler, ni con la de Navier-Stokes. La distribución de galaxias, por ejemplo, es regida por las ecuaciones de la gravitación. Sin embargo, el argumento de la conservación de la simetría vale para todas las ecuaciones escalantes. De hecho, ahora se puede interpretar (¡con una perspectiva total!) una oscura observación de Laplace (véase la entrada «la invariancia por cambio de escala en Leibniz y Laplace», capítulo 41) como si apuntara el tema del capítulo 9.

En general, el carácter fractal de las singularidades se remonta probablemente a rasgos genéricos compartidos por muchas ecuaciones distintas de la física matemática. ¿Puede haber una clase muy amplia de no linealidad? Retomaremos el tema, en otros términos, en el capítulo 20.

## IV Fractales escalantes





Los capítulos 12 y 13 extienden las propiedades de la dimensión fractal a numerosos casos menores de importancia variable y dificultad creciente. El capítulo 14 demuestra que la geometría fractal necesita de conceptos que van más allá de la simple dimensión fractal.

El presente capítulo describe, y aplica a ciertos casos concretos, los equivalentes fractales (desarrollados por mí) de ciertos resultados comunes de la geometría euclídea. Se pueden considerar análogos a las relaciones fractales de la forma  $M(R) \propto R^D$  obtenidos en los capítulos 6, 8 y 9.

### *Análisis dimensional estándar*

Del hecho de que la longitud de la circunferencia de radio  $R$  valga  $2\pi R$  y que el área del círculo correspondiente sea  $\pi R^2$ , se sigue que

$$(\text{longitud}) = 2\pi^{1/2}(\text{área})^{1/2}.$$

Para los cuadrados, la relación correspondiente es

$$(\text{longitud}) = 4(\text{área})^{1/2}$$

Y, en general, en cada familia de figuras planas corrientes, geométricamente semejantes y de tamaños distintos, la razón  $(\text{longitud})/(\text{área})^{1/2}$  es una constante determinada por la forma común de todas ellas.

En el espacio ( $E=3$ ), la longitud, el  $(\text{área})^{1/2}$  y el  $(\text{volumen})^{1/3}$  dan evaluaciones alternativas del tamaño lineal de la figura, y la razón entre dos cualesquiera de ellas es un parámetro de forma, independiente de las unidades de medida.

La equivalencia de distintas medidas del tamaño lineal es útil en mu-

chas aplicaciones. Y su generalización a sus magnitudes tiempo y masa es la base de una técnica muy potente que los físicos conocen como «análisis dimensional». (Una exposición recomendable de sus características fundamentales se encuentra en Birkhoff, 1960.)

### *Resultados dimensionales paradójicos*

No obstante, esta equivalencia entre distintos tamaños lineales resulta insidiosamente escurridiza en un número de casos cada vez mayor. Por ejemplo, para el cerebro de los mamíferos se tiene

$$(\text{volumen})^{1/3} \propto (\text{área})^{1/D},$$

con  $D \sim 3$ , muy superior al valor 2 que se presumía. En el caso de las cuencas de drenaje fluvial, Hack (1957) mide la longitud a lo largo del río principal y encuentra

$$(\text{área})^{1/2} \propto (\text{longitud})^{1/D},$$

con  $D$  definitivamente superior al valor previsto 1. Los autores primitivos interpretaban que este resultado implicaba que las cuencas fluviales no eran autosemejantes, siendo más alargadas las mayores y más rechonchas las menores. Por desgracia esta interpretación contradice la evidencia.

En este capítulo describo mi explicación de estos y otros resultados de un modo más convincente. Mi instrumento de trabajo será una nueva relación, fractal, entre la longitud, el área y el volumen.

### *Relación fractal longitud-área*

Para precisar más el argumento, consideremos un conjunto de islas geoméricamente semejantes con costas fractales de dimensión  $D > 1$ . En este contexto, la razón estándar  $(\text{longitud})/(\text{área})^{1/2}$  es infinita, pero yo propongo que tiene un equivalente fractal útil. Llamaremos  $G$ -longitud a la longitud de la costa obtenida con una regla de longitud  $G$ , y  $G$ -área a la superficie de la isla medida en unidades de  $G^2$ . Sabiendo que la dependencia de la  $G$ -longitud respecto a  $G$  es no estándar, pero que la de la  $G$ -área sí lo es, definimos la razón generalizada

$$(G\text{-longitud})^{1/D}/(G\text{-área})^{1/2}.$$

Lo que yo digo es que esta razón vale lo mismo para todas nuestras islas geoméricamente semejantes.

En consecuencia hay dos maneras distintas de evaluar el tamaño lineal de cada isla en unidades de  $G$ : la expresión estándar  $(G\text{-área})^{1/2}$  y también la no estándar  $(G\text{-longitud})^{1/D}$ .

Lo nuevo de todo esto es que, si sustituimos la regla de longitud  $G$  por otra de longitud  $G'$ , la nueva razón entre los dos tamaños lineales alternativos es

$$(G'\text{-longitud})^{1/D}/(G'\text{-área})^{1/2},$$

que difiere de la anterior en un factor  $(G'/G)^{(1/D)-1}$ .

La razón entre tamaños lineales varía de un conjunto de figuras mutuamente semejantes a otra, tanto si son fractales como si no lo son. Por tanto, cuantifica un aspecto de la forma de las figuras.

Nótese que la relación longitud-área se puede usar para estimar la dimensión fractal de una curva que delimita un dominio estándar.

DEMOSTRACIÓN DE LA RELACIÓN. El primer paso consiste en medir la longitud de cada costa con el patrón intrínseco (definido a partir del área)

$$G^* = (G\text{-área})^{1/2} / 1000.$$

Si aproximamos las costas de cada una de nuestras islas por polígonos de lado  $G^*$ , todos los polígonos obtenidos serán también semejantes entre sí, y sus longitudes serán proporcionales a los tamaños lineales estándar  $(G\text{-área})^{1/2}$ .

Sustituyamos ahora  $G$  por la regla prescrita  $G$ . Ya sabemos, por el capítulo 6, que la longitud cambia en la proporción  $(G/G^*)^{1/D}$ . En consecuencia,

$$(G\text{-longitud}) \propto (G\text{-área})^{1/2} (G/G^*)^{1-D}$$

$$(G\text{-área})^{1/2} - (1_G^{1-D} 1000^{D-1} =$$

$$(G\text{-área})^{D/2} G^{1-D} 1000^{D-1}.$$

Por fin, elevando cada miembro a la potencia  $1/D$ , se obtiene la relación que se pretendía demostrar. (Dem. 12.2)

## ¿Cuánto serpentea el Missouri?

Los argumentos anteriores arrojan también cierta luz sobre las longitudes medidas de los ríos. Con objeto de definir una longitud para el río principal de una cuenca de drenaje fluvial, aproximamos el curso del río por una línea ondulada autosemejante de dimensión  $D > 1$  que va de un punto, que llamaremos nacimiento a otro que llamaremos desembocadura. Si todos los ríos, así como todas las cuencas, son semejantes entre sí, el argumento fractal sobre la relación longitud-área predice que

la ( $G$ -longitud del río) <sup>$1/D$</sup>  es proporcional  
a la ( $G$ -área de la cuenca) <sup>$1/2$</sup> ,

Además, por razones de geometría estándar se tiene que

la ( $G$ -área de la cuenca) <sup>$1/2$</sup>  es proporcional a la  
distancia recta del nacimiento a la desembocadura.

Combinando ambos resultados, llegamos a que

la ( $G$ -longitud del río) <sup>$1/D$</sup>  es proporcional a la  
distancia recta del nacimiento a la desembocadura.

Y lo más notable, como ya hemos mencionado, es que Hack (1957) encuentra empíricamente que la razón

$$(G\text{-longitud del río}) / (G\text{-área de la cuenca})^{0,6}$$

es en efecto común a todos los ríos. Esta estimación indirecta de  $D/2 = 0,6$  nos da  $D = 1,2$ , que nos recuerda los valores deducidos a partir de las longitudes de las costas. Si se mide el grado de irregularidad por la  $D$ , ¡resulta que el grado de irregularidad de los serpenteos locales de las riberas y el de las curvas enormemente globales son idénticos!

Sin embargo, para cuencas de área  $> 104 \text{ km}^2$  y ríos consecuentemente largos, J. E. Mueller observa que el valor de  $D$  disminuye hasta 1. Estos dos valores distintos de  $D$  hacen pensar que, si se trazan mapas de todas las cuencas sobre hojas de papel del mismo tamaño, los mapas de los ríos cortos y los de los ríos largos tienen el mismo aspecto, pero los de los ríos *sumamente largos* se parecen más a rectas. Pudiera ser que la autosemejanza no estándar se acabara en un corte superior  $n$  del orden de 100 km.

LONGITUD ACUMULADA DE UN ÁRBOL FLUVIAL. El argumento precedente sugiere también que la longitud acumulada de todos los ríos de una cuenca de drenaje tendría que ser proporcional al área de dicha cuenca. Me han comunicado que esta predicción es correcta, pero no tengo ninguna referencia.

DE VUELTA A LA GEOMETRÍA. Para los ríos y cuencas de la curva del «barrido del copo de nieve» de las láminas 102 y 103 teníamos  $D \sim 1,2618$ , algo superior al valor observado. La dimensión correspondiente para las láminas 70 y 71 es  $D \sim 1,1291$ , ligeramente inferior.

Las curvas de Peano de las láminas 93 y 96, con  $D = 1$ , están muy fuera de lugar.

Nótese que la igualdad de las dimensiones de los ríos y sus cuencas no es una necesidad lógica, sino sólo un rasgo de ciertos modelos recurrentes concretos. Por contra, una red fluvial relacionada con la curva punta de flecha (lámina 204) y descrita en Mandelbrot (1975m) tiene ríos de dimensión  $D = 1$ , que es demasiado pequeña, y cuencas de dimensión  $D \sim 1,5849$ , que es demasiado grande.

### *Geometría de la lluvia y de las nubes*

En las páginas 15, 25, 26 y 138 se habla de la posibilidad de usar fractales para hacer modelos de las nubes. Lovejoy (1982) ha venido a confirmar esta expectativa, mediante la gráfica fractal área-perímetro de la lámina 168. En meteorología hay muy pocas gráficas que reúnan todos los datos disponibles en una gama de tamaños tan enorme, y son casi tan rectas como ésta.

Dichos datos combinan observaciones por radar de zonas lluviosas del Atlántico tropical (con tasas de lluvia por encima de los 0,2 mm/hora), con observaciones infrarrojas desde satélites geoestacionarios de zonas nubladas sobre el océano Indico (zonas en las que la temperatura de la cima de la nube está por debajo de  $-10^{\circ}\text{C}$ ). Las áreas de las zonas varían entre 1 y 1.000.000  $\text{Km}^2$ . La dimensión del perímetro, ajustado hasta seis cifras significativas por lo menos, es  $4 / 3$ . Dejo al doctor Lovejoy el placer de aportar una explicación física.

La mayor de las nubes se extendía desde el África Central hasta el sur de la India, que corresponde a una distancia muy superior al grosor de la atmósfera, al cual se asimila demasiado a menudo la cota superior  $L$  de la turbulencia atmosférica. La cita de Richardson de la pág. 149 podría resultar profética.

### *La relación área-volumen. Condensación por microgotas.*

La deducción de la relación longitud-área se generaliza fácilmente a dominios espaciales limitados por superficies fractales, llegándose a la relación

$$(G\text{-área})^{1/D} \propto (G\text{-volumen})^{1/3}.$$

Para ilustrar esta relación, considérese la condensación de un vapor. Es un fenómeno físico muy corriente, y sin embargo la teoría que lo explica es reciente. Según Fisher (1967), la siguiente representación geométrica fue presentada, al parecer independientemente, por J. Frenkel, W. Band y A. Bijl, a finales de los años treinta. Un gas está constituido por moléculas aisladas muy separadas entre sí, aparte de unos pocos condensados que se mantienen con más o menos firmeza por las fuerzas atractivas. Los condensados de distintos tamaños coexisten en mutuo equilibrio estadístico, asociándose y disociándose, pero la probabilidad de que haya condensados de buen tamaño, más parecidos a «gotitas» de líquido, es pequeña. Un condensado bastante grande (que no sea demasiado «alargado», como un pedazo de alga, por ejemplo), tiene un área bastante bien definida. La superficie de un condensado le proporciona su estabilidad. Si se hace descender la temperatura, a los condensados les resulta ventajoso combinarse formando gotitas, y a las gotitas les conviene amalgamarse, reduciendo con ello el área total y disminuyendo por tanto la energía total. En condiciones favorables las gotitas crecen rápidamente, y la presencia de una gotita microscópica indica que se ha producido la condensación.

Basándose en esta representación, M. E. Fisher propone que el área y el volumen de una gotita que se condensa guardan una relación equivalente a  $\text{área}^{1/D} \propto \text{volumen}^{1/3}$ . Fisher calcula  $D$  por medios analíticos sin preocuparse de su significado geométrico, pero ahora resulta inevitable la conjetura de que las superficies de las gotitas son fractales de dimensión  $D$ .

### *Los pliegues del cerebro de los mamíferos*

Para ilustrar la relación área-volumen en el caso límite importante en que  $D=3$ , y al mismo tiempo reforzar el exorcismo de las figuras de Peano presentado en el capítulo 7, interpretaremos un famoso problema de anatomía comparada por medio de superficies que casi llenan el espacio.

El volumen del cerebro de los mamíferos oscila entre los 0,3 y los 3000 ml, siendo el córtex de los animales pequeños relativa o completamente liso, mientras que el de los grandes tiende a presentar convoluciones, con independencia de la situación del animal en la escala evolutiva. Los zoólogos razonan que la proporción entre materia blanca (formada por los axones neuronales) y materia gris (donde terminan las neuronas) es aproximadamente la misma para todos los mamíferos, y que para mantener esta proporción un córtex cerebral grande tiene necesariamente que plegarse. La certeza de que el grado de plegamiento tiene un origen puramente geométrico libera al hombre de sentirse amenazado por el delfín o la ballena: son mayores que nosotros, pero no por ello están más arriba en la escala evolutiva.

El estudio cuantitativo de dicho plegamiento cae fuera del dominio de la geometría estándar, pero encaja muy bien en el de la geometría fractal. El volumen de materia gris es aproximadamente igual a su grosor multiplicado por el área de la membrana superficial del cerebro, llamada «pía». Si este grosor  $E$  fuera el mismo para todas las especies, el área de la pía sería proporcional al volumen de la materia gris y también al de la materia blanca, y por tanto al volumen total. En consecuencia, a partir de la relación área-volumen tendríamos  $D=3$ , con lo que la pía sería una superficie que, módulo  $E$ , llenaría el espacio.

La relación área-volumen empírica más ajustada es  $A \propto V^{D/3}$ , con  $D/3 \propto 0,91$  a  $0,93$  (Jerison, comunicación oral, basada en los datos de Elias y Schwartz, Brodman, y otros). La interpretación más inmediata es que la pía sólo llena el espacio parcialmente, con una  $D$  comprendida entre 2,73 y 2,79. Al resumir este tema en el capítulo 17, esbozaremos un argumento más sofisticado.

### *Membranas alveolares y celulares*

¿Tendrá algún biólogo la amabilidad de levantarse y proclamar que la sección precedente no aporta ningún resultado nuevo ni ninguna opinión inesperada? Me encanta que me formulen esta objeción, porque refuerza los argumentos que presenté al principio del capítulo 7. A pesar de que un biólogo echaría a correr ante una superficie de Peano tal y como la presentan los matemáticos, puedo afirmar que la idea de fondo es bien conocida para las mentes teóricas avanzadas en este campo.

Así pues, la mayor novedad de la sección anterior son las superficies con  $D < 3$ , que (como vimos) son necesarias para un buen ajuste. Sigamos con su nueva aplicación a la biología, con un esbozo de cómo desenmañar la estructura detallada de varias membranas vivas.

Para empezar, resumiremos en un párrafo la sección 4.3.7 de Weibel (1979). Las estimaciones del área alveolar del pulmón humano son contradictorias: según la microscopía óptica es de  $80 \text{ m}^2$ , mientras que según la microscopía electrónica, es de  $140 \text{ m}^2$ . ¿Es importante esta discrepancia? La estructura fina no juega ningún papel en el intercambio de gases, pues es suavizada por un revestimiento líquido (que da un área funcional aún menor), pero es importante en el intercambio de sustancias disueltas. Las mediciones (estimuladas por mi artículo *Coast of Britain*) indican que, en primera aproximación y para una amplia gama de escalas, la dimensión fractal de la membrana es  $D=2,17$ .

Paumgartner y Weibel (1979) estudian las membranas *sub*-celulares de las células hepáticas. Como en el caso anterior, el marcado desacuerdo que había entre distintas estimaciones del área por unidad de volumen se desvanece si se postula que  $D=2,09$  para la membrana mitocondrial externa (que envuelve la célula y sólo se aparta ligeramente de la suavidad característica de las membranas con una razón área/volumen mínima). Por otra parte, se tiene  $D=2,53$  para las membranas mitocondriales *internas* y  $D=1,72$  para el retículo endoplasmático.

Señalemos también que la estructura del hueso nasal de muchos animales presenta una complicación extraordinaria, de modo que la «piel» que recubre dicho hueso tiene un área muy grande en un volumen pequeño. En el ciervo y el zorro ártico *quizá* desempeñe una función olfativa, pero el objeto de una forma análoga en el camello es economizar agua (Schmidt-Nielsen 1981).

### *Geometría de los ordenadores modulares*

Para ilustrar mejor aún la relación área-volumen, abordaremos una faceta de los ordenadores. Aunque éstos no sean sistemas naturales, esto no tiene por qué ser un obstáculo. Este caso y otros permitirán comprobar que los métodos fractales sirven para analizar cualquier sistema, tanto natural como artificial, que se componga de «partes» articuladas en forma autosemejante y tales que las propiedades de las partes sean menos relevantes que las reglas de articulación.

Los circuitos de los ordenadores complejos se subdividen siempre en gran número de módulos. Cada uno de ellos consta de una gran cantidad  $C$  de componentes y está conectado con su entorno por un gran número  $T$  de terminales. Con un pequeño porcentaje de error, se tiene que  $T^{1/D} \propto C^{1/E}$ . Dentro de un momento justificaré esta manera de escribir el exponente. En IBM la regla anterior se atribuye a E. Rent (véase Landman y Russo, 1971).



Los primeros datos sugerían  $D/E=2/3$ , resultado que Keyes (1981) extrapola a grandes «circuitos» del sistema nervioso (como el nervio óptico y el *corpus callosum*). Sin embargo, la razón  $D/E$  aumenta con el rendimiento del circuito. El rendimiento, a su vez, refleja el grado de paralelismo presente en el diseño. En particular, en los diseños con características extremas se llega a valores extremos de  $D$ . En un registro de desplazamiento, los módulos forman una cadena y  $T=2$  independientemente de  $C$ , con lo que  $D=0$ . En caso de paralelismo integral, cada componente precisa de su propio terminal y por tanto,  $T=C$ , con lo que  $D=E$ .

Para explicar  $D/E=2/3$ , R. W. Keyes observó que, normalmente, las componentes están dispuestas en el interior del volumen de los módulos, mientras que las conexiones se distribuyen por su superficie. Para probar que esta observación implica la regla de Rent, basta con suponer que todas las componentes tienen aproximadamente el mismo volumen  $V$  y la misma superficie  $\sigma$ . Como  $C$  es igual al volumen total del módulo dividido por  $V$ ,  $C^{1/3}$  es aproximadamente proporcional a su radio. Por otro lado,  $T$  es la superficie total del módulo dividida por  $\sigma$ , con lo que  $T^{1/2}$  es aproximadamente proporcional también al radio. La regla de Rent no es más que otra expresión de la equivalencia de dos medidas del radio de una figura espacial estándar.  $E=3$  es la dimensión euclídea del circuito y  $D=2$  es la dimensión de una superficie común.

Nótese que el concepto de módulo es ambiguo y casi indefinido, aunque la regla de Rent es compatible con esta característica, siempre que los submódulos de cualquier módulo estén interconectados por sus superficies.

Los casos extremos mencionados más arriba tienen una interpretación igualmente sencilla. En una estructura lineal estándar,  $E=1$  y la frontera se reduce a dos puntos, con lo cual  $D=0$ . Y en una estructura plana estándar,  $E=2$  y  $D=1$ .

Sin embargo, cuando la razón  $E/D$  no es ni  $3/2$  ni  $2/1$ , la geometría euclídea no nos permite interpretar  $C$  o  $T$  como expresiones del volumen o la superficie, respectivamente. Sin embargo, tales interpretaciones sí son posibles y resultan útiles en geometría fractal. En un circuito espacial que está en contacto con el exterior a través de su propia superficie,  $E=3$  y  $D$  toma un valor comprendido entre 2 y 3. En un circuito plano que esté en contacto con el exterior a través de la curva que lo delimita,  $E=2$  y  $D$  toma un valor entre 1 y 2. El caso de paralelismo integral,  $D=E$ , corresponde a contornos de Peano. Por otra parte, si el contorno se utiliza de modo incompleto, el «contorno efectivo» puede ser cualquier superficie con una  $D$  entre 0 y  $E$ .

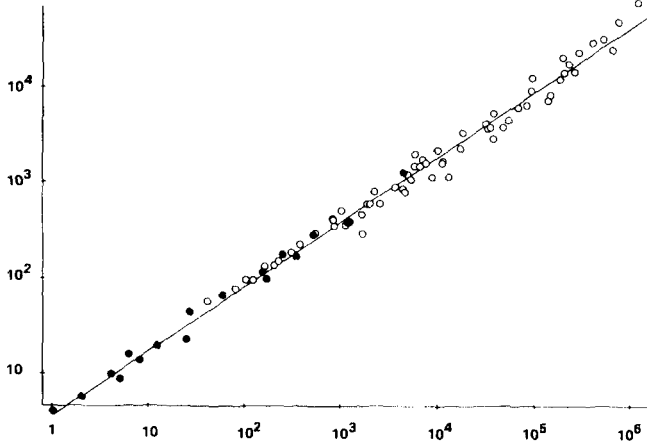


Fig. 168. *Log(perímetro) en función del log(área) para nubes (o) y zonas lluviosas (•). De Lovejoy 1982*

Este capítulo está dedicado a las  $\sigma$ -curvas fractales, esto es, a fractales que se descomponen en una infinidad de fragmentos disjuntos, cada uno de los cuales es una curva conexa. Los casos concretos a considerar abarcan desde las costas de las islas de un archipiélago hasta un problema importante de la física, la percolación. El material de algunas de las primeras secciones está tomado del *Fractals* de 1977, y el grueso del resto del capítulo es nuevo.

Para empezar, volvamos a la cuestión de cuánto mide la costa de Bretaña y preguntémosnos cuántas islas hay alrededor de la costa de Bretaña. Con toda seguridad su número es muy grande y también está mal determinado. A medida que vayamos incluyendo pequeños islotes en la lista de islas, ésta se alargará más y más, y el número total de islas resultará ser prácticamente infinito.

Como el relieve terrestre está finamente «arrugado», no cabe duda de que el área total de una isla, al igual que la longitud de una costa, es geográficamente infinita. Pero a los dominios delimitados por las costas les corresponden «áreas planas» bien definidas. Y una característica geográfica importante es el modo en que una cierta área plana total se reparte entre las diversas islas. Se podría incluso aducir que esta relación «área-número» contribuye más a la forma geográfica que las formas de las costas individuales. Así, por ejemplo, se hace difícil pensar en las costas del mar Egeo sin considerar también las de las islas griegas. El tema merece, pues, un estudio cuantitativo, y en este capítulo haremos uno basado en una generalización de las curvas de Koch.

Luego se estudian también otras figuras fragmentadas obtenidas por generalización de los procesos generadores de fractales ya conocidos, bien sea por el método de Koch o el de coagulación. Las figuras resultantes se denominan aquí *racimos de contacto* y se demuestra que tienen la misma relación diámetro-número que las islas.

Tienen especial interés los racimos de contacto que llenan el plano, y en particular los generados por ciertas curvas de Peano cuyos terágonos no se cortan a sí mismos, pero cuyos puntos de autocontacto están cuidadosamente controlados. ¡La epopeya de la doma de los monstruos de Peano se enriquece así con una nueva escena!

Y finalmente, aunque no por ello es menos importante, veremos también en este capítulo la primera parte del estudio de la geometría de la percolación, fenómeno físico de gran importancia que también estudiaremos en el capítulo 14.

### *Generalización de la ley empírica de Korčak*

Hagamos una lista de todas las islas de una región por orden decreciente de tamaños y sea  $Nr(A > a)$  el número de ellas de tamaño mayor que  $a$  — notación análoga a  $Pr(A > a)$  de la teoría de la probabilidad. ■ Aquí  $a$  será un posible valor del área plana de una isla y  $A$  denota la variable «área plana».

Se encuentra la sorprendente relación siguiente:

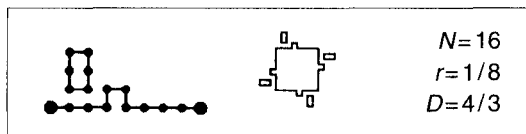
$$Nr(A > a) = F' a^{-B}$$

donde  $F'$  y  $B$  son dos constantes positivas que llamaremos prefactor y exponente. Casi habría que atribuir esta ley a Korčak (1938) (el nombre se pronuncia Kor'chak), si no fuera porque sostiene que  $B = 1/2$ , afirmación que me pareció increíble y que los datos probaron infundada. En realidad,  $B$  varía de una región a otra y es siempre  $> 1/2$ . Permítaseme ahora mostrar que la ley generalizada de más arriba es el equivalente de la distribución que se obtiene en el capítulo 8 para las longitudes de los huecos de un polvo de Cantor.

### *Continentes e islas de Koch y sus diversas dimensiones*

Con objeto de producir un equivalente de Koch de los huecos de Cantor, tomaré un generador formado por varias porciones inconexas. Y para asegurarme de que el fractal límite se pueda seguir interpretando en términos de costas, una de estas porciones del generador será una línea quebrada conexa de  $N_C < N$  enlaces, uniendo los extremos del intervalo  $[0,1]$ . Esta parte la llamaré *generador de la costa*, pues determina la transformación de una costa inicialmente recta en otra fractal. Los demás

$N - N_C$  enlaces forman un circuito cerrado que «siembra» nuevas islas y que llamaremos *generador de islas*. He aquí un ejemplo:



En estadios posteriores, la subisla siempre se mantiene a la izquierda del generador de la costa (yendo de 0 a 1) y del generador de islas (recorrido en el sentido de las agujas del reloj).

Una primera novedad es que en la fractal límite aparecen ahora dos dimensiones distintas. Juntando todas las costas de las islas se tiene  $D = \log N / \log(1/r)$ , pero para la costa de cada isla por separado resulta  $D_c = \log N_c / \log(1/r)$ , con las desigualdades

$$1 \leq D_c < D.$$

Al no ser conexa, la costa total no es una curva, sino una suma ( $\Sigma$ , sigma) infinita de circuitos. Propongo que se la llame *sigma-circuito* o, abreviadamente,  $\sigma$ -circuito.

Nótese que para modelizar la relación observada entre  $D$  y  $D_c$  en las islas reales harían falta otras hipótesis adicionales, a menos que se pudieran deducir de una teoría, como en el capítulo 29.

### La relación diámetro-número

La demostración de la validez de la ley de Korčak para las islas de la sección anterior es muy simple cuando el generador sólo tiene una isla y los terágonos son autoevitantes. (Recuérdese que los *terágonos* son las líneas quebradas que aproximan la curva.) En tal caso, el primer paso de la iteración produce una isla. Sea  $\lambda_0$  su «diámetro», definido como  $\sqrt{a}$ . El segundo paso crea  $N$  islas de diámetro  $\lambda_0$ . Y en el estadio  $m$ -ésimo se crean  $N^m$  islas de diámetro  $\lambda = r^m \lambda_0$ . Globalmente, cuando se multiplica  $\lambda$  por  $r$ ,  $Nr$  ( $\Lambda > \lambda$ ) queda multiplicado por  $N$ . Por tanto, la distribución de  $\Lambda$  (para los valores de  $\lambda$  de la forma  $r\lambda_0$ ) tiene la forma

$$Nr(\Lambda > \lambda) = F \lambda^{-D},$$

¡en la que el exponente decisivo es la dimensión fractal de la costa! Y como corolario

$$Nr(A > a) = F a^{-B}, \text{ con } B = D/2,$$

con lo que hemos obtenido la ley de Korčak. Para otros valores de  $\lambda$  o de  $a$ , se tiene una gráfica escalonada como las que obtuvimos para las longitudes de los huecos de Cantor en el capítulo 8.

Este resultado es independiente de  $N_C$  y de  $D_C$ , y vale también cuando el generador tiene dos o más islas. Vemos también que la  $B$  empírica correspondiente a toda la Tierra es del orden de 0,6, muy próxima a la mitad de la  $D$  medida a partir de las longitudes de las costas.

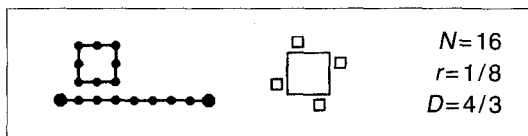
### Generalización a $E > 2$

En la misma construcción generalizada al espacio, sigue cumpliéndose que el diámetro  $E$  dimensional, definido como volumen  $1/E$ , se ajusta a una expresión hiperbólica de la forma  $Nr$  (volumen  $^{1/E} > \lambda$ ) =  $F\lambda^{-D}$ , donde el exponente crucial también es  $D$ .

El exponente  $D$  gobierna también el caso especial de los polvos de Cantor para  $E = 1$ , pero en ese caso surge una diferencia importante: la longitud fuera de los huecos de Cantor es nula, mientras que el área exterior a las islas de Koch puede ser, como generalmente ocurre, positiva. Volveremos sobre el tema en el capítulo 15.

### La dimensión fractal puede ser solamente una medida de fragmentación

En la construcción anterior también puede darse el siguiente generador



La  $D$  global no varía, pero la  $D_C$  de la costa toma el mínimo valor posible,  $D_C = 1$ . En este modelo, las costas de las islas son rectificables. En tal caso la  $D$  global no mide la irregularidad, sino sólo la fragmentación. En vez de medir el grado de ondulación de las curvas individuales, la  $D$

mide la relación número-área de la familia infinita de islas rectangulares.

Sigue siendo cierto que, si se mide la longitud con una regla de longitud  $\epsilon$ , el resultado tiende a infinito para  $\epsilon \rightarrow 0$ , pero ahora por un nuevo motivo. Con dicha regla sólo pueden considerarse islas de diámetro mayor o igual que  $\epsilon$ . Pero el número de tales islas aumenta al tender  $\epsilon$  a 0, y la longitud medida se comporta como  $\epsilon^{1-D}$ , exactamente igual que en ausencia de islas.

En el caso general, con  $D_C > 1$ , este valor mide sólo la irregularidad, mientras que la  $D$  cuantifica la irregularidad y la fragmentación en conjunto.

UN FRACTAL FRAGMENTADO PUEDE TENER TANGENTE EN TODOS SUS PUNTOS. Redondeando las esquinas de las islas se puede hacer que cada costa tenga una tangente en cada punto, sin alterar las áreas, y con ellas la  $D$  global. Así pues, las propiedades de ser una curva fractal y de no tener tangentes *no son* equivalentes.

### *La infinidad de islas*

UNA DIVERGENCIA INOCUA. Cuando  $a \rightarrow 0$ ,  $Nr(A > a) = F a^{-B}$  tiende a infinito. Por tanto, la ley de Korčak concuerda con nuestro comentario inicial de que el número de islas es prácticamente infinito.

ÁREA RELATIVA DE LA ISLA MAYOR. Este último hecho es matemáticamente aceptable por cuanto el *área* acumulada de las islas muy pequeñas es finita y despreciable. □ La contribución al área total de todas las islas de área menor que  $\epsilon$  se comporta como la integral de  $a(Ba^{B-1}) = Ba^{-B}$  entre 0 y  $\epsilon$ . Como  $B < 1$ , esta integral converge y su valor,  $B(1-B)^{-1}\epsilon^{1-B}$ , tiende a 0 con  $\epsilon$ . ■

En consecuencia, la contribución relativa de la mayor de las islas al área total acumulada tiende a un límite positivo finito a medida que aumenta el número de islas consideradas. No es asintóticamente despreciable.

LONGITUD RELATIVA DE LA COSTA MAS LARGA. Por otro lado, si suponemos que  $D_C = 1$ , los perímetros de las costas siguen una distribución hiperbólica de exponente  $D > 1$ . De ahí que la contribución de las islas más pequeñas al perímetro acumulado de las costas sea infinita y que, a medida que avanza la construcción y aumenta el número de islas, el perímetro de la isla mayor se vaya haciendo relativamente despreciable.

CONJUNTOS RELATIVAMENTE DESPRECIABLES. En general, la desigualdad  $D_C < D$  expresa que la curva obtenida sólo con el generador de costas es despreciable en relación a la costa total. Del mismo modo, una recta

( $D=1$ ) es despreciable con respecto al plano ( $D=2$ ). Igual que un punto del plano elegido al azar casi nunca cae sobre el eje X, un punto elegido al azar sobre la costa de un archipiélago formado alrededor de una isla principal casi nunca cae sobre la costa de dicha isla principal.

### *Búsqueda del continente infinito*

En un universo escalante la distinción entre islas y continente no puede basarse en la tradición ni en el «tamaño relativo». El único enfoque razonable consiste en definir el continente como una isla especial de diámetro *infinito*. Demostraré ahora que las construcciones presentadas al comienzo del capítulo *prácticamente nunca* generan un continente. □ Para quienes conocen la teoría de la probabilidad: la probabilidad de que se genere un continente es nula. ■

En una búsqueda razonable de un continente ya no podemos elegir el iniciador y el generador por separado. A partir de ahora el mismo generador debe servir para la interpolación y para la extrapolación. El proceso se desarrolla por estadios sucesivos, y cada uno de éstos se descompone en varios pasos. Se parece muchísimo a la extrapolación del polvo de Cantor que vimos en el capítulo 8, pero merece una descripción más completa y detallada.

El primer paso consiste en aumentar el generador escogido en un factor  $1/r$ . En el segundo se «marca» *uno* de los enlaces de dicho generador aumentado. El tercero lo desplaza hasta hacer coincidir el enlace marcado con  $[0,1]$ . Y el cuarto y último interpola los restantes enlaces del generador aumentado.

Este proceso se repite indefinidamente, y la sucesión de posiciones de los enlaces «marcados» determina el avance y resultado del mismo. Dicha sucesión puede tomar distintas formas.

En la primera de ellas hace falta que el generador de la costa contenga un número positivo  $N_c - 2$  de enlaces «no extremos», definidos por la condición de pertenecer al generador de la costa y no acabar ni en 0 ni en 1. Si se hace la marca consistentemente en un enlace no extremo, cada etapa de la extrapolación amplía el trozo de costa original hasta incorporarlo, a la larga, en una costa fractal de extensión infinita en ambos sentidos. Esto demuestra que es efectivamente *posible* obtener una costa continental por este método de construcción.

En la segunda forma, se marca siempre un enlace extremo del generador de la costa, eligiendo ambas posibilidades un número infinito de veces. Nuestro pedazo de costa se irá ampliando también indefinidamente.



Pero si siempre marcamos el mismo enlace, esta ampliación sólo se producirá en un sentido.

Tercera posibilidad, márquese siempre un enlace del generador de islas. En tal caso, la isla mayor antes de extrapolar aparece junto a la costa de otra isla mayor después de una extrapolación, y esta segunda isla quedará junto a otra mayor después del siguiente estadio, y así sucesivamente, con lo que *nunca* se llega a obtener el continente.

El comentario siguiente requiere un poco de «sentido común probabilístico» al que cualquier lector tendría que estar acostumbrado. Supongamos que las «marcas» se hacen según los resultados de las tiradas de un dado de  $N$  caras. Resulta obvio que, para que la extrapolación genere un continente, es necesario que, a partir de un cierto estadio finito (el  $k$ -ésimo), todas las marcas caigan en uno de los  $N_c - 2$  enlaces no extremos del generador de la costa. Llamémosles enlaces «favorables». Para poder decir que hemos llegado al continente después de  $k$  pasos, tenemos que saber que a partir de entonces *todas* las tiradas del dado, *sin* excepción, van a ser favorables. Tanta suerte no es imposible, pero su probabilidad es nula.

### *Combinación de isla, lago y árbol*

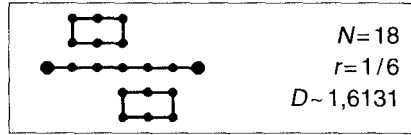
Al ser las islas de Koch mutuamente autosemejantes, su diámetro se puede definir como la distancia en línea recta entre dos puntos dados cualesquiera, preferiblemente escogidos sobre la costa. Observamos también que la deducción de la relación diámetro-número utiliza la hipótesis de que el generador contiene un generador de costas. Pero, de hecho, la condición de que los enlaces restantes del generador formen islas o que sean autoevitantes, no se usan nunca en dicha deducción. Así pues, la relación

$$Nr(\Lambda > \lambda) = F \lambda^{-D}$$

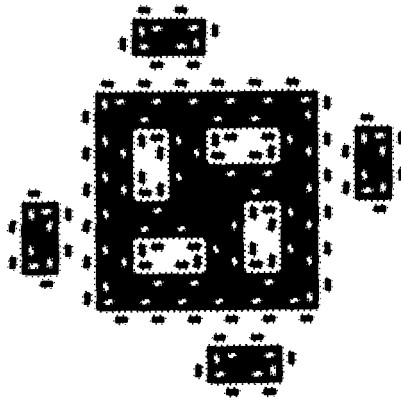
tiene una validez muy general. □ Se puede incluso relajar la condición de que los terágonos iniciados por dos intervalos no se corten. ■ Mostraremos ahora algunos ejemplos en los que la configuración de los  $N - N_c$  enlaces iniciales puede afectar la topología del fractal resultante.

COMBINACIÓN DE ISLAS Y LAGOS. Prescindamos de la condición de que el generador de islas caiga a la izquierda al ir en el sentido de las agujas del reloj. Si cae a la derecha, formará lagos en vez de islas. Alternativamente, se pueden tener *a la vez* lagos e islas en el mismo generador. En

cualquier caso, el fractal final es un  $\sigma$ -circuito cuyos circuitos componentes están encajados unos en otros. Considérese, por ejemplo, el siguiente generador



Si se inicia con un cuadrado, este generador da lugar al siguiente terráfono avanzado



EL ESCURRIDIZO CONTINENTE. En el diagrama superior, la longitud del lado del iniciador introduce un corte superior no intrínseco. Un enfoque más consistente sería extrapolar como en el caso de islas sin lagos. Y también es prácticamente seguro que nunca se llegará a tener un continente, y que este encajarse de las islas en lagos, encajados a su vez en islas, continuará indefinidamente.

RELACIÓN ÁREA-NÚMERO. Para definir el área de una isla (o un lago) se puede tomar el área total, o el área de la tierra (o el agua) encerrada por su costa. Ambos valores difieren en un factor numérico fijo, con lo que dicha elección afectará al prefactor  $F'$  y no al exponente  $D/2$  de la relación  $Nr$  ( $A > a$ ).

COMBINACIÓN DE ARCOS Y ÁRBOLES. Supongamos ahora que los  $NV_C$  enlaces forman una línea quebrada o un árbol. En cada caso el fractal se descompone en un número infinito de pedazos inconexos, siendo cada uno de ellos una curva. Esta  $\sigma$ -curva ya no es un  $\sigma$ -circuito, sino un  $\sigma$ -árbol o un  $\sigma$ -arco.

## *El concepto de racimo de contacto*

El generador puede también combinar circuitos, ramas y otras distintas configuraciones topológicas. En tal caso, las partes conexas de los fractales límite nos recuerdan los *racimos* de la teoría de la percolación (como veremos más adelante en este mismo capítulo) y de muchos otros campos de la física. El uso del término *racimo* resulta sumamente desafortunado para nuestras intenciones, debido al distinto significado que le hemos dado en el estudio de los polvos (capítulo 9). Necesitamos una expresión más específica, como por ejemplo «racimo de contacto». Por suerte, el término  $\sigma$ -racimo no es ambiguo.

(Obsérvese que *racimo de contacto* tiene una definición matemática natural y única, cosa que no ocurre con el concepto de agregación en un polvo, que es difuso e intuitivo y al que, como mucho, se le puede dar una definición mejor mediante reglas estadísticas discutibles.)

**RACIMOS DE CONTACTO QUE LLENAN EL PLANO.** Cuando  $D$  alcanza su valor máximo, los argumentos de la sección anterior siguen siendo válidos, pero son necesarios algunos comentarios adicionales. Cada racimo individual tiende a un límite, que puede ser una recta, pero que en la mayoría de casos es una curva fractal. Por otro lado, el conjunto de todos los racimos forma una  $\sigma$ -curva cuyas hebras llenan el plano de forma cada vez más tupida. El límite de esta  $\sigma$ -curva se comporta como en el capítulo 7: deja de ser una  $\sigma$ -curva para convertirse en un dominio del plano.

**EL ESCURRIDIZO RACIMO INFINITO.** El presente planteamiento no implica ningún racimo *realmente infinito*. Es fácil disponer la topología del generador de modo que sea prácticamente seguro que cualquier dominio acotado esté rodeado por un racimo de contacto. Este, a su vez, estará rodeado casi con seguridad por otro mayor, etc. No hay una cota superior para el tamaño de los racimos. En general, cuando un racimo parece infinito porque se extiende sobre un área muy grande, es casi seguro que la consideración de un área mayor pondrá de manifiesto que en realidad es finito.

### *Relación masa-número y relación ponderada diámetro-número.*

*Los exponentes  $D-D_C$  y  $D/D_C$*

Reformulemos ahora la función  $Nr(\Lambda > \lambda)$  de dos nuevas maneras: primero sustituyendo el diámetro  $\lambda$  del racimo por su masa  $\mu$  y luego asignando un peso mayor a los racimos de contacto mayores.

Aquí la masa de un racimo no es otra cosa que el número de enlaces

de longitud  $b^{-k}$  que lo forman (¡en un racimo que forma lazos *no* se cuentan los enlaces *interiores*!). Lo que hacemos en realidad es (capítulos 6 y 12) crear una salchicha de Minkowski modificada (lámina 59), tomando un cuadrado de lado  $b^k$  centrado en cada vértice y añadiendo medio cuadrado a cada extremo.

La masa de cada racimo de diámetro  $\Lambda$  será el área de esa salchicha modificada, de modo que  $M \propto (\Lambda / b^k)^D (b^k)^2 = \Lambda^D / (b^k)^{D-2}$  como  $D < 2$ ,  $M \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$ . La masa de todos los racimos de contacto en conjunto es  $\propto (b^k)^{D-2}$ , y si  $D < 2$  también  $\rightarrow 0$ . Y la masa relativa de cualquier racimo de contacto individual es  $\propto (b^k)^{D_c - D}$ , que tiende a 0 con una velocidad que aumenta con  $D - D_c$ .

RELACIÓN MASA-NÚMERO. Es claro que

$$Nr(M > \mu) \propto (b^k)^{-D + 2D/D_c} \mu^{-D/D_c}.$$

DISTRIBUCIÓN DE DIÁMETROS PONDERADA CON LA MASA. Nótese que  $Nr(\Lambda > \lambda)$  cuenta el número de líneas anteriores a la línea  $\lambda$  en una lista que empieza en el racimo de contacto más largo, sigue con el más largo de los restantes, etc. Pero dentro de un momento tendremos que atribuir a cada racimo de contacto un número de líneas igual a su masa. Se ve fácilmente que la relación resultante es

$$Nrp(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-D + D_c}.$$

El exponente másico  $Q = 2D_c - D$

Denotemos por  $F$  una fractal de dimensión  $D$  construida por iteración a partir de un iniciador  $[0, \Lambda]$  y supongamos que su masa es  $\Lambda^D$ . Si  $F$  es un polvo de Cantor, en el capítulo 8 se demuestra que la masa contenida en un disco de radio  $R < \Lambda$  centrado en 0 es  $M(R) \propto R^D$ . □ La cantidad  $\log[M(R)R^{-D}]$  es una función periódica de  $\log b(\Lambda/R)$ , pero dejaremos de lado estas complicaciones porque desaparecerán cuando modifiquemos el fractal de modo que todas las  $r > 0$  sean razones de autosemejanza admisibles. ■

Sabemos ya que la relación  $M(R) \propto R^D$  vale también para la curva de Koch del capítulo 6. Esta fórmula es extensible también a las islas y racimos recurrentes de este capítulo, cambiando  $D$  por  $D_c$ . En todos los casos, la masa contenida en un disco de radio  $R$  centrado en 0 tiene la forma

$$M(R, \Lambda) = R^{D_c} \phi(R/\Lambda),$$

siendo  $\phi$  una función que depende de la forma de  $F$ . En particular,

$$M(R, \Lambda) \propto R^{D_c} \text{ para } R \ll \Lambda$$

$$\text{y } M(R, \Lambda) \propto \Lambda^{D_c} \text{ para } R \gg \Lambda.$$

Consideremos ahora la media ponderada de  $M(R)$ , que denotaremos por  $\langle M(R) \rangle$ , correspondiente al caso en que  $\Lambda$  varía según una distribución hiperbólica del tipo  $Nrp(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-D+D_c}$ . Sabemos que  $1 \leq D_c < D \leq 2$ , y si excluimos la combinación  $D_c = 1$  y  $D = 2$ ,  $0 < D - D_c < D_c$ . Se tiene que

$$\langle M(R) \rangle \propto R^Q \text{ con } Q = 2D_c - D > 0.$$

Si el disco está centrado en un punto de  $F$  distinto del 0, el factor de proporcionalidad cambia pero el exponente se mantiene, y también se mantiene si se calcula la media para todas las posibles posiciones del centro sobre  $F$ , y si se cambia  $[0, 1]$  por otro iniciador. □ Normalmente, un arco de tamaño aleatorio  $\Lambda$  también tiene una forma aleatoria. Pero las fórmulas anteriores para  $M(R, \Lambda)$  valen para  $\langle M(R, \Lambda) \rangle$  promediado sobre todas las formas, y el resultado final es el mismo. ■

OBSERVACIÓN. La deducción anterior no dice nada de la topología de los racimos. Estos pueden ser circuitos, intervalos, árboles, o cualquier otra cosa.

CONCLUSIÓN. La fórmula  $\langle M(R) \rangle \propto R^Q$  prueba que cuando  $\Lambda$  sigue una distribución hiperbólica, y por tanto muy dispersa, uno de los papeles esenciales de la dimensión es traspasado a un exponente *distinto de*  $D$ . El más natural es  $2D_c - D$ , pero distintas funciones de peso dan otros valores de  $Q$ .

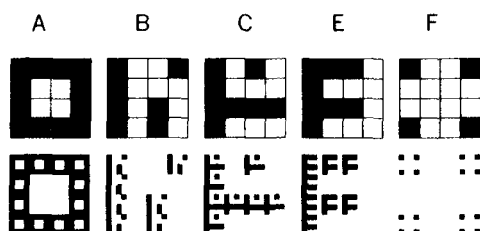
ADVERTENCIA: NO TODOS LOS EXPONENTES MASICOS SON DIMENSIONES. La cantidad compuesta  $Q$  es importante y, al tratarse de un exponente másico, resulta tentador calificarlo (inmerecidamente) de dimensión. Si se mezclan muchos racimos de la misma  $D_c$  pero distinta  $\Lambda$ ,  $D_c$  no cambia, puesto que la  $D_c$  no es una propiedad de una población de conjuntos, sino de cada uno de ellos en particular. Tanto  $D$  como  $D_c$  son dimensiones fractales, pero  $Q$  no lo es.

En general, las relaciones de la forma  $\langle M(R) \rangle \propto R^Q$  se dan en muchos campos de la física, pero dicha fórmula *no es por sí misma* una garantía de que  $Q$  tenga que ser una dimensión fractal. Y decir que  $Q$  es una *dimensión efectiva*, como proponen algunos autores, es un gesto vacío, pues  $Q$  no posee ninguna de las otras propiedades que caracterizan a  $D$  (por ejemplo, las sumas y productos de las  $D$  tienen un significado que no tiene homólogo en el caso de  $Q$ ). Además, este gesto vacío ha resultado ser una fuente potencial de confusión.

## Racimos de coagulación no grumosos

Pasamos ahora a describir otras dos maneras de generar racimos de contacto. Una se basa en la coagulación y es aplicable cuando  $D < 2$ , mientras que la otra se basa en las curvas de Peano y es aplicable cuando  $D = 2$ . El lector interesado en la percolación puede saltarse esta sección y la siguiente.

Sustituyamos primero la construcción de Koch por la generalización natural al plano de la coagulación de Cantor. A modo de ilustración, considérense los siguientes cinco generadores, con el correspondiente segundo estadio dibujado inmediatamente debajo de cada uno.



En todos estos casos, el fractal límite tiene área nula y carece de puntos interiores. Su topología puede ser muy diversa, según sea el generador.

Con el generador *A*, tenemos que en cada estadio  $k$  la precoagulación es conexa y el fractal límite es una curva. Se trata de un ejemplo del importante tamiz de Sierpinski, que estudiamos en el capítulo 14.

Con el generador *F*, la precoagulación se descompone en porciones inconexas cuya escala lineal máxima disminuye sin cesar para  $k \rightarrow \infty$ . El fractal límite es un polvo, semejante al modelo de Fournier del capítulo 9.

Los generadores *B*, *C* y *E* son más interesantes: en estos casos, la precoagulación se descompone en pedazos que llamaremos *pre-racimos*. Se podría decir que cada estadio transforma los «viejos» *pre-racimos* haciéndolos más delgados y ondulados, y a la vez hace aparecer «nuevos» *pre-racimos*. Sin embargo, debido a una elección deliberada de los generadores, cada *pre-racimo* recién aparecido está totalmente contenido en una sola celda elemental de la red que dominaba antes de su aparición. En contraste con los «racimos grumosos» de la sección siguiente, éstos se llamarán «no grumosos». Se obtiene que la dimensión de los racimos de contacto límite es de la forma  $\log N_C / \log b$ , siendo  $N_C$  un entero *menor o igual* que el número de celdas de la mayor componente del generador.

Este máximo se alcanza en los casos de los generadores  $B$  y  $C$ , para los que los racimos de contacto son, respectivamente, segmentos con  $D_C = 1$  y árboles fractales con  $D_C = \log 7 / \log 4$ . Pero el fractal generado por el generador  $E$  no alcanza dicho valor máximo: en este caso los prerracimos en forma de  $F$  se siguen descomponiendo en partes, y en el límite acaba por estar formado por segmentos rectilíneos con  $D_C = 1$ .

Sustituyendo la pseudosalchicha de Minkowski por el conjunto de celdas de lado  $b^{-k}$  que intersecan el racimo de contacto, la relación diámetro-número y los otros resultados de la sección anterior siguen siendo válidos en estos casos.

### *Racimos de coagulación grumosos*

Ahora, el generador de coagulación plano toma una de las formas siguientes (junto a cada generador figura el segundo estadio de la construcción correspondiente)



Ambos casos presentan una «grumosidad» en masa, en el sentido de que cada prerracimo recién nacido recibe aportaciones procedentes de varias celdas menores de la red dominante en el estadio anterior a su nacimiento.

En el contexto de las construcciones de Koch se da una situación semejante cuando se permite que los terágonos tengan autocontactos, cosa que motiva la fusión de pequeños terágonos. En cualquier caso, el análisis es laborioso y no podemos detenernos en él. Pero la relación  $Nr(\Lambda > \lambda)$  sigue siendo válida para  $\lambda$  pequeños.

□ Sin embargo, si uno intenta estimar  $D$  a partir de esta relación y no excluye los  $\lambda$  grandes, la estimación presenta un sesgo sistemático hacia valores menores que el verdadero. ■

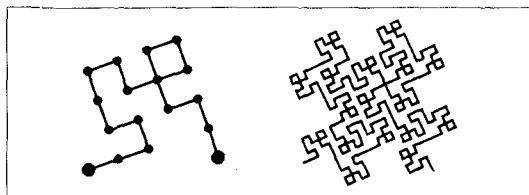
Nos encontramos también con novedades en lo que respecta a la cantidad  $b^D$ : ya no tiene por qué ser un entero inmediatamente deducible del generador, sino que puede ser una fracción. Ello se debe a que en cada racimo de contacto se combinan: (a) un número entero de versiones de sí mismo reducidas en la razón  $1/b$ , y (b) muchas versiones reducidas debido a la grumosidad, en las que intervienen razones de semejanza menores de la forma  $r_m = b^{-k(m)}$ . Si se expresa la ecuación que determina la di-

mensión  $\Sigma r_m^D = 1$  (véase pág. 85) en función de  $x = b^{-D}$ , se obtiene otra de la forma  $\Sigma a_m x^m = 1$ . El cociente  $1/x$  sólo toma valores enteros en casos excepcionales.

### *Monstruos de Peano enmarañados, domesticados*

La coagulación no permite crear familias de racimos que llenen el plano ( $D = 2$ ), pero encontré un camino alternativo basado en unas curvas de Peano distintas de las que vimos domesticar en el capítulo 7. Como el lector recordará, las curvas de Peano con terágonos autoevitantes dan lugar a árboles fluviales y cuencas. Sin embargo, otros terágonos de Peano (los de la lámina 93 sin redondear las esquinas, por ejemplo) no son más que simples trozos de red. A medida que la iteración avanza, las celdillas abiertas separadas por tales curvas «convergen» hacia un polvo denso por doquier, es decir, los puntos tales que ni  $x$  ni  $y$  son múltiplos de  $b^{-k}$

Entre estos extremos tenemos una nueva e interesante clase de curvas de Peano. Un ejemplo de generador, junto con el segundo estadio de la iteración, es el siguiente



Esta clase de curvas de Peano está lista ya para ser domesticada. Observamos que el «nudo» de cada punto de autocontacto «aparta» un pre-racimo abierto, que a su vez presentará ramificaciones y autocontactos, verá cómo partes de sí mismo son «arrancadas» por futuros nudos y por último se adelgazará hasta convertirse en una curva muy ramificada que definirá un racimo de contacto. El diámetro  $\Lambda$  de un racimo, definido como en las secciones anteriores, está determinado desde el instante de su nacimiento y es aproximadamente igual al lado del cuadrado que «sembró» dicho racimo. Su distribución es regida por la ya conocida relación  $Nr(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-2}$ .

Nótese de paso que, así como los racimos de contacto de Koch son el límite de curvas construidas iterativamente, estos racimos son el límite (en un sentido peculiar) de las componentes abiertas del *complemento* de una curva.



## Racimos de percolación de Bernouilli

Sea cual sea el método seguido para generar racimos de contacto fractales con  $D=E$  y  $D_c < D$ , éstos nos proporcionan un modelo geométrico que se echaba en falta en un problema físico muy importante: las redes de percolación de Bernouilli. El problema fue planteado e investigado por vez primera por J. M. Hammersley, sin asociar el nombre de Bernouilli a este contexto, pero la percolación fractal que estudiaremos en el capítulo 23 nos obliga a emplear aquí la expresión completa. (Smythe y Wiermann, 1975, la adoptan independientemente.)

BIBLIOGRAFIA. Tenemos estudios de la percolación de Bernouilli en Shante y Kirkpatrick (1971), Domb y Green (1972), en especial un capítulo de J. W. Essam, Kirkpatrick (1973), deGennes (1976), Stauffer (1979) y Essam (1980).

DEFINICIONES. En la percolación intervienen conceptos probabilísticos, y para ser plenamente consistentes no debería discutirse en este momento. Pero una falta ocasional de consistencia tiene a veces su recompensa. El problema de percolación más simple con  $E=2$  es la percolación de enlaces en una red cuadrada. Para ilustrarla en términos domésticos, imaginemos que construimos una gran red cuadrada con barritas de vinilo y de cobre, aislante y conductor, respectivamente. Se obtiene una *red de Bernouilli* si se elige al azar cada barrita, independientemente de las demás, siendo  $p$  la probabilidad de elegir una barrita conductora. Los conjuntos maximales de barritas de cobre (o de vinilo) conectadas entre sí forman lo que llamamos los *racimos* de cobre (o de vinilo). Si en la red tenemos por lo menos una hilera ininterrumpida de barritas de cobre, la corriente puede *atravesarlo*, y se dice que la red percola (del latín *colare* = fluir y *per* = a través). Las barritas en contacto eléctrico ininterrumpido con los lados extremos de la red forman un «racimo percolante», y las barritas realmente activas de la conducción forman su «espina dorsal».

La generalización a otras redes y a  $E > 2$  es inmediata.

PROBABILIDAD CRÍTICA. El descubrimiento más notable de Hammersley consiste en el papel especial que juega una cierta probabilidad umbral: la *probabilidad crítica*  $p_{crit}$ . Esta cantidad aparece cuando el tamaño de la red de Bernouilli (medida en número de barritas) tiende a infinito. Se encuentra que para  $p > p_{crit}$  la probabilidad de que haya un racimo percolante aumenta con el tamaño de la red y tiende a 1. Por el contrario, cuando  $p < p_{crit}$  la probabilidad de percolación tiende a 0.

Dado que, en la percolación de enlaces en redes cuadradas, o bien el cobre o bien el vinilo deben percolar, tenemos que  $p_{crit} = 1/2$ .

ESCALANTES ANALÍTICOS. El estudio de la percolación se dedicó du-

rante mucho tiempo a la búsqueda de expresiones analíticas que relacionaran las cantidades estándar de la física. Se vio que todas esas cantidades eran *escalantes*, en el sentido de que las relaciones entre ellas venían dadas por potencias. Para  $p \neq p_{\text{crit}}$ , el carácter escalante se extiende hasta un corte superior  $\xi$  que depende de  $p - p_{\text{crit}}$ . Cuando  $p \rightarrow p_{\text{crit}}$ , el corte tiende a  $\infty$ . Los físicos postulan (véase Stauffer, 1979, pág. 21) que  $\langle M(R, \Lambda) \rangle$  sigue la regla obtenida en la página 179.

### *La geometría fractal de los racimos*

LA FORMA DE LOS RACIMOS. Supongamos que  $p = p_{\text{crit}}$  y que el tamaño de cada barrita disminuye mientras el tamaño total de la red permanece constante. Los racimos se hacen cada vez más delgados («todo piel, sin carne»), presentan cada vez más convoluciones, ramificaciones y rodeos («ramificados y fibrosos»). Más concretamente (Leath, 1976) el número de barritas externas al racimo y que están en contacto con una barrita del mismo es aproximadamente proporcional al número de barritas del racimo.

HIPÓTESIS DE QUE LOS RACIMOS SON FRACTALES. De un modo natural se plantea la conjetura de que el carácter escalante de las propiedades analíticas se extiende también a la geometría de los racimos. Pero esta idea no podía realizarse en el marco de la geometría estándar, pues los racimos no son rectilíneos. La geometría fractal fue ideada para responder a dificultades de este tipo, con lo que conjeturé que los racimos se pueden representar por curvas con  $D=2$  y  $1 < D_c < D$ . Esta conjetura fue aceptada y ha dado sus frutos. La ampliaremos en el capítulo 36.

□ Para ser precisos, se toman los fractales escalantes para representar los racimos que *no* son truncados por los bordes de la red original. Ello excluye el racimo percolante. (¡El término racimo tiene un don especial para generar confusión!) Para entender la dificultad, comencemos con una red muy grande, tomemos uno de los racimos y un cuadrado menor parcialmente cubierto por dicho racimo. Por definición, la intersección del racimo y el cuadrado contiene un racimo percolante menor, pero contiene además un «residuo» conectado con dicho racimo percolante menor por unos enlaces que caen *fuera* del cuadrado. Nótese que dejar de tener en cuenta este residuo hace que la estimación de  $D_c$  sea menor de lo que realmente vale. ■

MODELOS FRACTALES NO ALEATORIOS EXPLÍCITOS AUNQUE MUY GROSE-  
ROS. La pretensión de que cualquier fenómeno natural es fractal debe ir acompañada de la descripción de un conjunto fractal concreto, que sirva

de modelo en primera aproximación, o por lo menos de representación mental. Mi modelo de costa al estilo de Koch y el modelo de Fournier para los cúmulos de galaxias han demostrado que las representaciones no aleatorias pueden ser de mucha utilidad. Por ello espero que los racimos de contacto construidos por iteración (como los presentados en este capítulo) proporcionen modelos fractales útiles para fenómenos naturales mal conocidos que usualmente se modelizan por medio de racimos de Bernouilli.

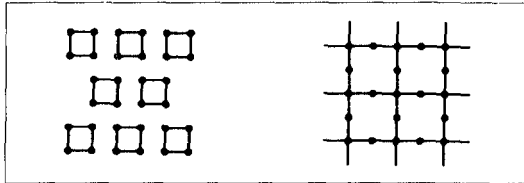
Ahora bien, los racimos de Bernouilli en sí se conocen perfectamente (por lo menos en principio); modelizarlos mediante fractales recurrentes es, pues, una tarea distinta. Los racimos de contacto de Koch que estudié no sirven, debido a la disimetría entre el vinilo y el cobre, incluso cuando tenemos el mismo número de barras de ambas clases. Examinemos a continuación los racimos formados con curvas de Peano anudadas. Tomemos un terágono avanzado y cubramos las celdas de la izquierda de la curva con cobre y el resto con vinilo. El resultado tiene que ver con una forma de percolación referida a las celdas de la red (o a sus centros). El problema es ahora simétrico, pero distinto del problema de Bernouilli, pues las configuraciones del cobre o del vinilo no son las mismas que cuando hay independencia. Por ejemplo, en el caso de Bernouilli, 9 celdas que formen un supercuadrado pueden ser todas de cobre o todas de vinilo, y no pueden serlo en el caso de la curva de Peano anudada. (Por otra parte, ambos modelos permiten que grupos de 4 celdas formen supercuadrados con cualquiera de las configuraciones posibles.) Esta diferencia tiene consecuencias importantes: por ejemplo, ni el cobre ni el vinilo percolan en el problema de Bernouilli para los nudos con  $p=1/2$ , y ambos lo hacen en cambio en el caso de los racimos de Peano anudados, cosa que implica que  $1/2$  es una probabilidad crítica.

La lista de variantes de percolación de enlaces de Bernouilli ya es larga y sería fácil alargarla aún más. Yo mismo he examinado ya muchas variantes de racimos de contacto fractales construidos por iteración. La comparación detallada de ambas listas es, por desgracia, complicada y no me detendré en ello.

Démonos pues por satisfechos con la conclusión un tanto vaga de que, según parece, los elementos fractales esenciales del problema de percolación de Bernouilli quedan bien ilustrados por los  $\sigma$ -racimos no aleatorios que llenan el espacio definidos en este capítulo. La principal debilidad de este modelo es que, aparte de lo dicho, es completamente indeterminado, y puede acomodarse a cualquier grado de irregularidad y fragmentación observado. Por lo que a la topología se refiere, véase el capítulo 14.

**MODELO DE RACIMOS CRÍTICOS.** Consideremos ahora los racimos críticos, esto es, aquellos para los que  $p = p_{\text{crit}}$ . Para representarlos, se extrapola un  $\sigma$ -racimo recurrente según la manera indicada en secciones anteriores. Luego se trunca deteniendo la interpolación cuando el corte inferior llegue al tamaño de las celdas de la red original.

**MODELOS DE RACIMOS NO CRÍTICOS.** Para extender esta representación geométrica a los racimos no críticos, es decir, a aquellos para los que  $p \neq p_{\text{crit}}$ , buscamos fractales con un corte inferior positivo y un corte superior finito. Por razones analíticas, la extensión del mayor racimo de cobre tiene que ser del orden de  $\xi$  cuando  $p < p_{\text{crit}}$  e infinita cuando  $p > p_{\text{crit}}$ . Ambos resultados se pueden realizar fácilmente. Así, por ejemplo, se puede partir del mismo generador que en el subapartado anterior y, en vez de extrapolarlo de forma natural, se lo inicia con alguna de las figuras siguientes



**RACIMOS SUBCRÍTICOS.** El iniciador de la izquierda, preparado para  $p < p_{\text{crit}}$ , está formado por cuadrados de lado  $1/2 \xi$ . Colocaremos el generador elegido *hacia dentro* sobre el lado izquierdo del iniciador y *hacia fuera* sobre el derecho. Cada cuadrado del iniciador se transformará en un racimo atípico de longitud  $\xi$  rodeado de muchos racimos típicos de longitud  $< \xi$ .

**RACIMOS SUPERCRÍTICOS.** El iniciador de la derecha, preparado para  $p > p_{\text{crit}}$ , está formado por las líneas de la red cuadrada original cuyas coordenadas  $x$  o  $y$  son números pares. De cada nodo de coordenadas pares salen cuatro enlaces, y el generador escogido se coloca siempre a la izquierda. En el caso especial en que el generador de costas no tenga lazos ni enlaces colgantes, la figura resultante es una variante no aleatorizada y sistematizada de un modelo tosco de racimos basado únicamente en «nodos y enlaces».

Nótese que la representación geométrica fractal deduce los racimos no críticos a partir de los críticos, mientras que los físicos prefieren considerar los racimos críticos como límite de los no críticos para  $\xi \rightarrow \infty$ .

## La $D_C$ de los racimos de Bernouilli críticos

El valor de  $D_C$  se puede deducir inmediatamente, ya sea a partir del exponente  $D/D_C = E/D_C$  de la fórmula  $Nr(M > \mu)$ , o del exponente  $Q = 2D_C - D = 2D_C - E$  de la fórmula de  $\langle M(R) \rangle$ . Usando las letras griegas  $\tau$ ,  $\delta$  y  $\eta$  con el significado habitual en este contexto, encontramos que  $E/D_C = \tau - 1$  y  $2D_C - E = 2 - \eta$ . Por tanto,

$$D_C = E/(\tau - 1) = E/(1 + \delta^{-1}),$$
$$\text{y } D_C = 1 + (E - \eta)/2.$$

Debido a las relaciones entre  $\tau$ ,  $\delta$  y  $\eta$  establecidas por los físicos, ambas fórmulas para  $D_C$  son equivalentes. Y a la inversa, su equivalencia no reside sólo en la física, puesto que se sigue de la geometría.

Harrison, Bishop y Quinn (1978), Kirkpatrick (1978) y Stauffer (1979) obtienen independientemente la misma  $D_C$ . Parten de las propiedades de los racimos con  $p > p_{\text{crit}}$ , con lo que su resultado viene expresado en función de los diferentes exponentes críticos ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  y  $\sigma$ ). Y sus deducciones no presuponen explícitamente una representación fractal subyacente. Un ejemplo de los peligros inherentes a este planteamiento del problema, de los que ya hemos hablado, lo tenemos en el hecho de que Stanley (1977) se confundiera al avanzar que  $Q$  y  $D_C$  son dos dimensiones igualmente legítimas.

Para  $E = 2$ , el valor numérico es  $D_C = 1,89$ , que es compatible con la evidencia empírica obtenida mediante un procedimiento conocido en otras formas. Tomamos una  $r$ , que *no* tiene por qué ser de la forma  $1/b$  (con  $b$  entero). Tomamos luego un gran remolino, que será simplemente una red cuadrada o cúbica de lado igual a 1. Lo enlosamos luego con subremolinos de lado  $r$ , contamos el número  $N$  de cuadrados o de cubos que intersecan el racimo y calculamos  $\log N / \log(1/r)$ . Repetimos luego el mismo proceso para cada subremolino no vacío de lado  $r$ , formando subsubremolinos de lado  $r_2$ , y continuamos mientras sea posible. Los resultados más significativos se obtienen para  $r$  próximo a 1. Algunas simulaciones primitivas dieron la estimación sesgada  $D^+ \sim 1,77$  (Mandelbrot 1978h, Halley y Mai 1979), pero simulaciones de más alcance (Stauffer 1980) confirmaron el valor  $D$ .

□ La  $D^+$  experimental sesgada es muy próxima a  $Q$ , cosa que parecía confirmar los argumentos teóricos de Stanley, Birgenau, Reynolds y Nicoll (1976) y de Mandelbrot (1978h), que estaban equivocados al pretender que la dimensión es  $Q$ . S. Kirkpatrick me hizo ver el error. Otra estimación incorrecta distinta y anterior a las citadas se encuentra en Leath (1976). ■

## *Los cipreses de Okefenokee*

Cuando se observa desde un avión un bosque no «cuidado» sistemáticamente, los linderos recuerdan la costa de una isla. El contorno de cada macizo de árboles es sumamente accidentado o festoneado, y cada macizo grande lleva un rastro de macizos satélites de área variable. Mi sospecha de que estas formas podrían obedecer las leyes de Richardson y/o de Korčak ha sido efectivamente confirmada por un estudio no publicado de la marisma de Okefenokee (Kelly 1951) hecho por H. M. Hastings, R. Monticciolo y D. Vunkannon. El patrón parcheado que genera el ciprés es grande, con  $D \sim 1,6$ ; en cambio, el producido por los árboles de hoja grande es mucho menos pronunciado, con  $D$  próxima a 1. Mis informantes señalan la presencia de una variedad de escalas impresionante, basándose tanto en la inspección personal como en el examen de mapas de vegetación. Hay un corte inferior de unos 40 acres, debido probablemente a la fotografía aérea.

En el capítulo 6 tratábamos las curvas planas de Koch que satisfacen  $D < 2$  y carecen de puntos dobles, por lo que se las puede denominar autoevitantes o sin ramificaciones. A su vez, el capítulo 7 trataba de las curvas de Peano en las que, al pasar al límite, se llega inevitablemente a un conjunto denso por doquier de puntos dobles. En este capítulo abordaremos el paso siguiente y estudiaremos ejemplos de figuras autosemejantes con un grado de ramificación arbitrario: curvas planas con  $1 < D < 2$ , curvas en el espacio con  $1 < D < 3$  y superficies con  $2 < D < 3$ . Una curva ramificada autosemejante tiene una infinidad de puntos dobles.

La matemática de este capítulo es antigua (aunque sólo sea conocida por unos pocos especialistas), pero su aplicación a la descripción de la naturaleza es totalmente nueva.

### *El tamiz de Sierpinski considerado como monstruo*

Propongo la expresión *tamiz de Sierpinski* para referirnos a la figura de la lámina 141. En la lámina 143 se muestra una generalización tridimensional.

Hahn (1956) comenta lo siguiente: «Se dice que un punto de una curva es un punto de ramificación cuando la frontera de un entorno arbitrariamente pequeño corta la curva en más de dos puntos... La intuición parece indicar la imposibilidad de que una curva esté formada exclusivamente de... puntos de ramificación. Esta convicción intuitiva fue refutada por la curva de Sierpinski..., *cuyos puntos son todos de ramificación*».

### *La torre Eiffel: fuerte y ligera*

De nuevo la opinión de Hahn carece por completo de originalidad, y su poco habitual «parece indicar» es una frase prudentemente elegida.

Tomo prestado de la ingeniería mi primer contraejemplo. (Como ya razoné antes de referirme a los ordenadores al final del capítulo 12, no tiene nada de ilógico que incluyamos los sistemas de la ingeniería de estructuras en esta obra que se ocupa de la naturaleza.)

Sostengo que (bastante antes de von Koch, Peano y Sierpinski) la torre que Gustave Eiffel construyó en París incorpora la idea de curva fractal llena de puntos de ramificación.

En una primera aproximación, la torre Eiffel está formada por cuatro estructuras en forma de A. Cuenta la leyenda que Eiffel escogió la A para expresar el *Amor* por su obra. Las cuatro Aes coinciden en el vértice y cada dos Aes vecinas tienen un lado común. A su vez, el conjunto está rematado por una torre recta.

Sin embargo, ni las Aes ni la torre están construidas con vigas macizas, sino con unos entramados colosales. Un entramado es una configuración de elementos interconectados, y no puede ser deformada sin deformar al menos uno de dichos elementos. Un entramado puede ser muchísimo más ligero que una viga cilíndrica que tenga la misma resistencia. Y Eiffel sabía que un entramado cuyos «elementos» son a su vez entramados es más ligero todavía.

El hecho, divulgado por Buckminster Fuller, de que la clave de la resistencia reside en los puntos de ramificación era algo conocido ya por los sofisticados diseñadores de las catedrales góticas. Cuanto más lejos se vaya en la aplicación de este principio más nos acercaremos al ideal de Sierpinski. Dyson (1966, pág. 646) presenta una extrapolación infinita del diseño de la torre Eiffel con la que un ex alumno de Sierpinski pretende introducir unas estructuras interplanetarias a la vez fuertes y de poco peso.

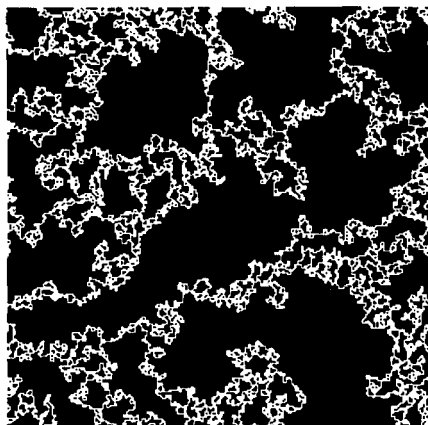
### *Racimos de percolación críticos*

Volvamos a la naturaleza o, para ser más exactos, a una imagen de la naturaleza que se usa en física estadística. Yo creo que el estudio de la percolación en redes *reclama* figuras de la familia del tamiz de Sierpinski. En el capítulo 13, al empezar a tratar de este tema, afirmábamos que los racimos de percolación son fractales. Ahora digo además que la estructura ramificada del tamiz de Sierpinski es un modelo prometedor para la estructura de la espina dorsal de dichos racimos.

Los físicos juzgarán este modelo principalmente en función de que en seguida respondió a las expectativas: Gefen, Aharony, Mandelbrot y Kirkpatrick (1981) demuestran que el modelo permite realizar *exacta-*



mente cálculos habituales en este terreno. Los detalles son, sin embargo, demasiado técnicos para presentarlos aquí, y las razones que originalmente motivaron mi afirmación siguen teniendo interés. Todo empezó con un cierto parecido que percibí entre el tamiz y la espina dorsal de un racimo, como se muestra en esta figura:



La característica más notable reside en las tremas que quedan vacías al eliminar los enlaces colgantes (cuando se reduce el racimo a su espina dorsal) y los racimos totalmente contenidos en el racimo de interés. En segundo lugar, en el capítulo 13 se demuestra que la forma en que el tamiz de Sierpinski es autosemejante es una propiedad muy deseable para un modelo geométrico de los racimos de percolación. Finalmente, ¡la dimensión cuadra con un grado de precisión que difícilmente puede ser casual! S. Kirkpatrick estima que  $D \sim 1,6$  en el plano, sorprendentemente próxima a la  $D$  del tamiz de Sierpinski. Y en el espacio  $D \sim 2,00$ , sorprendentemente próxima a la de la red fractal oblicua de la lámina 205. Además, en Gefen, Aharony, Mandelbrot y Kirkpatrick (1981) se señala que la igualdad entre la  $D$  de la espina dorsal y la del tamiz generalizada se mantiene en  $\mathbb{R}^d$ . Más adelante se presenta una razón más en favor del modelo de tamiz, como una última aplicación de la ramificación.

### *La alfombra triádica de Sierpinski*

Pasemos ahora de las redes triangulares a las ortogonales. Permiten una gran variedad de diseños, dando *curvas* en el plano o en el espacio, o *superficies* en el espacio. Y las curvas que resultan, a pesar de tener un

parecido superficial con el tamiz de Sierpinski, son muy distintas en lo que se refiere al aspecto fundamental de la ramificación, sobre el que volveremos después de definir las.

La generalización inmediata al plano del método cantoriano de borrar el tercio central se inicia con un cuadrado y viene descrito en el pie de la figura 205. El fractal que se obtiene al iterar indefinidamente el proceso es conocido familiarmente como *alfombra triádica de Sierpinski*. Su dimensión es  $D = \log 8 / \log 3 = 1,8927$ .

### *Alfombras fractales no triádicas*

Dado un entero  $b > 3$ , tomamos como de costumbre  $r = 1/b$ , y obtenemos una alfombra con «un gran medallón central», si se toma como iniciador un cuadrado, como trema un cuadrado de lado  $1 - 2r$  concéntrico con el anterior, y como generador un anillo delgado de  $4(b - 1)$  cuadrados de lado  $r$ . La dimensión es  $D = \log [4(b - 1)] / \log b$ . Dado un entero impar  $b > 3$ , se obtiene una alfombra con «un pequeño medallón central», si se toma como trema un cuadrado de lado  $r$  concéntrico con el iniciador y como generador un anillo grueso de  $b^3 - 1$  cuadrados menores. La dimensión es  $D = \log (b^3 - 1) / \log b$ . Así pues, con una alfombra centrada se puede alcanzar cualquier  $D$  arbitraria comprendida entre 1 y 2.

Para  $b \geq 2$  se pueden definir alfombras descentradas. Así, por ejemplo, con  $b = 2$  y  $N = 3$  se puede colocar una trema consistente en un subcuadrado situado en la parte superior derecha. El conjunto límite correspondiente resulta ser un *tamiz* de Sierpinski formado por el triángulo rectángulo isósceles de la mitad inferior izquierda del iniciador.

### *Espuma fractal triádica*

La generalización espacial inmediata de la alfombra triádica consiste en tomar como trema el cubito veintisieteavo central, dejando como residuo una cáscara de 26 cubitos. El fractal resultante tendría que llamarse *espuma fractal triádica*, y su dimensión es  $D = \log 26 / \log 3 = 2,9656$ .

En este caso cada trema está totalmente contenida en el interior de una envoltura ininterrumpida que, a su vez, se escinde en una infinidad de capas, infinitamente delgadas e infinitamente densas. Para unir dos puntos pertenecientes a dos tremas distintas hay que cruzar una infinidad de capas. Me hace pensar en la «espuma espaciotemporal» que, según

J. A. Wheeler y S. W. Hawking, caracteriza la estructura íntima de la materia, aunque no domino el tema lo bastante para exponerlo aquí.

### *La esponja fractal triádica de Menger*

Karl Menger toma una trema distinta, en forma de cruz con dos salientes, uno por delante y otro por detrás. El generador consiste en  $n=20$  cubitos de lado  $1/3$  conectados entre sí. Doce de ellos forman «barras» o cuerdas, y los ocho restantes son nudos o empalmes. El límite (lámina 207) tiene una  $D=\log 20/\log 3=2.7268$ . Lo llamo esponja porque tanto la coagulación como el suero son conjuntos conexos. Se podría pensar en una corriente de agua que fluyera entre dos puntos cualesquiera del suero.

Para obtener una mezcla de cuerdas y membranas, hay que tomar como trema una cruz triádica con una punta saliente hacia delante. Si se va cambiando cada vez la dirección de este saliente, se acaba por obtener una serie de membranas pinchadas. Quizá valga la pena apuntar aquí que pensé en todas esas formas antes de leer a Menger, cuando estaba buscando modelos de intermitencia turbulenta.

### *Esponjas y espumas no triádicas*

Dada una base no triádica  $b>3$ , se obtienen esponjas de Menger generalizadas con tremas formadas por la reunión de tres prismas cuadrados cuyos tres ejes coinciden con los del cubo unidad, de altura 1, y con las aristas basales paralelas a las del cubo. Cuanto más largo es el lado de las bases de dichos prismas, más «ligera» es la esponja resultante. Para  $E=3$ , dicho lado vale  $1-2/b$ , y el generador resultante consiste en  $12b-16$  cubitos de lado  $r=1/b$ . Así pues, la dimensión es  $D=\log(12b-16)/\log b$ . De modo análogo, se puede obtener una esponja «gruesa», aunque sólo con  $b$  impar, con prismas cuadrados de base de lado  $1/b$ . Si  $E=3$ , el generador que queda consiste en  $b^3-3b+2$  cubitos de lado  $1/b$ . En este caso,  $D=\log(b^3-3b+2)/\log b$ .

Las espumas fractales se generalizan de modo análogo. Para  $E=3$ , las espumas de «pared gruesa» dan  $D=\log(b^3-1)/\log b$ , y las espumas de «pared delgada» dan  $D=\log(6b^2-12b+8)/\log b$ . Para agujeros grandes y  $D$  próxima a 2, la espuma se parece a un queso Emmenthal ultraligero, mientras que para agujeros pequeños y  $D$  próxima a 3 se parece a un Appenzell.

### *Distribución del tamaño de los huecos*

Las tremas de las esponjas están conectadas entre sí, pero las de las alfombras y espumas están separadas como los huecos de un polvo de Cantor (capítulo 8). La distribución de sus escalas lineales satisface

$$Nr(\Lambda > \lambda) \propto F \lambda^{-D},$$

donde  $F$  es una constante. Ya estudiamos a fondo esta ley para el caso del polvo de Cantor y las islas y racimos del capítulo 13.

### *El concepto de malla fractal, celosía*

Las *celosías* de la geometría estándar están formadas por líneas paralelas que limitan cuadrados, triángulos u otras figuras regulares iguales. El mismo término se puede aplicar a los fractales regulares en los que dos puntos cualesquiera pueden enlazarse al menos por dos caminos que no tienen ningún otro punto común. Si el grafo no es regular, como en el caso aleatorio, cambiaré el término *celosía* por *malla*.

Sin embargo, un examen más detenido de las celosías fractales y las estándar pone de manifiesto diferencias importantes. La primera de ellas es que las celosías estándar son invariantes por traslación pero no por cambio de escala, mientras que para las celosías fractales vale lo contrario. Una segunda diferencia es que si se contrae cualquier celosía estándar converge hacia el plano entero. Además, algunas celosías planas estándar pueden interpolarse añadiendo nuevas líneas equidistantes y paralelas a cada par de líneas ya existentes. Este proceso puede repetirse indefinidamente y el límite es otra vez todo el plano. Análogamente, cuando una celosía estándar en el espacio puede ser interpolada, el límite es también todo el espacio. Así pues, el límite no es una celosía. En el contexto fractal, por el contrario, el límite de una celosía fractal aproximada es una celosía fractal.

El término *celosía fractal ramificada* puede aplicarse también a las espumas fractales.

### *Las dimensiones fractales de las secciones*

UNA REGLA BÁSICA. En muchos estudios de fractales es importante conocer las dimensiones de las secciones lineales y planas. El hecho básico

(empleado ya en el capítulo 10 para demostrar que en la turbulencia  $D > 2$ ) se refiere a la intersección de una figura fractal plana con un intervalo «independiente del fractal». Se tiene que, si la sección es no vacía, es «casi seguro» que la dimensión es  $D - 1$ .

El valor correspondiente en el caso del espacio es  $D - 2$ .

EXCEPCIONES. Por desgracia es muy difícil ilustrar este resultado en el caso de fractales no aleatorias con ejes de simetría. Los intervalos que uno tendería a considerar paralelos a dichos ejes (es obvio que se trata de intervalos atípicos) y casi *todas* las intersecciones pertenecen al conjunto excepcional en que la regla general falla.

Tómense, por ejemplo, la alfombra de Sierpinski, la esponja triádica de Menger y la espuma triádica. La dimensión casi segura,  $D - 1$ , de las secciones de estas figuras a intervalos son respectivamente:

$$\begin{aligned} & \log(8/3)/\log 3, \\ & \log(20/9)/\log 3 \text{ y } \log(26/9)/\log 3. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea  $x$  la abscisa de un intervalo paralelo al eje  $y$  y de la alfombra de Sierpinski. Si la expresión de  $x$  en base 3 acaba en una sucesión ininterrumpida de ceros o doses, las secciones son a su vez intervalos, con lo que  $D = 1$ , que es más de lo esperado. Por el contrario, si  $x$  acaba en una sucesión ininterrumpida de unos, las secciones son polvos de Cantor, con lo que  $D = \log 2 / \log 3$ , que es demasiado poco. Y si  $x$  acaba en una sucesión periódica de longitud  $M$  formada por  $pM$  unos y  $(1 - p)M$  ceros o doses, la dimensión de la sección es  $p(\log 2 / \log 3) + (1 - p)$ . El valor que esperaríamos para  $D$  se obtiene para  $p \sim 0,29$ . □ Lo mismo pasa si la sucesión de cifras es aleatoria. ■ Aquí aparecen, pues, tres dimensiones, la máxima, la mínima y la media.

En el caso de figuras espaciales tenemos resultados parecidos.

En lo que respecta al tamiz de Sierpinski, la  $D$  casi segura es  $\log(3/2) / \log 2$ , pero los valores de  $D$  que se obtienen con los cortes «naturales» varían entre 0 y 1. Por ejemplo, un intervalo corto que corte casi perpendicularmente uno de los lados del tamiz por su punto medio sólo lo cortará en *ese* punto, con lo que  $D = 0$ .

En parte, la variabilidad de estas secciones especiales es atribuible a la regularidad de las figuras originales. Pero por otra parte es inevitable: el concepto de sección más económica (y no necesariamente por un segmento de recta) está en la base de los conceptos de dimensión topológica y de orden de ramificación, que pasamos a considerar a continuación.

## Los fractales ramificados considerados como curvas o superficies

Como ya se ha dicho, en este ensayo *curva* es sinónimo de «figura conexa de dimensión topológica  $D_T = 1$ ». De hecho, esta frase no acaba de satisfacer a los matemáticos, y una definición más precisa es algo bastante delicado. Afortunadamente, en el capítulo 6 nos bastaba con dar alguna razón por la cual cualquier curva de Koch que tenga  $[0,1]$  por iniciador merezca ser llamada curva, como el propio  $[0,1]$ , que es conexo pero se hace disconexo si le quitamos un punto cualquiera distinto de 0 o 1. El contorno de un copo de nieve es como un círculo, conexo, pero se convierte en disconexo si le quitamos un par cualquiera de puntos.

Ahora nos hará falta una definición algo más rebuscada de la dimensión topológica. Es una definición recurrente. El conjunto vacío tiene  $D_T = -1$ . Para cualquier otro conjunto  $S$ , el valor de  $D_T$  es una unidad mayor que la menor  $D_T$  de cualquier subconjunto de  $S$  que al ser eliminado lo convierta en disconexo. Así, los conjuntos finitos y los polvos de Cantor tienen  $D_T = 1 - 1 = 0$ , pues no hay que quitarles nada (el conjunto vacío) para hacerlos disconexos. Y los siguientes conjuntos se hacen disconexos quitándoles una parte con  $D_T = 0$ : el círculo,  $[0,1]$ , el contorno de un copo de nieve, el tamiz de Sierpinski, la alfombra de Sierpinski, las esponjas de Menger. (En los tres últimos casos basta con evitar las intersecciones especiales que dan lugar a segmentos enteros.) Por tanto, todos estos conjuntos tienen  $D_T = 1$ .

Del mismo modo, una espuma fractal es una superficie con  $D_T = 2$ .

Una demostración alternativa de que  $D_T = 1$  para el tamiz, las alfombras y las esponjas que tienen  $D < 2$ , se basa en que  $D_T$  es un entero  $\leq D$ . Ahora bien, como  $D < 2$ ,  $D_T$  sólo puede ser 1 o 0. Pero los conjuntos en cuestión son conexos y, por tanto,  $D_T$  no puede ser menor que 1. La única posibilidad es  $D_T = 1$ .

### El orden de ramificación de una curva

La dimensión topológica y los conceptos asociados de polvo, curva y superficie nos proporcionan sólo un primer nivel de clasificación. En efecto, dos conjuntos finitos que contengan respectivamente  $M'$  y  $M''$  puntos tienen la misma  $D_T = 0$ , pero topológicamente son distintos. Y un polvo de Cantor es distinto de *cualquier* polvo finito.

Veamos ahora cómo una distinción parecida, basada en el número de puntos de un conjunto  $\square$  su cardinal  $\blacksquare$  puede aplicarse a las curvas, dando

lugar al concepto topológico de *orden de ramificación*, definido por Paul Urysohn y Karl Menger a principios de los años veinte. Este concepto no es citado en muchos textos matemáticos, aparte de los de sus pioneros, pero está resultando cada vez más indispensable en la física, con lo que se va haciendo cada vez más conocido tras haber sido domesticado. Demuestra que las razones para estudiar primero un tamiz y después una alfombra son más profundas que las meramente estéticas o la búsqueda de la completitud.

El orden de ramificación considera la parte de  $S$  con el *menor* número de puntos que hay que sacar para convertir  $S$  en disconexo. Y considera por separado el entorno de cada punto de  $S$ .

EL CÍRCULO. Empecemos tomando para  $S$  una figura de la geometría estándar: una circunferencia de radio 1. Si  $P$  es un punto de dicha circunferencia, una circunferencia  $B$  con centro en  $P$  corta  $S$  en  $R=2$  puntos, excepto si el radio de  $B$  es mayor que 2, en cuyo caso  $R=0$ . El círculo delimitado por  $B$  es lo que se llama un entorno de  $P$ . Así, cualquier punto  $P$  tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras cortan  $S$  en  $R=2$  puntos. Esto es todo lo más que se puede conseguir: si  $B$  es la frontera de un entorno genérico de  $P$ , no necesariamente circular, pero «no demasiado grande»,  $R$  es por lo menos 2. La expresión «no demasiado grande» del enunciado anterior es una complicación, pero por desgracia es inevitable. Se dice que el orden de ramificación del círculo es  $R=2$ . Notemos que es el mismo para todos los puntos del círculo.

EL TAMIZ. A continuación, tomemos para  $S$  un tamiz de Sierpinski, construido por el procedimiento de las tremas. Ahora  $R$  ya no vale lo mismo para todos los  $P$ . Demostraremos, siguiendo a Sierpinski, que, excepto para los vértices del iniciador,  $R$  puede valer  $3=R_{\min}$  o  $4=R_{\max}$ .

El valor  $R=4$  se obtiene para los vértices de cualquier aproximación finita a  $S$  por medio de triángulos. Un vértice de una aproximación de orden  $h \geq k$  es el vértice común  $P$  de dos triángulos de lado  $2^{-k}$ . Como antes, una circunferencia de radio  $2^{-k}$  con  $h > k$  corta a  $S$  en 4 puntos y delimita un entorno arbitrariamente pequeño de  $P$ . Y si  $B$  delimita un entorno «suficientemente pequeño» de  $P$  (en el nuevo sentido de que los vértices del iniciador caigan fuera de  $B$ ) se puede demostrar que corta  $S$  en 4 puntos por lo menos.

El valor  $R=3$  se obtiene para los puntos de  $S$  procedentes del límite de una sucesión infinita de triángulos, cada uno contenido en su predecesor y con vértices distintos de los de este último. Los círculos circunscritos a estos triángulos cortan  $S$  en 3 puntos y definen entornos de  $P$  arbitrariamente pequeños. Se tiene también que, si  $B$  delimita un entorno de  $P$  «suficientemente pequeño» (como antes, los vértices del iniciador de-

ben quedar fuera de  $B$ ), se puede demostrar que  $B$  corta  $S$  en 3 puntos por lo menos.

LAS ALFOMBRAS. Si  $S$  es una alfombra de Sierpinski, el resultado es *radicalmente* distinto. La frontera de cualquier entorno suficientemente pequeño corta  $S$  en una infinidad no numerable de puntos, independientemente de los parámetros  $N$ ,  $r$  o  $D$ .

COMENTARIO. En esta dicotomía finito o infinito, el tamiz se comporta como las curvas estándar, mientras que la alfombra no es diferente del plano.

HOMOGENEIDAD, UNICIDAD. Denotando por  $R_{\min}$  y  $R_{\max}$  los valores mínimo y máximo que toma  $R$  en los puntos de  $S$ , Urysohn demuestra que  $R_{\max} \geq 2R_{\min} - 2$ . Se dice que la ramificación es *homogénea* cuando se tiene  $R_{\max} = R_{\min}$ ; este es el caso cuando  $R \equiv 2$ , como en las curvas simples cerradas, y cuando  $R \equiv \infty$ .

Para otras celosías con  $R_{\max} = 2R_{\min} - 2$ , propongo el término *cuasihomogéneas*. Un ejemplo sencillo y famoso, el tamiz de Sierpinski, es auto-semejante. Los otros ejemplos no aleatorios forman parte de una colección construida por Urysohn (1927), y no son auto-semejantes. Así pues, sólo se conoce un caso en que concurren las condiciones de cuasihomogeneidad y auto-semejanza, el tamiz de Sierpinski. ¿Se podría confirmar rigurosamente esta unicidad aparente?

CELOSÍAS ESTÁNDAR. En estos casos el orden de ramificación varía entre un mínimo de 2 para los puntos que no son vértices de la celosía y un máximo finito y variable para los vértices: 4 (celosías cuadradas), 6 (celosías triangulares y cúbicas) o 3 (celosías hexagonales). Sin embargo, si reducimos la escala de cualquier celosía estándar, ésta pasa de curva a dominio plano, y su ramificación se hace  $R = \infty$ .

Este último hecho queda más claro cambiando lo infinitamente pequeño por lo infinitamente grande. Si dejamos fijo el tamaño de las celdas de la celosía, observamos que para aislar una parte cada vez *mayor* de la misma hay que cortar un número cada vez mayor de puntos.

DEFINICIÓN FORMAL. □ Véase Menger (1932) y Blumenthal y Menger (1970, pág. 442). ■

### *Aplicaciones de la ramificación*

Hagamos frente ahora a una pregunta ya repetida. Sea cual sea el interés que puedan tener las figuras de Sierpinski y Menger para los matemáticos, ¿no es evidente que podrían no tener ningún interés para el estudioso de la naturaleza? La respuesta es tan conocida —¡para nosotros!— como la propia pregunta. El orden de ramificación ya es importante en el «mundo real»



de las aproximaciones finitas que se obtienen cuando el proceso de interpolación que tiende a un fractal se detiene en un cierto corte inferior,  $\epsilon$ .

En efecto, dado un tamiz de Sierpinski aproximado, formado por triángulos rellenos de lado  $\epsilon$ , un dominio cuya escala lineal sea superior a  $\epsilon$  se puede aislar del resto sacando 3 o 4 puntos, cada uno de los cuales pertenece a las fronteras de dos huecos vecinos. Este número (3 o 4) no cambia si se refina la aproximación. Por esta razón, todos los tamices aproximados presentan, desde el punto de vista de la ramificación, un comportamiento semejante al de las curvas.

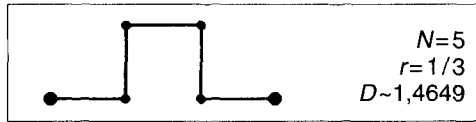
Por el contrario, todas las alfombras tienen la propiedad de que las fronteras de dos agujeros cualesquiera son disjuntas. Para desconectar una aproximación finita de esa figura, en la que no se tienen en cuenta los agujeros de diámetro menor que  $\epsilon$ , hay que sacar segmentos enteros. El número de éstos aumenta cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Whyburn (1958) demuestra que todas las curvas fractales que tienen esta propiedad son topológicamente idénticas  $\square$  homeomorfas  $\blacksquare$  y se caracterizan por no tener ninguna parte que pueda aislarse del resto quitando un único punto.

Debido a los comentarios precedentes, no es ninguna sorpresa que la finitud de la ramificación tenga consecuencias claras cuando se invoca la geometría fractal para cuantificar la diferencia entre una cierta curva fractal y sus dos límites en geometría estándar, a saber, la recta y el plano. En general, *no* basta con conocer la dimensión fractal. Por ejemplo, en Gefen, Mandelbrot y Aharony (1980) se estudian los fenómenos críticos para modelos de Ising en una red fractal y se encuentra que la propiedad más importante  $\square$  si la temperatura crítica es 0 o positiva  $\blacksquare$  depende de la finitud de  $R$ .

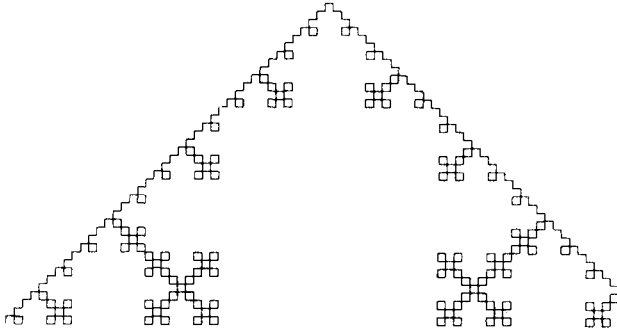
Estamos ahora ya en condiciones de dar una explicación que habíamos postergado. La razón por la cual la espina dorsal de un racimo en la percolación de Bernoulli crítica parece modelarse mejor con un tamiz que con una alfombra se basa en el siguiente resultado de Kirkpatrick (1973). Aun en el caso de redes muy grandes, se puede cortar una espina dorsal crítica eliminando un pequeño número de enlaces, esencialmente constante, del orden de 2. Aun teniendo en cuenta los posibles márgenes de error, parece que este resultado indica muy claramente que  $R < \infty$ .

### *Una forma alternativa de ramificación*

Hay dos variantes del copo de nieve de Koch en las que se consigue la ramificación empleando ramas sin lazos. La primera es una curva plana que se obtiene con un cuadrado como iniciador y con el generador



La figura resultante, que mostramos a continuación de estas líneas, es completamente distinta del copo de nieve.



El ejemplo siguiente es una superficie de volumen cero, área infinita y dimensión  $\log 6 / \log 2 = 2,58497$ . El iniciador es un tetraedro regular. Sobre el cuarto central de cada cara (= el triángulo que tiene por vértices los puntos medios de los lados) se monta un tetraedro semejante al anterior con razón  $1/2$ . Se repite el proceso con cada cara del 24-edro regular cóncavo resultante, y así sucesiva e indefinidamente. A partir del segundo estadio los tetraedros añadidos presentan líneas de autocontacto, sin intersecarse entre sí. Al final acaban recubriendo todo el iniciador. Llamaremos pirámide de Koch a cada cuarto de esta figura.

### *Los secretos de la pirámide de Koch*

Una pirámide de Koch es una figura maravillosa, aparentemente simple, pero que presenta un sinnúmero de cámaras ocultas que desafían la imaginación.

Vista desde arriba, es un tetraedro con un triángulo equilátero por base cuyas otras tres caras son triángulos rectángulos isósceles unidos por los vértices correspondientes a los ángulos rectos. Si se colocan tres pirámides de Koch sobre los lados de un tetraedro regular, se obtiene una caja cúbica.

Levantemos ahora esa pirámide del suelo del desierto. Desde una cierta distancia, vemos que su base se subdivide en cuatro triángulos

equiláteros iguales, pero en vez del triángulo central encontramos la entrada a una «cámara de primer orden», en forma de tetraedro regular cuyo cuarto vértice coincide con la cúspide de la pirámide. Si a continuación nos aproximamos un poco para apreciar mejor los detalles, nos encontramos con que los triángulos regulares que forman los cuartos periféricos de la base y las paredes de la cámara de primer orden tampoco son lisos. Cada uno se abre a una cámara tetraédrica de segundo orden, cuyas caras presentan a su vez una cámara de tercer orden en su parte central. Y así van apareciendo generaciones sucesivas de cámaras cada vez más pequeñas.

La suma de los volúmenes de todas las cámaras es precisamente el volumen de la pirámide de Koch. Por otro lado, si consideramos las cámaras con sus bases pero sin las otras tres caras, entonces no se solapan. Si la pirámide tuviera que ser excavada en un terraplén, los excavadores deberían vaciar todo el volumen, dejando sólo la cáscara. La curva del plano de la base sobre la que se apoyaría esta superficie, así como las «paredes» de las cámaras, serían tamices de Sierpinski.

### *Tremas esféricas y celosías*

Lieb y Lebowitz (1972) hacen una aportación inconsciente a la geometría fractal, rellenando  $R^E$  con bolas cuyos radios son de la forma  $\rho_k = \rho_0 r^k$ , con  $r < 1$ ; el número de bolas de radio  $\rho_k$  por unidad de volumen es de la forma  $n_k = n_0 v^k$ , siendo  $v$  un entero de la forma  $v = (1-r)r^{-E}$ , que nos da una restricción fuerte sobre  $r$ . Así pues, el exponente de la distribución de los tamaños de los huecos es

$$D = \log v / \log(1/r) = E - \log(1-r) / \log r.$$

Se empieza tomando esferas grandes de radio  $\rho_1$  y centros en los vértices de una celosía de lado  $2\rho_1$ . Fuera de estas esferas hay bastantes vértices de una celosía de radio  $2\rho_2$  para tomarlos como centros de una segunda generación de esferas, y así sucesivamente. El proceso de construcción establece las siguientes cotas superiores para  $r$ :

para $E=1$ , $r \leq 1/3$ ;	para $E=2$ , $r \leq 1/10$ ;
para $E=3$ , $r \leq 1/27$ ;	para $E \rightarrow \infty$ , $r \rightarrow 0$ .

En el relleno de  $R^3$  con bolas no solapantes se puede proceder más rápidamente. Por ejemplo, en la línea el máximo de  $r$  es  $1/3$ , ¡el valor que

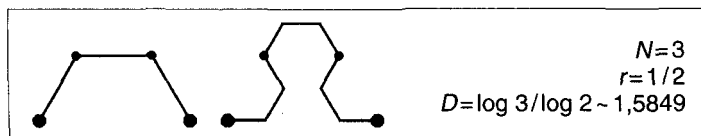
corresponde a un polvo triádico de Cantor! La existencia de polvos de Cantor con  $r > 1/3$  prueba que el relleno unidimensional puede dejar residuos de una dimensión arbitrariamente pequeña. Sin embargo, un relleno más apretado implica una estructura más rica.

### *Anticipo de la lagunaridad*

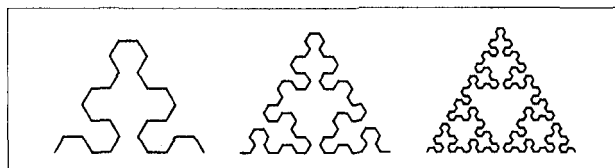
El orden de ramificación  $R$ , junto con las dimensiones  $D_7$  y  $D$ , no bastan para caracterizar del todo un fractal. El concepto adicional de lagunaridad, introducido por mí, es de especial importancia. Los huecos de un fractal muy lagunar son muy grandes, y viceversa. Las definiciones básicas podrían haberse presentado aquí, pero es mejor dejarlas para el capítulo 34.

FIG. 204. *Punta de flecha de Sierpinski*  
(dimensión de la frontera  $D \sim 1,5849$ )

En Sierpinski (1915) el iniciador es  $[0,1]$  y el generador y el segundo terángono son



Los siguientes estadios de la construcción son

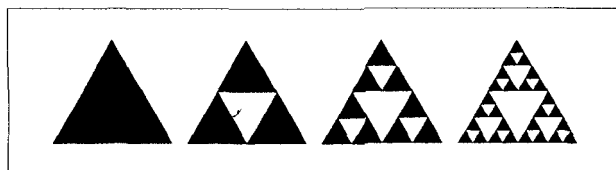


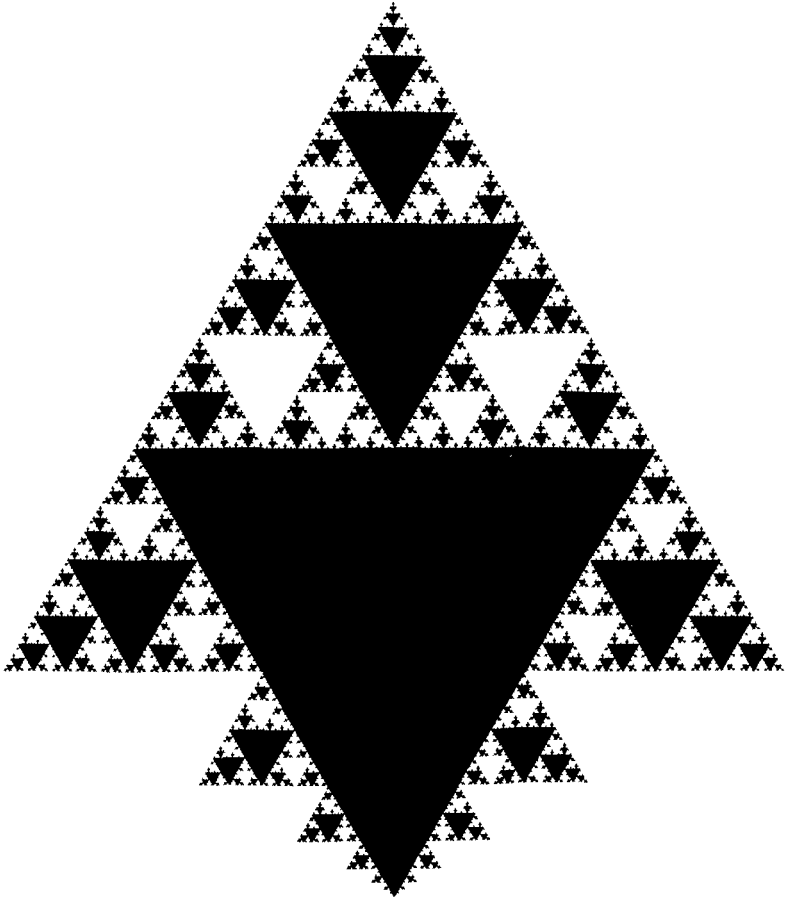
La costa de la porción superior de la lámina 204 (por encima del mayor triángulo relleno de negro) nos da el aspecto de un estadio avanzado de la construcción.

**AUTOCONTACTOS.** Los estadios de orden finito de la construcción no presentan puntos de autocontacto, igual que en el capítulo 6, pero la curva límite tiene una infinidad de ellos.

**PUNTAS DE FLECHA EMBALDOSANTES.** La punta de flecha de la lámina 141 (puesta de lado se convierte en un pez tropical) se define como el sector de la curva de Sierpinski comprendido entre dos pasos sucesivos por un punto de autocontacto, por ejemplo, el punto medio del intervalo  $[0,1]$ . Las puntas de flecha embaldosan el plano, y las baldosas contiguas se engarzan por una especie de velcro extrapolado hasta la pesadilla. (Mezclando las metáforas, las aletas de un pez encajan exactamente con las de otros dos peces.) Además, uniendo cuatro baldosas vecinas convenientemente escogidas se obtiene otra baldosa dos veces mayor.

**LAS TREMAS DEL TAMIZ DE SIERPINSKI.** Llamo «tamiz» a la curva de Sierpinski porque hay una construcción alternativa, basada en extraer «tremas». Este es un método que se utiliza continuamente en los capítulos 8, 31 y 35. El tamiz de Sierpinski se obtiene con el iniciador, el generador y los dos estadios sucesivos que se muestran a continuación:





Este generador de tremas contiene el generador poligonal presentado más arriba como subconjunto propio.

**LA CUENCA.** Me encontré por primera vez con la curva «punta de flecha» sin tener conocimiento del trabajo de Sierpinski, cuando estudiaba cierta cuenca en Mandelbrot (1975m).

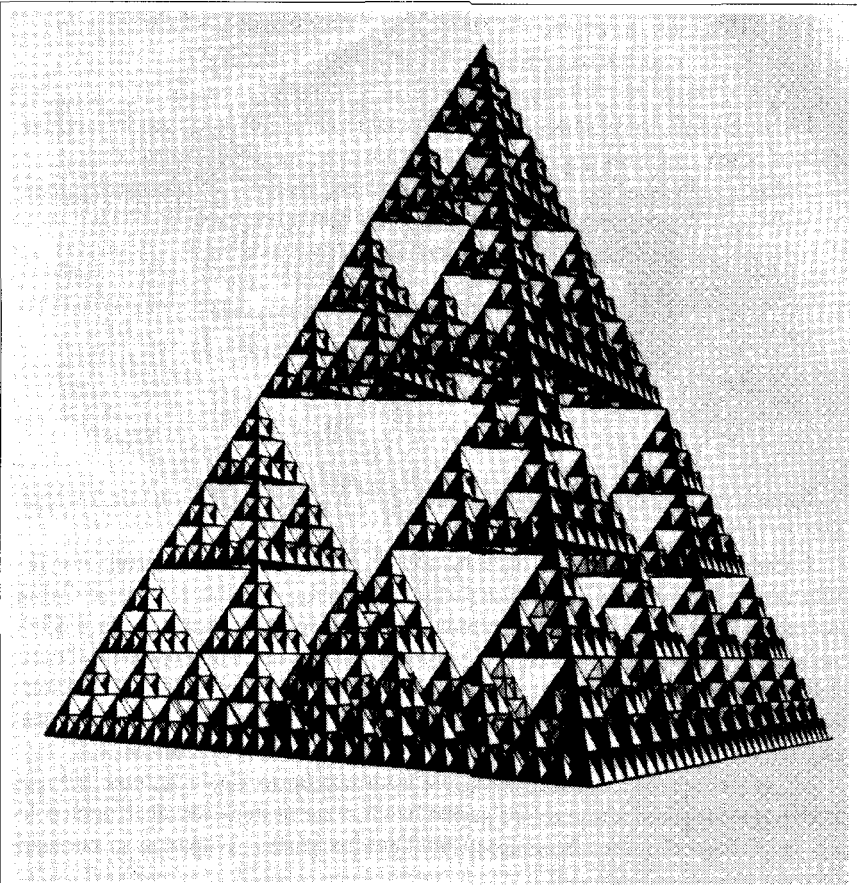


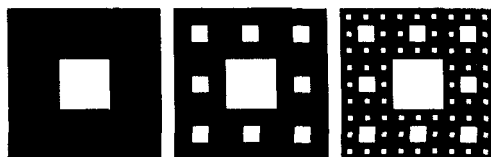
FIG. 205. *Una telaraña fractal oblicua (dimensión  $D=2$ )*

Esta telaraña se obtiene por un proceso iterativo, con  $N=4$  y  $r=1/2$ , tomando un tetraedro cerrado como iniciador y un conjunto de tetraedros como generador.

Su dimensión es  $D=2$ . Proyéctemoslo según la dirección de un segmento que una los puntos medios de dos lados opuestos. El tetraedro iniciador se proyecta sobre un cuadrado, al que llamaremos inicial. Cada tetraedro de la segunda generación se proyecta sobre un subcuadrado, que cubre  $1/4$  del cuadrado inicial, etc. De este modo, la telaraña se proyecta sobre todo el cuadrado inicial. Las fronteras de los subcuadrados se solapan.

FIG. 207. *La alfombra de Sierpinski (dimensión  $D \sim 1,8928$ ) y la esponja de Menger (dimensión  $D \sim 2,7268$ )*

LA ALFOMBRA DE SIERPINSKI. En Sierpinski (1916), el iniciador es un cuadrado macizo, mientras que el generador y los dos pasos siguientes son



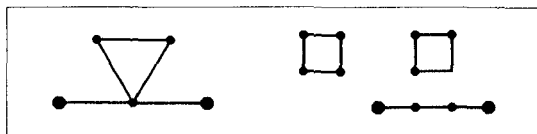
$$N=8, r=1/3, D \sim 1,8928.$$

El área de esta alfombra es nula, en tanto que el perímetro total de los agujeros es infinito.

LAMINA 207. LA ESPONJA DE Menger. El mecanismo de construcción resulta obvio. Proseguido indefinidamente deja como residuo lo que se llama una esponja de Menger. Lamento haberlo atribuido equivocadamente a Sierpinski en ensayos anteriores (reproducido de *Studies in Geometry*, de Leonard M Blumenthal y Karl Menger, con la autorización de la editorial W. H. Freeman & Co., copyright 1970). Las intersecciones de la esponja con las diagonales y las medianas del cubo inicial son conjuntos triádicos de Cantor.

ISLAS FUSIONADAS. La alfombra, así como el tamiz de la lámina 205, se pueden obtener también por otra generalización de la iteración de Koch en la que se permite el autosolapamiento, aunque las partes solapadas se cuentan sólo una vez.

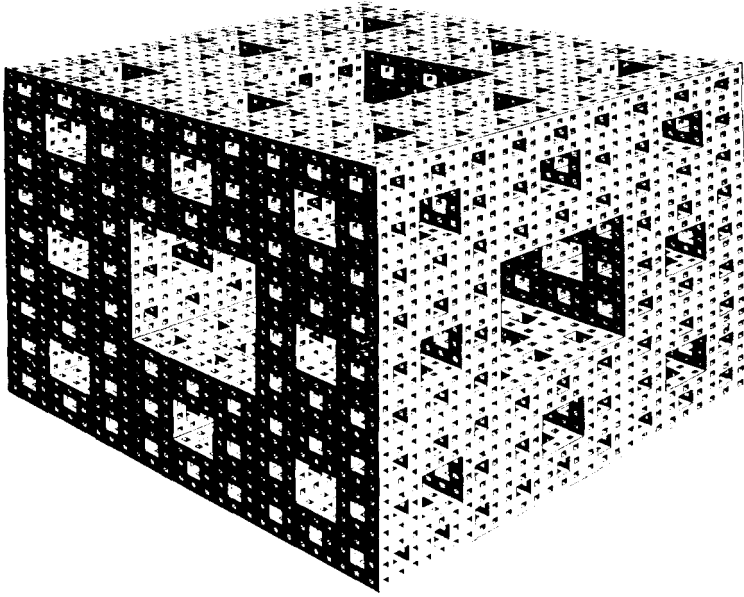
Para obtener un tamiz el iniciador es un triángulo equilátero y el generador es el de la izquierda. Para obtener una alfombra, el iniciador es un cuadrado y el generador el de la derecha



Nos encontramos de nuevo con dos fenómenos que ya aparecieron en el capítulo 13: la costa de cada isla es rectificable, con lo que su dimensión es 1, y la dimensión del tamiz o de la alfombra expresa el grado de fragmentación de la tierra firme en islas en vez de la irregularidad de las costas de éstas.

Sin embargo, el resultado es algo distinto. En el capítulo 13 el mar es conexo, cosa que parece una interpretación topológica correcta del espacio abierto náutico. También es abierto en el sentido topológico de no contener su fron-





tera. La novedad introducida por esta construcción es la posibilidad de que las islas de Koch se «fusionen» *asintóticamente* en una superisla maciza: no hay continente y las costas se enlazan formando una celosía.

□ Topológicamente hablando, la alfombra de Sierpinski es una curva plana universal y la esponja de Menger es una curva espacial universal. Esto es, (véase Blumenthal y Menger, 1970, págs. 433 y 501) estas figuras son respectivamente la curva plana más complicada y la curva más complicada en un espacio de dimensión superior. ■

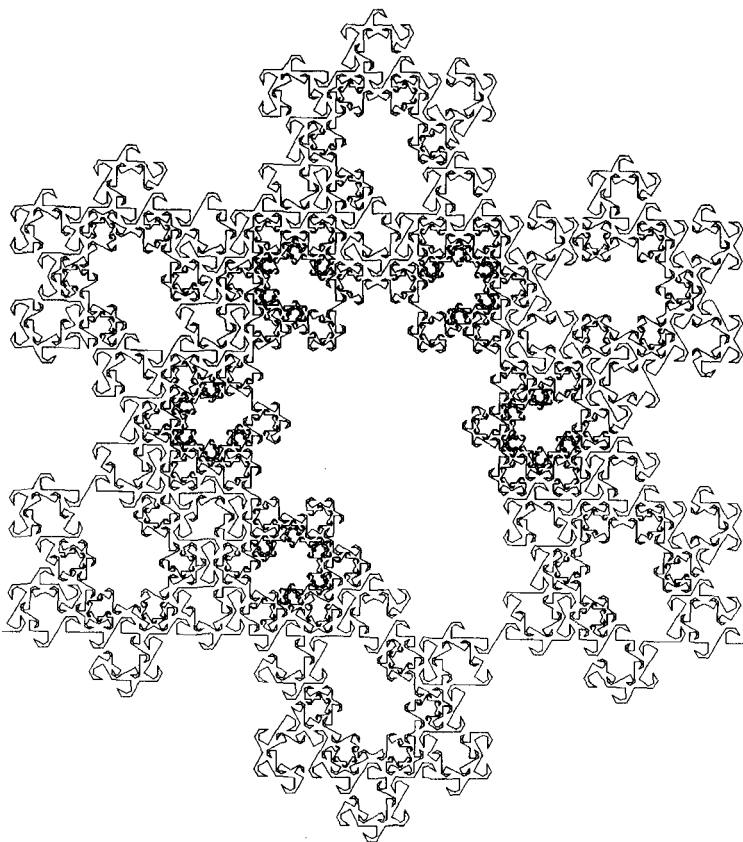


FIG. 208. *Los salones del Palacio del Copo de Nieve*  
(dimensión  $D \sim 1,8687$ )

En un país y una época muy lejanas, el Gran Señor y su séquito asentaron su poder en los espléndidos salones del Palacio del Copo de Nieve. Se produjo un cisma, seguido de una guerra que llegó a un punto muerto, hasta que los Ancianos trazaron una línea que dividía los salones entre ambos bandos, el Norte y el Sur.

ENIGMAS DEL LABERINTO. ¿Quién controla el Gran Salón y cómo se llega a él desde el exterior? ¿Por qué algunos salones no están orientados hacia ninguno de los puntos cardinales? Para pistas, véase el Arbol de los Monos de la lámina 57.

V  
Fractales no escalantes



Las curvas, superficies y polvos fractales que se describen y domestican en esta parte del libro para sus posibles aplicaciones científicas son escalantes en un sentido asintótico o con alguna otra limitación.

Este primer capítulo se concentra en las superficies que ocupan un volumen positivo (¡no nulo!). ¡Vaya combinación disparatada de características contradictorias! ¿No habremos llegado ya por fin a unos monstruos matemáticos sin ninguna utilidad para la filosofía natural? Otra vez la respuesta es negativa sin ningún género de duda. Mientras creían huir de la naturaleza, dos famosos matemáticos puros preparaban sin saberlo los útiles precisos que yo (entre otros) necesitaba para comprender la geometría de... la carne.

### *Polvos de Cantor de medida positiva*

Como paso preliminar revisaremos la construcción cantoriana del conjunto triádico  $C$ . El hecho de que tenga una longitud nula (o en términos más rebuscados, que su medida lineal sea cero) se explica porque la suma de las longitudes de las tremas centrales es  $1/3 + 2/3^2 + \dots + 2^k/3^{k+1} \dots = 1$ .

Pero el hecho de que  $C$  sea totalmente desconexo, y que su dimensión topológica sea por tanto  $D_T=0$ , es independiente de las longitudes de las tremas. Es consecuencia de que, en cada paso de la construcción, cada segmento creado en el paso inmediatamente anterior es dividido en dos quitando una trema centrada en el punto medio del segmento «huésped». Si denotamos por  $\lambda_k$  la razón de las longitudes de la trema y del huésped, la longitud acumulada de los segmentos que quedan después de  $K$  pasos es  $\prod_0^K (1-\lambda_k)$ . Cuando  $K \rightarrow \infty$ , dicho producto disminuye hasta un límite que denotaremos por  $P$ . En la construcción original de Cantor,  $\lambda_k \equiv 2/3$ , con lo que  $P=0$ . Pero siempre que  $\sum_0^\infty \lambda_k < \infty$ , se tiene que  $P > 0$ . En tal caso el conjunto residual  $C_*$  tiene una longitud positiva  $1-P$ . Este con-

junto no es autosemejante, y por tanto no tiene dimensión de semejanza, pero la definición de Hausdorff-Besicovitch (capítulo 5) nos lleva a  $D=1$ . De  $D>D_T$  se sigue que  $C_*$  es un conjunto fractal. Como  $D$  y  $D_T$  son independientes de las longitudes  $\lambda_k$  de las tremas, la descripción de  $C_*$  que nos darán sus valores será puramente superficial.

En el plano, la construcción es aún más diáfana. Arránquese al cuadrado unidad una cruz de área  $\lambda_1$  dejando cuatro baldosas cuadradas. Sáquese de cada una de éstas una cruz de área  $\lambda_2$ . Esta cascada genera un polvo,  $D_T=0$ , de área  $\prod_0^\infty (1-\lambda_k)$ . Si esta área no es nula,  $D=2$ .

En un espacio de dimensión  $E$ , y por un procedimiento análogo, se puede obtener un polvo de volumen positivo, con  $D_T=0$  y  $D=E$ .

### Variando lentamente $\log N/\log(1/r)$

□ Aunque los polvos de Cantor con longitud, área o volumen positivos no tienen dimensión de semejanza, resulta útil definir  $rk=(1-\lambda_k)/2$  e investigar las dimensiones formales definidas por  $D_k=\log N/\log(1/r_k)$ .

□ Cuando  $D_k$  varía lentamente tenemos una realización de lo que en el capítulo 3 llamábamos dimensión efectiva, al describir un ovillo de hilo. En el caso de la recta, la dimensión  $D=1$  del conjunto  $C_*$  es el límite de  $\log 2/\log(1/r_k)$ . Además, no es necesario que  $\sum \lambda_k < \infty$  para que  $D=1$ , basta con que  $\lambda_k \rightarrow 0$ . En consecuencia, hay tres tipos de polvos de Cantor lineales: (a)  $0 < D < 1$  y longitud  $=0$ , (b)  $D=1$  y longitud  $=0$ , y (c)  $D=1$  y longitud  $>0$ .

□ Una categoría análoga a (c) se da también en las curvas de Koch. Basta con cambiar el generador en cada paso, de modo que  $D$  tienda a 2. Tómese, por ejemplo,  $r_k=(1/2)k$ , y para  $N_k$  (y en consecuencia para  $D_k$ ) el valor máximo que mencionábamos en el pie de la lámina 80. El límite presenta una notable combinación de propiedades: su dimensión fractal,  $D=2$ , no es normal para una curva, pero su dimensión topológica es la estándar,  $D_T=1$ , y su área es nula.

□ Las mismas propiedades coexisten en el movimiento browniano (capítulo 25), pero aquí se han obtenido sin puntos dobles.

□ La dimensión formal puede también desviarse de  $D=2$ . Por ejemplo, a partir del  $k$ -ésimo paso de un árbol que recubre una zona plana se podría continuar con otros pasos que llevaran a  $D < 2$ . El resultado podría ser útil para modelizar ciertos árboles fluviales que, por encima de un corte inferior  $\eta$ , parecen recubrir el plano, pero en los que la irrigación es menos completa a escalas más finas. Esta  $\eta$  sería muy grande en los desiertos y muy pequeña en las junglas pantanosas, quizá igual a 0 en este

caso. La dimensión efectiva de tales ríos sería  $D=2$  para las escalas superiores a  $\eta$ , y  $D<2$  para las escalas inferiores. ■

### *Curvas de área positiva*

Como nuestra visión intuitiva de los polvos es un tanto imperfecta, la idea de polvos de longitud o volumen no nulos no acaba de resultar incómoda. Pero las *curvas* de área positiva son más difíciles de aceptar. Así pues, desde que Lebesgue (1903) y Osgood (1903) demostraron que no nos queda más remedio que aceptarlas, vinieron a reemplazar las curvas de Peano en el papel de monstruos supremos. Después de describir un ejemplo, demostraré que el solo pensamiento es peor aún que la realidad: en un sentido absolutamente literal, las superficies de volumen positivo están muy cerca del corazón humano.

La idea consiste en generalizar el proceso de desplazamiento del punto medio expuesto en la lámina 43. De aquella construcción retenemos las bahías y promontorios, siendo cada uno un triángulo cuya base está centrada en el punto medio de la base de la marisma. El elemento nuevo es que los tamaños relativos  $\lambda_k$  de las bahías y promontorios no son constantes, sino que tienden a 0 a medida que  $k$  aumenta, de modo que  $\prod_0^\infty (1-\lambda_k) > 0$ . Ahora bien, como el área recubierta por la marisma no tiende a 0, tenemos que para el límite de la marisma se cumple  $D=2$ . Pero por otra parte, es totalmente distinto de un conjunto estándar de dimensión 2. Aparte de no tener puntos interiores, es una curva con  $D_T=1$ , pues el entorno de cada punto puede ser separado del resto del conjunto eliminando sólo dos puntos.

La construcción anterior sigue el método de Osgood (1903), simplificando su caprichosa manera de hacer que una construcción artificial sea más fácil de seguir. Pero la utilidad de un descubrimiento no debe juzgarse por las razones que lo motivaron.

### *La geometría de las arterias y las venas*

Para citar a Harvey (1628): «Podemos decir que el movimiento de la sangre es circular, en el mismo sentido que Aristóteles dice que el aire y la lluvia emulan el movimiento circular de los cuerpos superiores... Y análogamente, por el movimiento de la sangre,... las distintas partes del cuerpo son nutridas, cuidadas y avivadas por la sangre más perfecta, cálida, vaporosa, espiritosa y nutritiva; la cual, por otra parte, debido a su

contacto con dichas partes, se enfría, coagula y, por así decirlo, se desgasta».

La imagen de la circulación sanguínea elaborada por Harvey lleva implícita la idea de que, a una distancia muy pequeña de casi cada punto del cuerpo, se encuentran una arteria y una vena. (Véase también *El mercado de Venecia*.) En esta imagen se prescinde de los capilares, pero en una primera aproximación es mejor imponer que *infinitamente cerca de cada punto* hay tanto una arteria como una vena excepto, claro está, en el caso de los puntos *interiores* a las arterias (o las venas), que no pueden estar infinitamente cerca de una vena (o de una arteria).

Dicho de otro modo (¡aunque esta reformulación hace que el enunciado suene mucho más raro!): cualquier punto del tejido extravascular tiene que pertenecer a la frontera que separa ambas redes sanguíneas.

Un segundo factor importante es que la sangre es cara, por lo que el volumen total de arterias y venas debe ser sólo una pequeña fracción del volumen total del cuerpo, siendo el resto tejidos.

### *Los monstruos de Lebesgue-Osgood constituyen la parte esencial de nuestra carne*

Desde un punto de vista euclídeo, estas condiciones implican una contradicción exquisita. Se trata de una figura que, por una parte, tiene que ser topológicamente bidimensional, pues constituye la frontera común de dos figuras topológicamente tridimensionales, y por otra parte no sólo debe tener un volumen no despreciable comparado con el de las dos figuras que separa, sino ¡mucho mayor!

Una de las virtudes del enfoque fractal de la anatomía es que en este marco ambas condiciones son perfectamente compatibles. Una variante espacial de la construcción de Osgood descrita en la penúltima sección cumple todas las condiciones impuestas al modelo de sistema vascular.

En este modelo, las venas y las arterias son dominios estándar, pues en su interior caben pequeñas bolas (¡las células sanguíneas!). Además, los vasos ocupan sólo una pequeña fracción del volumen total. El tejido, en cambio, es muy distinto; no tiene ninguna parte que no esté atravesada a la vez por una arteria y una vena. Y es una superficie fractal: su dimensión topológica es 2 y su dimensión fractal 3.

Como ya se ha dicho, estas propiedades dejan de sonar a extravagancia. No importa que aparecieran por vez primera en una artificioso vuelo matemático más allá del sentido común. He demostrado que son intuiti-



vamente inevitables, que ¡los monstruos de Lebesgue-Osgood constituyen la parte esencial de nuestra carne!

### *Nuestra intuición, antes y después*

La combinación de los conductos pulmonares y su sistema vascular se presenta también como una construcción muy interesante, en la que tres conjuntos —arterias, venas y bronquiolos— comparten una frontera común. El primer ejemplo de conjunto de este tipo se debe a Brouwer. Si se presenta de este modo, el montaje de Brouwer concuerda perfectamente con nuestra intuición. Pero para contemplarlo desde una perspectiva histórica tenemos que volver a nuestro portavoz del punto de vista convencional, Hans Hahn.

«La intuición parece indicar que los puntos comunes a tres países sólo se dan en puntos aislados... La intuición no puede comprender la estructura de Brouwer, aunque el análisis lógico nos obligue a aceptarlo. Una vez más [nos encontramos con que] en cuestiones geométricas simples y elementales, la intuición es una guía nada fiable. Es imposible [dejar] que sirva como punto de partida o de base de ninguna disciplina matemática. El espacio de la geometría es... una construcción lógica...

»[Sin embargo, si] nos vamos acostumbrando más y más a manejar estas construcciones lógicas; si acaban por entrar en los programas académicos; si, por así decirlo, lo aprendemos en el regazo de nuestras madres, como ahora aprendemos la geometría euclídea tridimensional, entonces a nadie se le ocurrirá decir que estas geometrías son contrarias a la intuición.»

Este libro demuestra que Hahn está completamente equivocado. Para domesticar sus propios ejemplos, hay que entrenar nuestra intuición *actual*, pero esto no debe suponer, en mi opinión, ningún cambio discontinuo. Hahn equivoca el diagnóstico y sugiere un tratamiento letal.

La intuición geométrica ya ha reconocido hace mucho tiempo la necesidad del auxilio de la lógica y sus extraños y tortuosos métodos. ¿Por qué tendría la lógica que estar siempre intentando huir de la intuición?

En cualquier situación, la idea que tiene un matemático típico de qué es intuitivo es muy poco de fiar. Es imposible tomar dicha idea como guía en la construcción de modelos; la matemática es demasiado importante para dejarla en manos de los fanáticos de la lógica.

En este capítulo estudiaremos árboles fractales filiformes y otras fractales cuasiescalantes, esto es, escalantes salvo un residuo fractalmente despreciable. Se observa que dichas fractales son no uniformes, en el sentido de que  $D$  y/o  $D_T$  toman valores distintos para distintas partes de tales conjuntos. Por contra, si echamos una mirada atrás, vemos que todas las fractales consideradas hasta ahora son uniformes.

### *El concepto de conjunto residual escalante*

INTERVALOS ESTÁNDAR. El intervalo *semiabierto*  $]0,1]$ , que contiene el extremo derecho pero no el izquierdo, es escalante, pues es la unión de  $N=2$  réplicas reducidas de sí mismo,  $]0,1/2]$  y  $]1/2,1]$ . Por el contrario, el intervalo *abierto*  $]0,1[$  no es escalante, ya que además de las  $N=2$  réplicas reducidas de sí mismo,  $]0,1/2[$  y  $]1/2,1[$ , contiene también el punto medio  $x=1/2$ . Propongo para este punto el nombre de *residuo escalante*. Para el cálculo de  $D$ , y a otros muchos efectos, no tiene ninguna importancia. Un físico diría que es de un orden de magnitud menor que el del todo y las partes.

A partir del ejemplo anterior uno está tentado de considerar *todos* los términos residuales como complicaciones rebuscadas que no afectan en nada el resultado del cambio de escala, pero en ejemplos análogos en los que intervienen fractales, que calificaré de *no uniformes*, el residuo puede ser sorprendentemente significativo. Un fractal no uniforme es la suma (o la diferencia) de varias partes con dimensiones fractales y topológicas distintas. Ninguna de dichas partes se puede despreciar del todo, aunque lo pueda ser tanto en el sentido fractal como en el topológico. Estos dos puntos de vista chocan a menudo, y sus efectos son importantes e interesantes.

POLVOS DE CANTOR Y PUNTOS AISLADOS. □ Constrúyase un polvo de Cantor dividiendo  $[0,1]$  en  $b=4$  partes y guardando  $[0,1/4]$  y  $[3/4,1]$ . La

construcción alternativa consistente en borrar  $]1/4, 1/2[$  y  $]1/2, 3/4[$  da el mismo polvo más el punto residual  $1/2$ . Este residuo aislado no es fractal, pues tanto  $D$  como  $D_T$  valen 0.

□ En la generalización al espacio  $R^E$ , el polvo de Cantor satisface  $D_T = 0$  y  $D > 0$ , en tanto que para el residuo no fractal se tiene  $D_T = D = E - 1$ . Podría muy bien suceder que el residuo dominara al polvo en sentido topológico y/o en sentido fractal. ■

### *Esqueletos de árboles fractales cuyos términos residuales son intervalos*

En la lámina 221 se muestran ejemplos de magnolias con tallos infinitamente delgados. No pueden tener vida, y su calidad como modelos de plantas se mejora sustancialmente en el capítulo 17. Sin embargo, los esqueletos arbóreos tienen bastante interés en muchos capítulos de la matemática. Según el topólogo son idénticos, pues para él cualquier árbol consiste en una infinidad de hilos elásticos, y nuestros árboles se pueden deformar los unos en los otros por estiramiento o por contracción. Sin embargo, intuitivamente estos árboles son distintos, y también lo son como fractales.

**LAS PUNTAS DE LAS RAMAS.** Un árbol es la suma de dos partes, las ramas propiamente dichas y las puntas de las ramas, cuyas dimensiones se entremezclan de un modo muy interesante. La parte más fácil de estudiar es el conjunto de las puntas. Es un polvo fractal parecido a muchos otros que ya conocemos bien. Es un escalante con  $N=2$  y un valor de  $r$  comprendido entre  $1/\sqrt{2}$  y 0. Por tanto,  $D$  vale entre 2 y 0, aunque los valores de  $D$  de los árboles representados varían sólo entre 1 y 2. El ángulo que forman las dos ramas que concurren en cada horcadura es siempre  $\theta$ , y su valor puede variar en un intervalo bastante amplio sin que ello afecte a  $r$  ni a  $D$ . Por tanto, se puede tener una gran variedad de árboles con la misma  $D$ .

Si  $1 < D < 2$ , el árbol se interseca a sí mismo para  $\varepsilon < \theta_{\text{crit}}$ . Así pues, la condición de que no haya autointersección limita la elección de  $\theta$ . Para los árboles de la lámina 155,  $\theta = \theta_{\text{crit}}$ , pero en primer lugar razonaremos como si tuvieran  $\theta = \theta_{\text{crit}} + \varepsilon$ .

**ARBOLES.** A primera vista cada árbol como un todo parece autosemejante, pues cada rama con sus vástagos es una versión a escala reducida del todo. Sin embargo, la unión de las dos ramas que parten de la horcadura principal *no* da el árbol entero a menos que le añadamos un residuo. Intuitivamente, éste no es despreciable ni mucho menos. De hecho uno tiende a dar más importancia a los troncos y las ramas de los árboles que a las puntas de las ramas. Intuitivamente, las ramas «dominan» sobre las puntas.

Con independencia del valor de  $D$ , las puntas de las ramas de un árbol autoevitante forman un polvo, con  $D_T=0$ , mientras que las ramas forman una curva, con  $D_T=1$ , tanto si las puntas se consideran incluidas en las ramas como si no. Topológicamente, pues, las ramas dominan. □ En efecto, para desconectar un punto  $P$  de su entorno hay que borrar 1 (si  $P$  es una punta de rama), 2 (si  $P$  está en el interior de una rama) o 3 puntos (si  $P$  es una horcadura). ■

Veamos ahora el punto de vista fractal. La dimensión de las puntas de las ramas es  $D$ , y la de cada rama es 1. Como conjunto no es escalante, pero su dimensión fractal, definida por la fórmula de Hausdorff-Besicovitch, no puede ser menor que  $D$  ni que 1, y resulta ser el mayor de ambos. Consideremos las dos posibilidades por separado.

ARBOLES FRACTALES. Si  $D>1$ , la dimensión del árbol fractal completo también es  $D$ . Aun cuando las ramas predominen tanto intuitiva como topológicamente, ¡son insignificantes en sentido fractal! Como  $D>D_T$ , el árbol es un conjunto fractal en el que  $D$  mide la abundancia de la ramificación. Nos encontramos, pues, con otra faceta de la dimensión fractal añadida a su papel de medida de la irregularidad y la fragmentación. Cuando en el capítulo 17 pasemos a los árboles no filiformes, nos encontraremos con que una superficie lisa que tenga un número suficiente de «granos» puntiagudos localizados puede convertirse en «algo más» que una superficie estándar.

ARBOLES SUBFRACTALES. Si  $0<D<1$ , por el contrario, la medida lineal total (la longitud acumulada) del árbol es finita y positiva, con lo que su dimensión es necesariamente 1. Por tanto  $D=D_T$ , y el árbol no es fractal.

De hecho, si tomamos las unidades de modo que la longitud del tronco sea  $1-2r$ , las ramas (consideradas como intervalos abiertos) se pueden disponer llenando los huecos de un polvo de Cantor lineal  $C$  contenido en  $[0,1]$ , con el mismo  $N=2$  y la misma  $r$  que las puntas de las ramas. Análogamente, las puntas de las ramas se pueden disponer sobre  $C$ . Vemos que las imágenes de los puntos del árbol agotan completamente el intervalo  $[0,1]$ . Los únicos puntos del árbol que quedan excluidos en esta representación son las horcaduras, pero éstas forman un residuo numerable.

Recordemos el comentario de la lámina 121, en el sentido de que la curva Escalera del Diablo es peculiar sin ser fractal. Si la importancia de tales figuras aumenta, habrá que buscarles un nombre apropiado. Por el momento nos bastará con *subfractales*.

Como último comentario, sustituyamos las ramas rectilíneas por curvas fractales de dimensión  $D^*>1$ . Si  $D<D^*$ , las ramas dominan en lo que

respecta a las propiedades fractales del árbol, y el árbol es un fractal de dimensión  $D^*$ . Pero si  $D > D^*$ , el árbol es un fractal de dimensión  $D$ .

### *Fractales no uniformes...*

Estamos ya preparados para una nueva definición. Diremos que un fractal  $F$  es *uniforme* si la intersección de  $F$  con cualquier disco (o bola) con centro en  $F$  tiene los mismos valores para  $D_T$  y para  $D > D_T$ .

Nos damos cuenta de que las curvas de Koch, los polvos de Cantor, las curvas ramificadas, etc., son fractales uniformes. Pero los esqueletos de los árboles fractales de la sección anterior con  $D > 1$  son fractales no uniformes.

De hecho, se puede decir que los árboles son sólo parcialmente fractales: su intersección con un disco suficientemente pequeño con centro en un punto de una rama no es un fractal, sino que está formada por un intervalo o unos pocos.

### *Bóvedas fractales*

Hasta aquí, hemos utilizado la lámina 221 para ilustrar árboles fractales apenas autoevitantes. En realidad, las puntas de esos árboles confluyen asintóticamente. A consecuencia de ello, el conjunto de las puntas de rama deja de ser un polvo con  $D_T = 0$  para convertirse en una curva con  $D_T = 1$ , sin que cambie por ello su dimensión fractal. Propongo que a esta nueva clase de curvas fractales se las llame *bóvedas fractales generalizadas*. Nótese que la longitud de su sombra vertical aumenta con  $D$ .

Como la luz es de vital importancia para los árboles, es de esperar que las ramas que terminan en los pliegues de una bóveda fractal generalizada acaben por marchitarse. Un diseñador de árboles puede, bien dejar que algunas ramas crezcan y luego se marchiten por falta de luz solar, bien hacer un programa más complicado en el que estas ramas dejen de crecer. Yo me inclinaría por el programa más sencillo.

Cuando  $D < 1$ , la fusión de un polvo para dar una curva es inconcebible. Cuando se intenta llegar al autocontacto disminuyendo el ángulo de apertura  $\theta$ , esto no se consigue hasta que  $\theta = 0$  y el árbol colapsa dando un intervalo. Si, como alternativa, se mantiene la sombra vertical del árbol constante e igual a 1, y se intenta llegar al autocontacto alargando las ramas, nunca se llega al resultado buscado: el árbol tiende a un polvo de Cantor lineal  $C$ , con semirrectas arrancando de cada punto del mismo.

### *Árboles sin término residual*

Los árboles fractales construidos en las secciones anteriores no agotan todas las posibilidades. Recordemos, por ejemplo, la construcción de la página 203. Tomemos alternativamente como generador de Koch una cruz con ramas de longitudes  $r_s$  (superior),  $r_i$  (inferior) y  $r_l$  (laterales), de modo que  $r_s^2 + r_i^2 + 2r_l^2 < 1$ . Cada rama del árbol fractal resultante, por corta que sea, está llena de subramas. Si se excluye el punto raíz, el árbol es un escalante estará término residual.

### *Física de altas energías: haces*

Feynman (1979) cuenta que los árboles fractales le permitieron visualizar y modelizar los «haces» que se forman en los choques frontales de partículas a muy altas energías. Los informes del CERN de G. Veneziano profundizan en el estudio de esta idea..

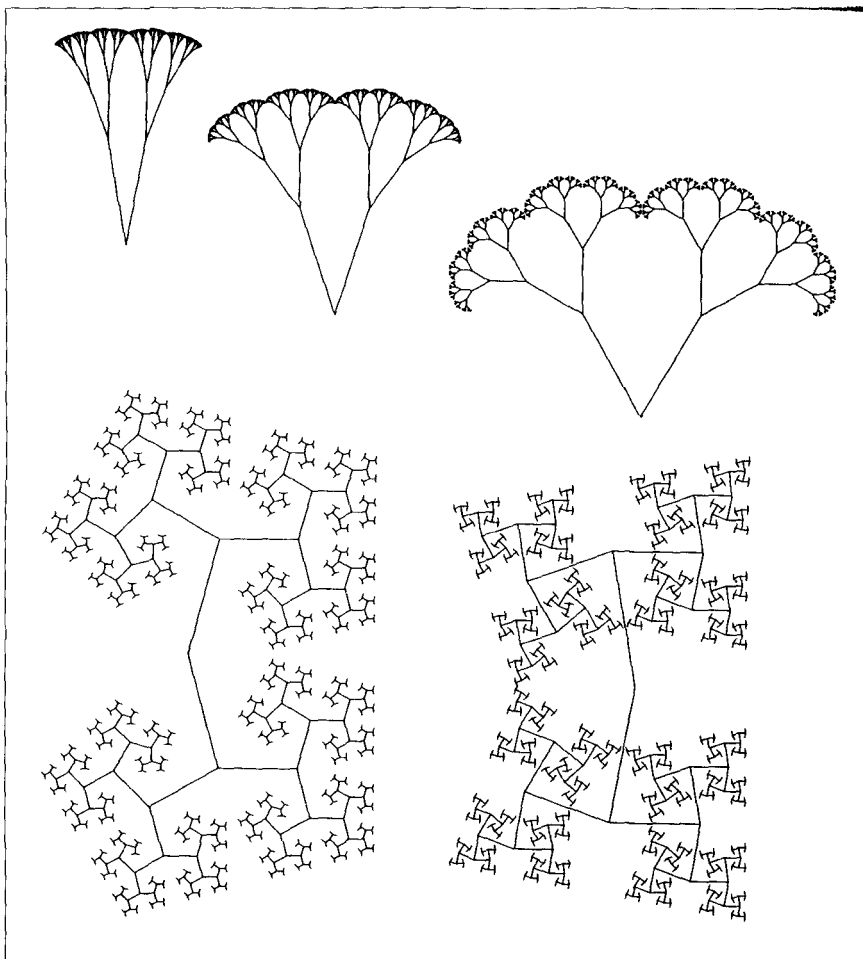


FIG. 221. *Magnolias y bóvedas fractales*

Los troncos y las ramas de los árboles de esta lámina son infinitamente delgados. El ángulo  $\theta$  entre cada par de ramas es siempre el mismo. Las  $D$  varían entre 1 y 2 y, para cada  $D$ ,  $\theta$  toma el mínimo valor compatible con la condición de ser autoevitante.

Para  $D$  apenas superior a 1 (arriba a la izquierda), el resultado parece un pincel, después se va pareciendo más a una escoba. A medida que  $D$  aumenta, las ramas se abren y el perfil de la bóveda se extiende en pliegues ocultos a la luz solar. Nos recuerdan las flores de algunas variedades de la especie *Brassica oleracea*: la coliflor (*B. o. botrytis*) y el brécol (*B. o. italica*). ¿Podría ser importante que parte de las diferencias geométricas entre la coliflor y el brécol fueran cuantificables por una dimensión fractal?

A un francés, el árbol con una  $D$  mayor (abajo a la izquierda) le evocaría las fortificaciones de Vauban. Los valores  $D=2$  y  $\theta=\pi$  dan un árbol que llena un dominio plano. Para poder tomar  $\theta>\pi$  (abajo a la derecha) hay que volver a disminuir la  $D$ , sustituyendo el parecido con una sombrilla por formas retorcidas dignas de las clásicas esculturas danzantes de la India.

En una de las figuras más famosas de *On Growth and Form* (Thompson, 1917) se presentan los cráneos de distintas especies de peces enlazados por una sucesión de transformaciones continuas y suaves, con un fondo euclídeo. Las transformaciones que convierten cada uno de estos árboles en el siguiente comparten una inspiración similar, pero el fondo es muy distinto.

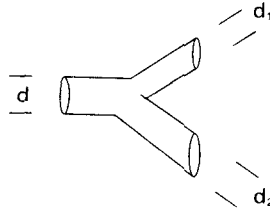


En el presente capítulo se estudian los «árboles» de tubos gruesos empalmados que forman los pulmones, los sistemas vasculares, los árboles de la botánica, las redes fluviales y otros sistemas por el estilo.

Dichos objetos naturales son sumamente familiares y, de hecho, ningún otro sistema natural sirve mejor para ilustrar la idea de una figura que tenga un gran número de escalas lineales distintas. Por desgracia, los árboles son menos simples de lo que parece. No se abordaron antes debido a la dificultad con que nos tropezamos en el capítulo anterior: los árboles no pueden ser autosemejantes. Todo lo más que uno puede esperar es que las puntas de las ramas sí formen un conjunto autosemejante, como se supondrá a lo largo de este capítulo. Además de la dimensión fractal  $D$  de las puntas, en los árboles interviene un segundo parámetro,  $\Delta$ , al que llamaremos exponente diametral. Cuando el árbol es autosemejante aparte de un residuo, como ocurría en el capítulo 16,  $\Delta$  coincide con la  $D$  de las puntas. En caso contrario,  $\Delta$  y  $D$  son características independientes, y tratamos con lo que los biólogos llaman «alometría». Nos encontraremos con ejemplos tanto de  $\Delta = D$  como de  $\Delta < D$ .

### *El exponente diametral $\Delta$*

En sus *Libros de apuntes*, nota n.º 394, Leonardo da Vinci afirma que «La suma de los grosores de todas las ramas de un árbol a una cierta altura es igual al grosor del tronco común (que tienen por debajo)». La expresión formal de esta afirmación es que, antes y después de cada bifurcación, los diámetros de las ramas de un árbol,  $d$ ,  $d_1$  y  $d_2$ ,



satisfacen la relación

$$d^\Delta = d_1^\Delta + d_2^\Delta$$

siendo el exponente  $\Delta=2$ . La consecuencia de esto es la siguiente: si se tiene en cuenta el grosor de las ramas, los árboles de la botánica *no* son autosemejantes ni su corteza llena el espacio. En efecto, para que haya autosemejanza se tiene que cumplir  $\Delta=D$ , y la condición de que casi se llene el espacio implica que  $D$  se acerque a  $E=3$ .

Dicho de otro modo, siempre que la relación anterior se satisfaga,  $\Delta$  es un nuevo parámetro a tener en cuenta junto con  $D$ . Lo llamaremos *exponente diametral*. Mucha gente lo ha considerado, a menudo sin conocimiento mutuo, como prueban las referencias de Thompson (1917 - 1942 - 1961). En este capítulo se demuestra que, para los bronquios,  $\Delta \sim 3$ ; para las arterias,  $\Delta \sim 2$ ; los árboles de la botánica están cerca del  $\Delta=2$  de Leonardo, y para el ancho de los ríos se tiene  $\Delta=2$ . En este capítulo se investigan también algunas de las consecuencias físicas, fisiológicas y geométricas del valor de  $\Delta$ .

▣ PARADIMENSIÓN. En mi *Fractals* de 1977 se decía que  $\Delta$  es una *paradimensión*, pero ya no soy partidario de usar este término. Unas veces  $\Delta$  es una dimensión y otras no, cosa que encontramos también en el exponente de Besicovitch y Taylor (1954; véase el capítulo 39). ▀

### *El árbol bronquial del pulmón*

Como primer ejemplo, la subdivisión que presentan los tubos de aire del pulmón es, a efectos prácticos, autosemejante, con  $\Delta=D$ , y  $D \sim E=3$ .

La forma interna del pulmón no se conoce demasiado bien. Por ello sería instructivo presentar aquí una fotografía real (se tienen ejemplos en Weibel, 1963, y Comroe, 1966). Sin embargo, la política de este ensayo es limitarse a las simulaciones (quizá sea ésta la única ocasión en que haya que lamentarlo). Por tanto, tendremos que conformarnos con una breve descripción verbal. Si reemplazamos el aire del pulmón con plás-

tico no vulcanizado y eliminamos el tejido pulmonar, nos queda un árbol muy densamente ramificado que llena el contorno del pulmón con una compacidad, uniformidad e impenetrabilidad a la vista que no se da en los árboles de la botánica. Entre las dos primeras ramificaciones, que caen fuera de nuestro campo de interés, y las tres últimas, que acaban en los alvéolos (de los que hablamos en el capítulo 12), se producen 15 bifurcaciones sucesivas con una regularidad sorprendente.

De los datos de Weibel (1963) resulta que los segmentos de tubo son semejantes entre sí en primera aproximación, y que  $\Delta \sim 3$ . El flujo de aire es una cantidad determinada y constante que se divide entre las ramas de cada bifurcación, y como el flujo de aire es igual al área de la sección transversal del tubo multiplicada por la velocidad del aire, vemos que esta velocidad varía según  $d^{\Delta-2}$ : el aire se ralentiza a medida que llega a los bronquios más internos.

Es importante que  $\Delta$  valga precisamente 3. Una primera interpretación se basa en un argumento de Murray (1927), presentado en Thompson (1942, pág. 954, o 1961, pág. 129): «La superficie creciente de las ramas implica enseguida un aumento del rozamiento, y una corriente de fluido más lenta, con lo que la capacidad de dichas ramas es mayor de lo que pudiera parecer a primera vista. Se trata de una cuestión de resistencia más que de capacidad; y en términos generales la respuesta es que la razón de la resistencia a la sección recta debe ser la misma en cualquier lugar del sistema, antes y después de cada bifurcación, a fin de que su resistencia total sea la menor posible; la sección recta total de las ramas, pues, tendrá que ser mayor que la del tronco, para compensar la resistencia creciente. Un resultado aproximado, conocido por los estudiantes de hidrodinámica [para un tratamiento moderno, véase Hersfield y Cummings, 1967, y Wilsons, 1967], es que la resistencia es mínima, y la condición se optimiza cuando la razón de ramificación es  $2^{1/3} \sim 1,26$  en todas partes.

Así pues,  $\Delta = 3$  es el mejor valor que se podría esperar, ya sea por un proyecto orientado a unos objetivos o por una selección evolutiva. Naturalmente, el criterio de optimización de Murray es puramente *local*, y el proyectista nunca puede estar del todo seguro de que partes localmente óptimas vayan a encajar unas con otras.

### *Rellenando el 3-espacio con bronquios*

Mi razonamiento fractal alternativo en favor de  $\Delta = 3$  es muy distinto: invoca el efecto de condicionantes geométricos *involuntarios* sobre el

crecimiento del pulmón prenatal y sobre la forma completamente desarrollada de sus tubos. Una ventaja obvia es que la razón de ramificación  $2^{1/\Delta} \sim 2^{1/3}$  no tiene por qué estar codificada genéticamente (como debería ser en la interpretación de Murray).

El dato fundamental es que el crecimiento del pulmón prenatal comienza con un brote, que evoluciona hasta formar un tubo, el cual forma a su vez dos brotes, y cada uno de ellos repite el proceso anterior. Además, este proceso de crecimiento es autosemejante (¡el tronco hace aquí de residuo!) Para justificar la autosemejanza, no hace falta pensar que es lo óptimo, nos basta con que sea lo más simple: el programa regulador del proceso de crecimiento es más corto si cada paso es una repetición del anterior a una escala menor, o a la misma escala después de que el estadio anterior haya crecido. Si esto es así, el resultado del crecimiento está completamente determinado por la razón grosor/longitud de las ramas y por el exponente diametral. Hace falta también una regla que indique cuándo debe detenerse el crecimiento.

Ahora bien, dependiendo del valor de  $\Delta$  (y suponiendo fija la razón grosor/longitud) el crecimiento según estas reglas llega a uno de los tres resultados siguientes: (a) después de un número finito de pasos, las ramas agotan el espacio disponible para el crecimiento; (b) las ramas nunca llegan a llenar más que una parte del espacio accesible, o (c) resulta que el espacio disponible es precisamente el que necesitan. Si se quiere que el límite sea un árbol que llena un dominio espacial no hace falta incorporar instrucciones especiales al programa de crecimiento, pues la competencia por el espacio deja poco lugar para la indeterminación. En las láminas 234 y 235 se muestra una reducción bidimensional del proceso. Se comprueba que, a medida que la razón grosor/longitud tiende a 0, la razón de ramificación que recubre el plano aumenta hasta  $2^{1/2}$ , dando  $\Delta = E = 2$ . Análogamente, la razón de ramificación que llena el espacio correspondiente a ramas infinitamente delgadas es  $2^{1/3}$ , que nos da  $\Delta = E = 3$ .

Como  $\Delta = 3$  corresponde al límite de tubos infinitamente finos, este caso es, de hecho, irrealizable. Y es una pena, pues un árbol formado por bifurcaciones infinitamente delgadas tiene una «piel» que llena un dominio en el espacio. Esta última propiedad podría habernos sugerido una interpretación teleológica que rivalizaría con la de Murray: sería la forma óptima en el sentido de que tendría la mayor superficie posible, cosa que favorecería los intercambios químicos entre el aire y la sangre.

Pero los tubos reales no son infinitamente finos, y lo más que se puede conseguir es unos valores de  $\Delta$  y de  $D$  ligeramente inferiores a 3, en perfecto acuerdo con la evidencia empírica. Esto implica el mismo grado de imperfección en todos los puntos de ramificación, pero esta pro-

riedad se obtiene como una simple consecuencia adicional de la autosemejanza con residuo, y no hace falta introducirla como objetivo previo.

DIMENSIÓN. La reunión de todas las ramas da un conjunto estándar, siendo  $E$  tanto su dimensión fractal como la topológica. Si la corteza de cada rama es lisa, la corteza total tiene dimensión  $\Delta$ .

### *Cota alveolar inferior*

Como de costumbre, la interpolación a bronquios cada vez más finos se interrumpe en un corte inferior. Este es gradual a partir de la decimoquinta bifurcación, y encuentro que es un diseño geométrico excelente.

Una observación fundamental es que, en tanto que la bifurcación autosemejante acabaría por llenar todo el espacio accesible, ésta va más lentamente, de modo que las primeras 15 etapas de bifurcación del pulmón sólo llenan una pequeña parte del volumen pulmonar total. Para llenar el espacio restante en unas pocas etapas, los tubos tienen que ser claramente más anchos de lo que se deduciría de una interpolación autosemejante. En efecto, el resultado de Weibel (1963, págs. 123-124) puede interpretarse como un indicio de que, en los estadios posteriores al decimoquinto, el grosor de los tubos deja de disminuir ( $\Delta$  ya no está definida), y las longitudes de los tubos son mayores de lo que sugiere la semejanza, siendo 2 el multiplicador final. Como la lámina 235 sugiere que las ramas autosemejantes entran aproximadamente hasta la mitad del espacio vacío disponible más cercano, un multiplicador igual a 2 parece de lo más razonable, y sugiere que buena parte del programa de diseño del pulmón viene impuesto por propiedades espaciales y no requiere de una codificación separada.

### *Más sobre la geometría vascular*

Volvamos ahora al punto culminante del capítulo 15, donde proclamo que *los monstruos fractales de Lebesgue-Osgood son el constituyente esencial de nuestra carne*. Si partimos de que un dominio ramificado  $A$  (el sistema arterial) ocupa un volumen de aproximadamente el 3% del volumen de otro dominio  $B$  (el cuerpo), pero que se supone que llega a estar infinitamente cerca de cualquier punto de  $B$ , concluyo que el grosor de las ramas de  $B$  debe disminuir más deprisa que en los árboles autosemejantes. Ahora que ya sabemos que la tasa de adelgazamiento se puede medir por  $\Delta$ , podemos preguntarnos si las arterias tienen una  $\Delta$  definida.

Esto no sólo es cierto en un amplio subdominio de las entre 8 y 30 bifurcaciones que uno encuentra entre el corazón y los capilares, sino que hace ya casi un siglo que se conoce este hecho. En efecto, Thoma (1901) y Groat (1948) resumieron sus resultados experimentales diciendo que  $\Delta = 2,7$ . Su estimación fue notablemente confirmada por Suwa y Takahashi (1971).

### *Los árboles de la botánica*

Después de jugar con objetos que llamamos *árboles* en sentido figurado, volvamos a los árboles que estudian los botánicos. Los valores «normales» que sugiere el análisis son  $D=3$  y  $\Delta=2$ . No se puede decir, sin embargo, que sean demasiado universales: dada la asombrosa diversidad de las formas botánicas, las desviaciones específicas pueden resultar más interesantes que la «norma». Una consecuencia de  $\Delta=2$  es que, en comparación con las ramas casi autosemejantes que dan forma al pulmón, las de las plantas están muy espaciadas. No se puede ver a través de un pulmón y sí a través de un árbol sin hojas.

La causa subyacente al hecho de que  $\Delta$  y  $D$  tomen respectivamente los valores enteros de las dimensiones de las superficies y los cuerpos sólidos es, según palabras de D'Arcy Thompson, que «un árbol está gobernado por las reglas físicas sencillas que determinan los cambios relativos del área y el volumen». O en los términos más concretos de Hallé, Oldeman y Tomlinson (1978): «El problema del intercambio de energía en los árboles se puede simplificar considerando el árbol como un sistema en el que [el área] mayor posible debe ser irrigada con la mínima inversión de volumen, garantizando al mismo tiempo la evacuación de la energía absorbida». Como los volúmenes y las áreas no son conmensurables en el marco de la geometría euclídea, el problema geométrico de la arquitectura de los árboles es intrínsecamente fractal. Cuando  $D$  y/o  $\Delta$  dejan de ser enteros, el carácter fractal del problema se hace más manifiesto aún.

### *D y $\Delta$ en los árboles de la botánica*

EL VALOR  $D=3$ . El lector ya sabe que la realización de una hoja de área máxima consiste en una superficie que llene un dominio espacial, como ocurre con esos matojos cuyas hojas o agujas llegan tan cerca como se quiera de cualquier punto contenido en cierto contorno (aparte, quizá, de una parte central muerta que pasamos por alto). Una diferencia  $3-D$  muy pequeña basta para permitir la entrada de aire y luz solar.

MAGNOLIAS. Sin embargo, pueden aparecer varios condicionantes adicionales que impidan la viabilidad de  $D=3$ . La única alternativa estándar es una superficie estándar de dimensión  $D=2$ , por ejemplo la superficie de una «magnolia» esférica con una parte central sin hojas y entrelazada de ramas. Esta es la razón por la cual Horn (1971), que se limita a la geometría estándar, contempla las dos posibilidades,  $D=3$  y  $D=2$ . Sin embargo,  $D=2$  no ofrece ventajas claras; de hecho, para terminar en una magnolia esférica, las ramas deben ajustarse a unas leyes muy especiales.

Por otra parte, los fractales amplían muchísimo la libertad de diseño del «arquitecto de árboles». En primer lugar, las superficies varias veces festoneadas de muchos árboles grandes pueden representarse por medio de fractales escalantes de dimensión  $D$  comprendida entre 2 y 3, y este valor de  $D$  puede servir para caracterizarlas. Nos vienen también a la mente el brécol y la coliflor, aunque plantean un problema distinto, sobre el que enseguida volveremos. Y se puede pensar en plantas trepadoras de dimensión inferior a 2 (y conjeturar que los bonsais de «armoniosidad» bien lograda son también fractales de  $D < 3$ ).

EL VALOR  $\Delta=2$ . La cita inicial de Leonardo da Vinci no vale para los pulmones ( $\Delta=3$ ) ni para las arterias ( $\Delta=2,7$ ). Pero la anatomía de las plantas es distinta de la humana. El valor  $\Delta=2$  se basa en la imagen mental de los árboles como haces de vasos no ramificados de diámetro fijo que enlazan las raíces con las hojas y ocupan una parte proporcional de la sección recta de cada rama. Según Zimmermann, los trabajadores japoneses llaman a esta representación «modelo de cañería».

MEDIDA DE  $\Delta$ . La evidencia empírica resulta ser asombrosamente escasa e indirecta. Murray (1927, citado en Thompson, 1917) encuentra por vía empírica que el peso de la rama es proporcional a (diámetro de la rama) <sup>$M$</sup> , con  $M \sim 2,5$ , pero en mi opinión su  $M$  es mayor que eso. Afirma que  $M=\Delta$ , pero según mis propios análisis tendría que ser  $M=2 + \Delta/D$ . Para  $D=3$ , el valor de Leonardo,  $\Delta=2$  correspondería a  $M \sim 2,66$ , mientras que  $M \sim 2,5$  daría  $\Delta=1,5$ . Recientemente, el prof. McMahon tuvo la amabilidad de pasarme los datos referentes a tres «árboles de McMahon» empleados en el artículo de McMahon y Kronauer (1976) y los he analizado. Escribiendo  $x$  por  $d_1/d$  e  $y$  por  $d_2/d$ , buscaríamos un valor de  $\Delta$  tal que  $X=x^\Delta$  e  $Y=y^\Delta$  cayeran sobre la línea  $X+Y=1$ . Desgraciadamente, el error experimental es muy grande para cada  $\Delta$  y la estimación del valor de este parámetro resulta poco fiable. De nuevo, no queda descartado el valor  $\Delta=2$ , pero se sugiere un valor ligeramente inferior. Por el momento, la conclusión segura es que  $\Delta=2$  es una aproximación razonable, aunque la arquitectura del árbol se inclina ligeramente por el lado

conservador, con unas ramas hijas más delgadas de lo que sería necesario.

COROLARIOS DE  $D=3$  y  $\Delta=2$ . Un primer corolario es que el área de las hojas soportadas por una rama es proporcional tanto al volumen de la rama como al área de su sección recta. Esta inferencia es empíricamente correcta y se debe a Huber (1928).

Otro corolario es que el cociente (altura del árbol)<sup>3</sup>/(diámetro del tronco) es constante para cada especie y es igual al cociente (escala lineal del volumen de drenaje de una rama)<sup>3</sup>/(diámetro de la rama)<sup>2</sup>. Se podría esperar también que dicho cociente varíe relativamente poco de unas especies a otras. Nótese que la fuerza del viento sobre un árbol desnudo, o sobre un árbol con hojas, es aproximadamente proporcional al área de las ramas, o de las ramas y las hojas, respectivamente. Y también es proporcional, en este modelo, al cubo de la altura. La resistencia del tronco, por su parte, es proporcional al (diámetro)<sup>2</sup>. Esto sugiere que la proporcionalidad de ambas cantidades es un factor de seguridad.

En un árbol tipo magnolia con  $\Delta=2$  y  $D=2$ , el cociente (altura)<sup>2</sup>/(diámetro del tronco)<sup>2</sup> es constante. Y, en general, la razón (altura) <sup>$D$</sup> /(diámetro del tronco) <sup>$\Delta$</sup>  es constante.

DIGRESIÓN SOBRE LOS HUESOS DE LAS PIERNAS. La relación entre la altura y el diámetro característica de los árboles con  $D=3$  y  $\Delta=2$  vale también para los esqueletos de los animales, siendo  $d$  el diámetro de los huesos que soportan más peso.

### *El cambio de escala elástico de Greenhill*

Mientras los árboles pulmonar y vascular tienen un soporte externo, la mayoría de plantas se sostienen por sí mismas. Greenhill (citado en Thompson, 1961) introduce en este lugar el concepto de semejanza elástica, en oposición a la geométrica. La idea de la semejanza elástica estática consiste en que un árbol tiene que limitar su altura global a una fracción fija de la altura crítica de combadura de un cilindro uniforme con el mismo diámetro basal que soporta su propio peso. Esta condición da precisamente los mismos resultados que los fractales con  $D=3$  y  $\Delta=2$ . Por tanto, un árbol según el «modelo de cañería» con hojas que llenan un dominio espacial no se comparará.

McMahon y Kronauer (1976) continúan la idea de Greenhill introduciendo la semejanza elástica *dinámica*, y recuperan el mismo resultado.



### *Plantas con $D=\Delta < 3$*

En algunas plantas el tallo, además de sostener el peso y transportar la savia, también sirve para almacenar nutrientes. En tal caso, y aun cuando el sistema vascular siga el «modelo de cañería», el valor  $\Delta=2$  no tiene por qué ser necesariamente bueno.

Un ejemplo en el que las puntas de las ramas forman una «magnolia» no estándar con  $D < 3$  y  $\Delta = D$  lo podemos ver en la lámina 233 (se trata de una proyección plana que muestra  $D-1$  y  $\Delta-1$ ). Se observa que la forma geométrica de coliflor presenta oclusiones... exactamente igual que las coliflores de verdad. ¿Se trata de una simple coincidencia? No hace falta sobrecargar el mensaje genético con características predeterminadas por la geometría.

### *Más acerca de la geometría del cerebro*

Cuando discutíamos acerca de la geometría del cerebro en el capítulo 12, no teníamos en cuenta la red de axones que interconectan las distintas partes. En el caso del cerebelo, los axones conectan la superficie con el exterior y nos encontramos con una superficie de materia gris que envuelve un árbol de materia blanca. Revisé los argumentos del capítulo 12 para incorporar este árbol y encontré que los términos correctivos resultantes en la relación área-volumen permitían un mejor ajuste a los datos empíricos. Pero esto es algo demasiado extenso para explicarlo aquí.

RAMIFICACIÓN DE LAS NEURONAS. Las células de Purkinje del cerebelo de los mamíferos son prácticamente planas, y sus dendritas forman un laberinto que recubre un dominio plano. Al pasar de los mamíferos a la paloma, el lagarto, la rana y el pez, la eficacia de este recubrimiento disminuye (Llinas, 1969). Sería bonito que esto correspondiera a una disminución de  $D$ , pero la idea de que las neuronas son fractales no pasa de ser una conjetura.

LA LEY DE RALL. Rall (1959) observa que los árboles neuronales que conservan la cantidad  $d^A$  con  $\Delta=1,5$  son eléctricamente equivalentes a cilindros, y por tanto especialmente dignos de estudio. Para más detalles véase Jack *et al.* (1975).

### *¿Qué anchura tiene el Missouri?*

Pasemos ahora a los ríos. A pesar de su importancia conceptual, mi modelo «estilo Peano» del capítulo 7 no pasa de ser una primera aproxima-

mación. Una consecuencia es que la anchura de los ríos es nula, cuando sabemos que en realidad no es así.

Una cuestión empírica importante es saber si en todas las bifurcaciones de los ríos el exponente diametral  $\Delta$  es el mismo. Y si éste está efectivamente definido, la cuestión siguiente es saber si  $2-\Delta=0$  o  $>0$ . No sé de ninguna comprobación directa, pero la descarga de un río,  $Q$ , se conserva en las bifurcaciones, y por tanto podría hacer el papel de  $d^\Delta$ . Maddock (véase Leopold, 1962) encuentra que  $d \sim Q^{1/2}$ , con lo que  $\Delta=2$ . Además, la profundidad de un río es proporcional a  $Q^{0.4}$ , y la velocidad es proporcional a  $Q^{0.1}$ . Sumando debidamente los exponentes,  $0,5 + 0,4 + 0,1 = 1$ .

En los años treinta, G. Lacey observó que  $\Delta=2$  vale también para los canales de regadío estabilizados de la India, que plantean un problema hidráulico bien definido. Es de esperar, pues, que exista una explicación basada en la mecánica de fluidos con un papel análogo al que tenía la de Murray para el pulmón.

$\Delta=2$  tiene una consecuencia interesante. Si se representan los ríos de un mapa por medio de cintas que tengan una anchura relativa correcta, es imposible adivinar la escala del mapa a partir de la forma del árbol fluvial. (También es imposible en el caso de los meandros, pero está es otra historia.)

Aquellos que crean que Leonardo ya lo sabía todo interpretarán el  $\Delta=2$  que sigue a la cita que abre este capítulo como: «Todos los ramales de una corriente de agua en un estadio cualquiera de su curso, y suponiendo que todos ellos tengan la misma velocidad, son iguales al cuerpo de la corriente principal».

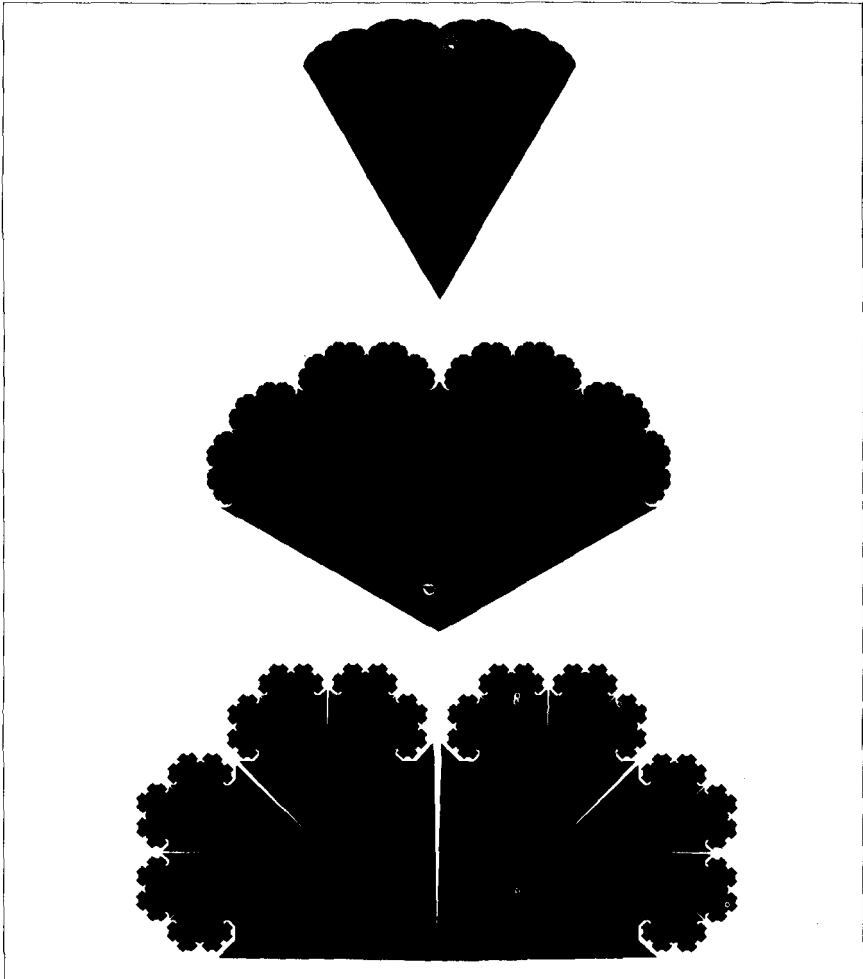
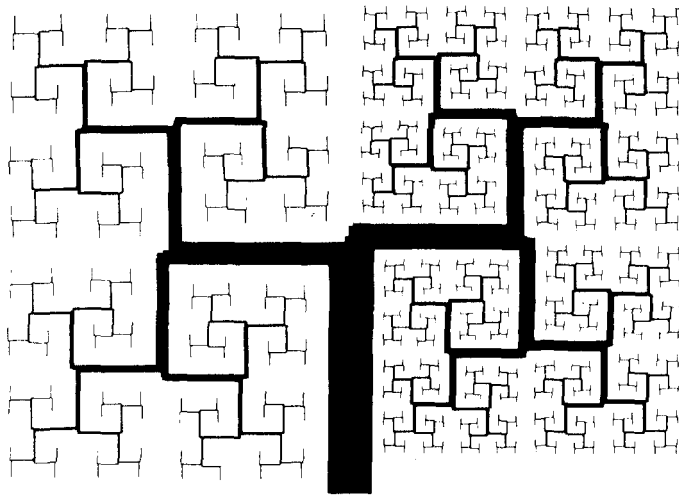


FIG. 233. *Modelos fractales planos de inflorescencias*

Escojamos una magnolia de entre las de la lámina 221, con  $\theta < \pi$ , y sustituiremos cada barra por un triángulo isósceles que lo tenga como lado, siendo  $1/2 \theta$  y  $\pi - \theta$  los ángulos en los extremos de dicha barra. Como  $\theta$  es el menor valor para el que el árbol no presenta autosolapamiento, los tallos triangulares engrosados tampoco se solaparán y rellenarán el «interior» de la magnolia. Para mayor claridad, se ha recortado ligeramente uno de los lados de todos los triángulos que forman una de las figuras.

Nótese que las ramas se hacen más y más finas a medida que  $D$  se acerca a 1 o 2, esto es, a medida que la  $D$  de la figura espacial se acerca a 2 o 3. ¿Corresponden realmente los valores de  $D$  observados a las ramas más gruesas posibles?



FIGS. 234 y 235. *Bronquios iterativos que recubren un dominio plano.*

LÁMINA 235. En la iteración de Koch, cada segmento rectilíneo de una aproximación finita se rompe al final en pedacitos más cortos. En muchas aplicaciones es útil generalizar este procedimiento dejando que algunos segmentos sean «estériles», de manera que no sufran modificaciones en estadios posteriores.

Aquí hemos usado este procedimiento para hacer crecer un «árbol». Se empieza con un tronco cuyos lados son estériles y que tiene un «brote» fértil. Este genera dos «ramas» en las que, como antes, sólo hay dos «brotes» fértiles en los extremos. Y así sucesiva e indefinidamente. El crecimiento es asimétrico para asegurarnos de que el árbol cubre una región plana aproximadamente rectangular, sin huecos ni solapamientos. Sin embargo, el autocontacto asintótico es inevitable, y cualquier punto de la corteza puede ser obtenido también como el límite de la punta de alguna rama.

Los «subárboles» que se obtendrían partiendo de las dos ramas principales son semejantes al árbol entero, con dos razones de semejanza,  $r_1$  y  $r_2$ . Pero el árbol no es autosemejante, porque además de los dos subárboles tiene el tronco. Por otra parte, el conjunto límite de las puntas de las ramas es autosemejante. De los pies de figura de las láminas 85-86, la dimensión de semejanza es la  $D$  que satisface la ecuación  $r_1^D + r_2^D = 1$ . En la figura superior de la Lámina 235, las puntas casi llenan el plano y  $2 - D$  es pequeño. En la figura inferior, en cambio,  $D$  es muy inferior a 2.

Incidentalmente, si la razón diámetro/longitud está fijada de antemano, la codimensión  $3 - D$  de una figura espacial es menor que la codimensión  $2 - D$  de su reducción plana.

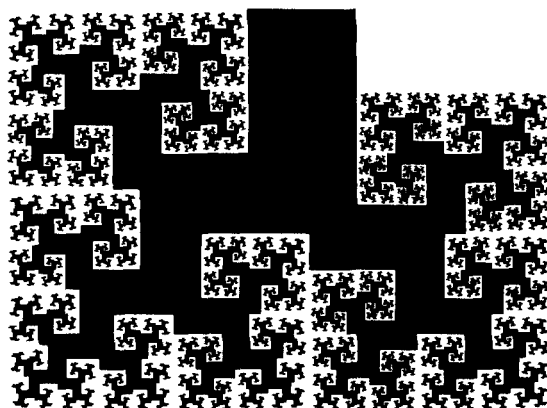
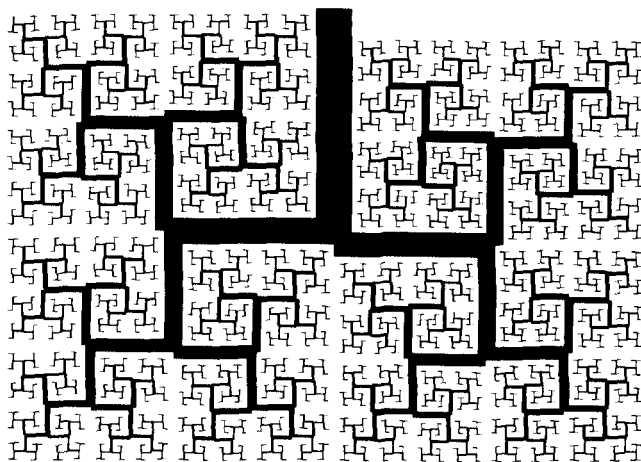


LÁMINA 234. Esta figura compuesta se ha obtenido de una construcción de Koch en árbol en la que el generador cambia a cada paso, de modo que la razón anchura/longitud vaya disminuyendo hasta anularse. En la parte izquierda de la figura, dicha razón disminuye más aprisa que en la parte derecha. La consecuencia de ello es que las puntas de las ramas ya no forman un conjunto autosemejante. Sin embargo, se obtiene  $D=2$  para las puntas. Es una nueva manera de conseguir el mismo objetivo que en el capítulo 15.



VI  
Fractales imagen de sí mismos





El grueso de este ensayo está dedicado a fractales que, o bien son totalmente invariantes por transformaciones de semejanza, o son por lo menos «casi» autosemejantes. A consecuencia de ello, el lector puede haberse formado la idea de que el concepto de fractal está casado con la autosemejanza. Esto no es así, ni muchísimo menos, pero la geometría fractal debe empezar tratando los homólogos fractales de las rectas... o, por así llamarlos, de los «fractales lineales».

En los capítulos 18 y 19 se avanza un paso más. Se esbozan las propiedades de los fractales que son, respectivamente, conjuntos mínimos invariantes por inversión geométrica y fronteras de los conjuntos acotados máximos invariantes bajo ciertas transformaciones cuadráticas.

Ambas familias difieren de los fractales autosemejantes en aspectos fundamentales. Unas transformaciones lineales adecuadas dejan invariantes los fractales escalantes, pero para generarlas hay que dar primero un generador y unas reglas de construcción. Por otra parte, el hecho de que un fractal sea «generado» por una transformación no lineal basta a veces para determinar, y por tanto generar, su forma. Más aún, muchos fractales no lineales son acotados, esto es, llevan ya incorporado un corte superior  $n < \infty$ . Aquellos que encuentren objetable  $\Omega = \infty$ , deberían sentirse encantados con su desaparición.

Los primeros fractales autoinversos fueron introducidos hacia la década de 1880 por Poincaré y Felix Klein, no mucho después de que Weierstrass descubriera una función continua y no diferenciable, aproximadamente hacia la misma época en que aparecieron los conjuntos de Cantor, y bastante antes que las curvas de Peano y de Koch y toda su estirpe escalante. Lo irónico del caso es que los fractales escalantes encontraron un nicho duradero como material para contraejemplos famosos y juegos matemáticos, mientras que los fractales autoinversos se convirtieron en un tema especial de las funciones automórficas. Esta teoría fue abandonada durante cierto tiempo y luego resurgió en forma muy abs-

tracta. Una de las razones de que los fractales autoinversos casi cayeran en el olvido es que su forma no ha sido explorada hasta este capítulo, en el que se presenta un nuevo método de construcción efectiva.

La última sección del capítulo aborda un problema de física, cuyo protagonista resulta ser un fractal autoinverso.

### *Forma biológica y «simplicidad»*

Como se verá, muchos fractales no lineales «parecen orgánicos», y de ahí este aparte relacionado con la biología. Como las formas en biología son a menudo muy complejas, podría parecer que los programas que codifican dichas formas son a su vez muy largos. Cuando la complicación parece no tener objeto alguno (como suele ser el caso en criaturas simples), resulta paradójico que los programas generadores no estén simplificados, dejando lugar para instrucciones útiles.

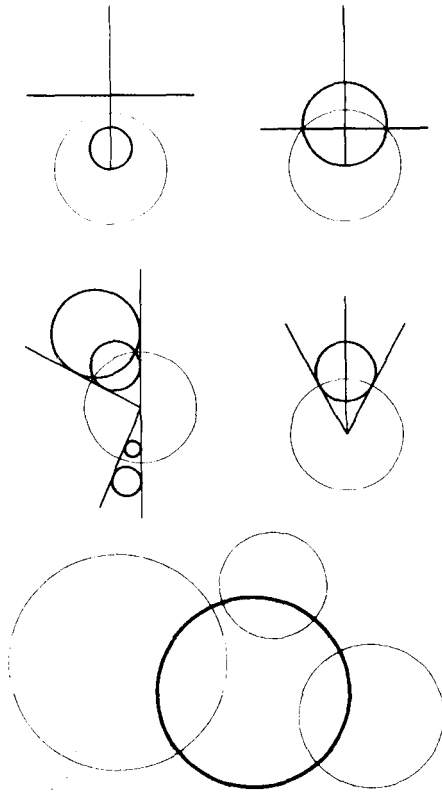
Sin embargo, las complicaciones en cuestión tienen a menudo una estructura muy repetitiva. Recordemos que al final del capítulo 6 decíamos que una curva de Koch *no* debe considerarse ni irregular ni complicada, por cuanto las reglas que rigen su construcción son sistemáticas y simples. La clave está en que dichas reglas se apliquen una y otra vez, en períodos sucesivos. En el capítulo 17 se generaliza esta idea a la precodificación de la estructura del pulmón.

En los capítulos 18 y 19 vamos mucho más allá y nos encontramos con algunos fractales generados mediante reglas no lineales que nos recuerdan ciertos insectos o cefalópodos, y con otras que nos recuerdan ciertas plantas. La paradoja queda así destruida, dejando pendiente una tarea increíblemente árdua de aplicación práctica.

### *La inversión geométrica estándar*

La figura más simple de la geometría euclídea, después de la recta, es la circunferencia. La propiedad de ser una circunferencia se conserva por las transformaciones de semejanza y también por las de inversión. Como muchos estudiosos no han oído hablar de la inversión desde sus últimos años en el instituto, vale la pena dedicar algún tiempo a resumir sus propiedades fundamentales. Dada una circunferencia  $C$  de centro  $O$  y radio  $R$ , la inversión con respecto a  $C$  transforma un punto  $P$  en otro  $P'$  tal que  $P$  y  $P'$  están en una misma semirrecta con origen en  $O$ , y las distancias  $|OP|$  y  $|OP'|$  cumplen  $|OP| |OP'| = R^2$ . Las imágenes por inversión de las

circunferencias que pasan por  $O$  son líneas rectas que no pasan por  $O$ , y viceversa (véase más abajo). Las circunferencias que no pasan por  $O$  se transforman en circunferencias (tercera figura inferior). Las circunferencias ortogonales a  $C$  son invariantes por inversión con respecto a  $C$  (cuarta figura).



Consideremos ahora tres circunferencias a la vez,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ . Normalmente, por ejemplo en el caso en que los discos abiertos limitados por las  $C_m$  no se solapan, existe una circunferencia  $r$  ortogonal a todas las  $C_m$  (arriba). Si esta  $r$  existe, es simultáneamente autoinversa con respecto a todas las  $C_m$ .

Los resultados sencillos anteriores son casi todo lo que la geometría estándar nos puede decir acerca de los conjuntos autoinversos. Otros conjuntos autoinversos son fractales, y la mayoría son cualquier cosa menos sencillos.

EL GENERADOR. CONJUNTOS AUTOINVERSOS. Como de costumbre, par-

tiremos de un *generador*, que ahora estará formado por un cierto número  $M$  de circunferencias  $C_m$ . Las transformaciones consistentes en una sucesión de inversiones con respecto a estas circunferencias constituyen lo que los algebraistas llaman el grupo generado por dichas inversiones; llamémosle  $G$ . La expresión formal para designar un «conjunto autoinverso» es «conjunto invariante bajo las transformaciones del grupo  $G$ ».

SEMILLAS Y CLANES. Tómese un conjunto cualquiera  $S$  (al que llamaremos *semilla*) y añádasele sus imágenes por todas las transformaciones de  $G$ . El resultado, al que aquí llamaremos *clan* de  $S$ , es autoinverso. A veces, sin embargo, es un conjunto trivial. Por ejemplo, si  $S$  es el plano completo  $R^*$  (el plano  $R$  más el punto del infinito), el clan de  $S$  es idéntico a  $R^*=S$ .

GRUPOS DE INVERSIÓN CAÓTICOS. Además, dado un grupo  $G$  generado por un cierto número de inversiones, podría darse el caso de que el clan de cualquier  $S$  recubriera el plano. En tal caso, el único conjunto autoinverso es todo el plano. Por razones que se comprenderán en el capítulo 20, propongo llamar *caóticos* a tales grupos. Los grupos no caóticos son debidos a Poincaré, aunque se denominan kleinianos: Poincaré había atribuido a L. Fuchs cierto trabajo de Klein y éste protestó, por lo que Poincaré le prometió dar el nombre de Klein a su siguiente gran descubrimiento, ¡y así lo hizo!

Limitándonos aquí a los grupos no caóticos, estudiamos primero tres fractales autoinversos distinguidos por Poincaré, luego un cuarto conjunto cuya historia es un tanto incierta y por fin otro cuya importancia descubrí yo.

### *Teselación hiperbólica o embaldosado*

Pocos admiradores de Maurits Escher saben que su célebre inspiración de dibujante procede a menudo directamente de matemáticos y físicos «desconocidos» (Coxeter, 1979). En muchos casos Escher no ha hecho más que adornar teselaciones autoinversas conocidas por Poincaré y extensamente ilustradas en Fricke y Klein (1897).

Estos conjuntos, que denotaremos por  $J$ , se obtienen reuniendo los clanes de las circunferencias  $C_m$ .

□ Si se supone que  $G$  es no caótico, el complementario de la reunión de los clanes de los  $C_m$  es una colección de polígonos circulares que llamaremos «baldosas abiertas». Una baldosa abierta (o su adherencia) se puede transformar en otra baldosa abierta (o cerrada) por una sucesión de inversiones de  $G$ . En otras palabras, el clan de cualquier baldosa cerrada

es  $R^*$ . Y lo que es más importante, el clan de cualquier baldosa abierta es el complementario de  $J$ . Y  $J$  es, por así decirlo, la «línea de yeso» de estas baldosas.  $R^*$  es autoinverso, y  $J$  y su complementario lo son también, y comportan un «embaldosado hiperbólico» o «teselación» de  $R^*$ . (Esta palabra viene del latín *tessera* = cuadrado, que a su vez procede del griego τεσσαρες=cuatro, aunque nuestras baldosas pueden tener cualquier número de lados mayor que 2.) En los grabados de Escher cada baldosa es un dibujo imaginario. ■

### *El conjunto límite de un grupo de inversión*

El conjunto autoinverso más interesante es el menor de todos. Se denomina conjunto límite y lo denotaremos por  $L$ , porque es también el conjunto de puntos límite de las imágenes iteradas de cualquier punto inicial por transformaciones del grupo  $G$ . Está contenido en el clan de cualquier semilla  $S$ . Para precisar más una cuestión técnica: es el conjunto de los puntos límite que no pueden alcanzarse también por un número finito de inversiones. O intuitivamente, es la región en la que se concentran los descendientes infinitesimales.

Puede ser que  $L$  se reduzca a un punto o a un círculo, pero en general es un conjunto fractal irregular y/o fragmentado.

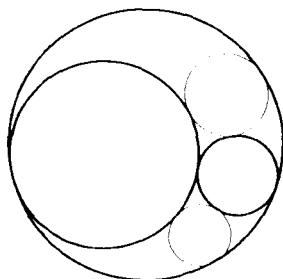
□ En una teselación  $L$  aparece como el «conjunto de las baldosas infinitesimales». En relación a las partes finitas de la teselación juega un papel análogo al de las puntas de las ramas (capítulo 16) con respecto a las ramas. Aunque aquí la situación es más simple: al igual que  $L$ , la teselación  $J$  es también autoinversa sin residuo. ■

### *Redes y tamices apolonianos*

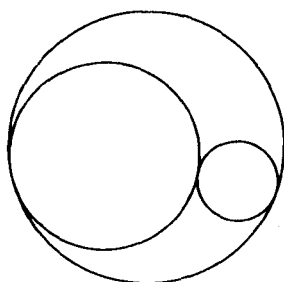
Diremos que un conjunto es *apoloniano* cuando consista en una infinidad de circunferencias junto con sus puntos límite. En este caso su condición de fractal se debe sólo a su fragmentación. Este caso se comprendió ya (aunque de una manera un tanto difusa) en los inicios históricos del tema.

Primero construiremos un ejemplo básico y luego demostraremos que es autoinverso. Apolonio de Pérgamo fue un gran matemático de la escuela de Alejandría hacia el año 200 a. de C., seguidor de Euclides, que descubrió un algoritmo para trazar las cinco circunferencias tangentes a otras tres dadas. Cuando éstas son mutuamente tangentes, el número de

circunferencias apolonianas se reduce a dos. Como enseguida veremos, no se pierde generalidad suponiendo que dos de las tres circunferencias dadas son exteriores y están contenidas en la tercera, a la manera siguiente:



Estas tres circunferencias definen dos triángulos circulares con ángulos de  $0^\circ$ , y las dos circunferencias apolonianas son las circunferencias máximas inscritas en ellos:

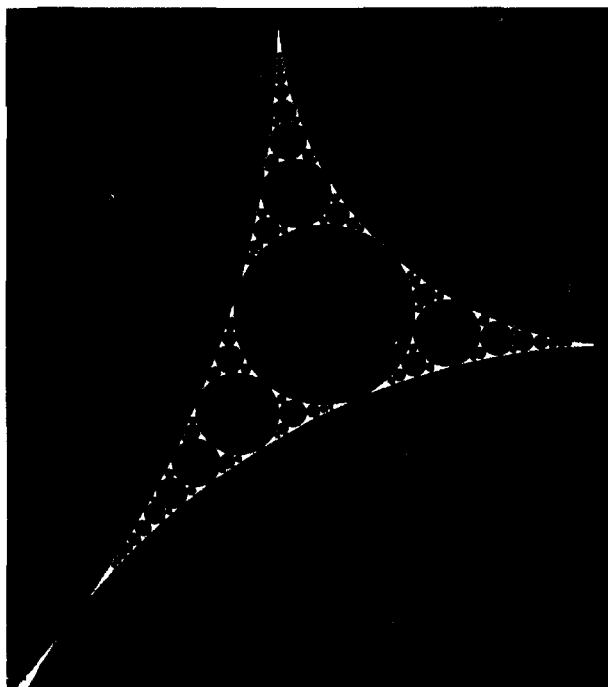


El resultado de la construcción apoloniana son cinco circunferencias, tres dadas y dos apolonianas, que a su vez definen seis triángulos circulares. A continuación repetimos la operación, trazando la circunferencia inscrita máxima para cada triángulo. La iteración indefinida de este procedimiento es lo que se conoce como *relleno apoloniano*. El conjunto consistente en la colección infinita de circunferencias y puntos límite constituye el conjunto que yo denomino *red apoloniana*. Y una porción de la misma contenida en un triángulo circular, como en la figura de la derecha, constituye lo que llamaré *tamiz apoloniano*.

Si se cambia una de las circunferencias apolonianas de la primera generación por cualquier otra de las circunferencias interiores dadas, el conjunto límite no varía. □ Si se cambia dicha circunferencia por la cir-

cunferencia exterior, la construcción empieza con tres circunferencias tangentes exteriores y una de las circunferencias apolonianas de la primera generación es la menor circunferencia *circunscrita* a las tres dadas. Aparte de este paso atípico, la construcción sigue como en el caso anterior, cosa que demuestra que, como decíamos, no se pierde generalidad ■.

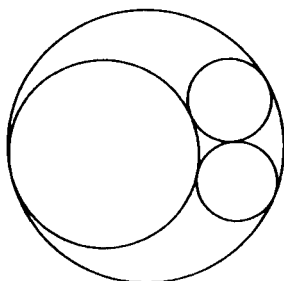
RELLENO DE LEIBNIZ. El relleno apoloniano recuerda una construcción que yo denomino *relleno de Leibniz* de una circunferencia, pues Leibniz lo describió en una carta a de Brosses: «Imaginemos una circunferencia, inscribamos en ella tres circunferencias congruentes entre sí y de radio máximo; procedamos del mismo modo con el interior de cada una de estas circunferencias, e imaginemos que el proceso sigue indefinidamente...»



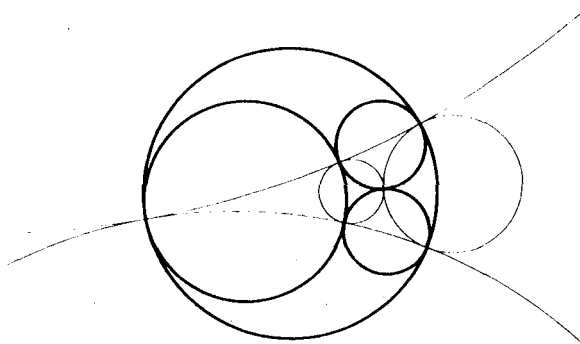
*Las redes apolonianas son autoinversas*

Volvamos ahora al principio de la construcción de la red apoloniana: tres circunferencias tangentes entre sí. Añadámosle *una cualquiera* de las

circunferencias apolonianas correspondientes y llamemos circunferencias  $\Gamma$  a las 4 circunferencias escogidas. Las representamos en trazo grueso.



Con estas circunferencias  $\Gamma$  se pueden formar 4 combinaciones de tres elementos, que llamaremos tripletes. Cada uno de éstos determina una circunferencia simultáneamente ortogonal a las 3 que lo forman. Tomaremos ahora como generador estas nuevas circunferencias, que designaremos  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ , (el diagrama siguiente las representa en trazo fino). Designaremos por  $\Gamma_{ijk}$  la  $\Gamma$  circunferencia ortogonal a  $C_i, C_j$  y  $C_k$ .



Esta notación tan pesada se ve por fin recompensada: como se puede ver fácilmente, el menor conjunto (cerrado) autoinverso con respecto a las cuatro circunferencias  $C_m$  es la red apoloniana construida a partir de las cuatro circunferencias  $\Gamma$ . Curiosamente, esta observación no se encuentra explícitamente formulada en la literatura, aunque seguramente es bastante conocida.

Un examen más cuidadoso muestra que cada circunferencia de la red se transforma en una de las circunferencias  $\Gamma$  por la acción de una *única* sucesión de inversiones con respecto a las circunferencias  $C$ . Por tanto,



las circunferencias de la red apoloniana se pueden clasificar en cuatro clanes, y la descendencia de  $\Gamma_{ijk}$  se denotará por  $G\Gamma_{ijk}$ .

### *Tejiendo con un solo hilo*

El tamiz apoloniano y el de Sierpinski de la lámina 204 tienen un rasgo común importante: el complementario de un tamiz de Sierpinski es una reunión de triángulos, o un  $\sigma$ -triángulo, y el complementario de una red o tamiz apoloniano es una reunión de discos, o un  $\sigma$ -disco.

Pero ya sabemos que el tamiz de Sierpinski admite una construcción alternativa por el método de Koch, cuyas aproximaciones finitas son terágonos (líneas quebradas) sin autocontactos, y los puntos dobles no aparecen hasta que se pasa al límite. En consecuencia, el tamiz de Sierpinski se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, pasando dos veces por algunos puntos, pero sin repasar ningún trozo finito de línea.

O usando una metáfora, ¡el tamiz de Sierpinski se puede tejer con un solo trozo de hilo!

Y lo mismo vale para la red apoloniana.

### *Cascadas no autosemejantes y evaluación de la dimensión*

Los triángulos circulares del relleno apoloniano no son semejantes entre sí, por lo que la cascada apoloniana no es autosemejante y la red apoloniana no es un conjunto escalante. Hay que recurrir pues a la definición de  $D$  de Hausdorff Besicovitch (como exponente que interviene en la definición de la medida), que se puede aplicar a cualquier conjunto, aunque su determinación resulte ser sorprendentemente difícil. Por el momento (Boyd, 1973a,b) lo más que podemos decir es que

$$1,300197 < D < 1,314534,$$

si bien los últimos experimentos numéricos de Boyd (no publicados aún) dan  $D \sim 1,3058$ .

En cualquier caso, como  $D$  es una fracción y  $D_T = 1$ , el tamiz o red apoloniana es una curva fractal. En el contexto que nos ocupa,  $D$  nos da una medida de la fragmentación. Si «eliminamos», por ejemplo, los discos de radio menor que  $\varepsilon$ , los intersticios que quedan tienen un perímetro proporcional a  $\varepsilon^{1-D}$  y una superficie proporcional a  $\varepsilon^{2-D}$

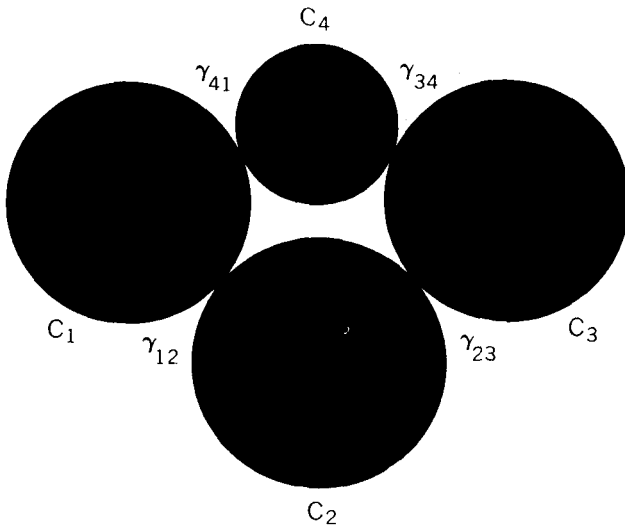
## *L en las cadenas de Poincaré no fuchsianas*

Las inversiones con respecto a configuraciones no tan especiales de las circunferencias generatrices  $C_m$  dan otras fractales autoinversas no tan simples como la red apoloniana. Una construcción práctica mía, que presentaré dentro de un momento, nos da una caracterización conveniente de  $L$  en la mayoría de casos, y constituye un gran avance respecto al método anterior, debido a Poincaré y Klein, que es intrincado y converge lentamente.

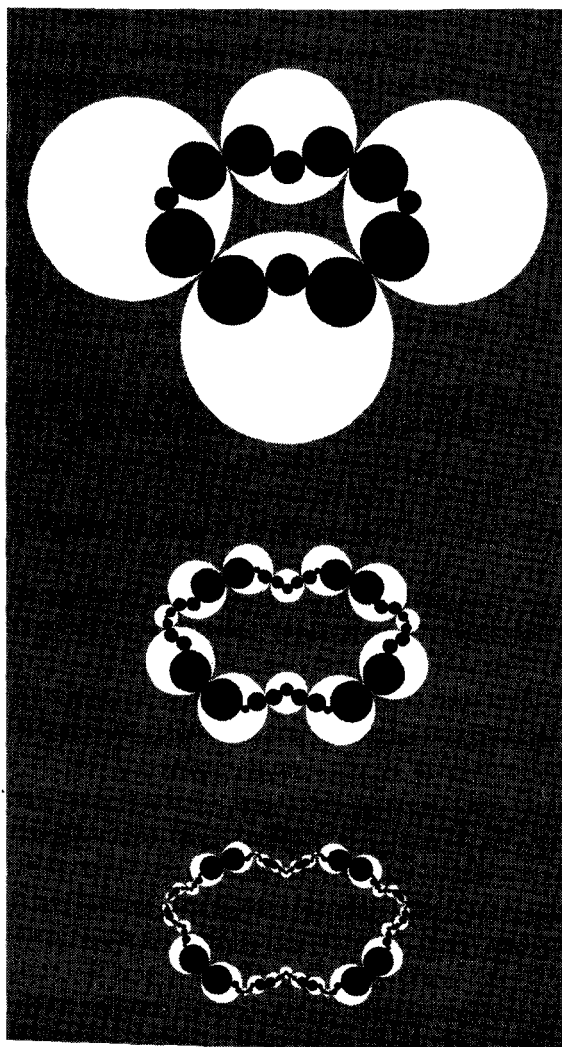
Sin embargo, como el método antiguo conserva su interés, lo vamos a ver aplicado a un caso especial. Supongamos que los  $C_m$  forman una configuración, que podemos llamar *cadena de Poincaré*, consistente en  $M$  círculos  $C_m$  numerados cíclicamente, de modo que  $C_m$  es tangente a  $C_{m-1}$  y a  $C_{m+1}$  (módulo  $M$ ) y no corta ningún otro círculo de la cadena. En este caso  $L$  es una *curva* que divide el plano en dos partes, una interior y otra exterior. (En homenaje a Camille Jordan, que fue el primero en percatarse de que no es obvio que el plano pueda ser así dividido por un solo circuito, tales circuitos se llaman curvas de Jordan.)

Si todos los  $C_m$  son ortogonales al mismo círculo  $\Gamma$ ,  $L$  coincide idénticamente con  $\Gamma$ . Este caso, que se denomina fuchsiano, no se considera en este capítulo.

MÉTODO DE POINCARÉ PARA LA CONSTRUCCIÓN DE  $L$ . Describiremos exhaustivamente la construcción de  $L$ , según el método habitual y según mi método alternativo, para la siguiente cadena especial con  $M=4$ :



Para determinar  $L$ , Poincaré, además de Fricke y Klein (1897), sustituyen la cadena original por cadenas formadas por un número cada vez mayor de eslabones cada vez más pequeños. En el primer paso se sustituye cada eslabón  $C_i$  por los inversos respecto a  $C_1$  de los restantes eslabones  $C_m$ , con lo que se crean  $M(M-1) = 12$  eslabones más pequeños. Estos pueden verse en la columna de al lado, sobreimpresos en un negativo fotográfico (gris) de los eslabones originales. A partir de ahí, cada etapa consiste en tomar la cadena inicial correspondiente e invertirla respecto de cada uno de los  $C_m$  originales. Aquí se muestran varios de estos pasos, en ne-



gro, superpuestos al paso anterior correspondiente, en blanco sobre fondo gris. Al final, la cadena se hace cada vez más fina y tiende a  $L$ , que es un hilo.

Por desgracia, después de un número bastante grande de pasos, algunos eslabones siguen teniendo un tamaño considerable, e incluso cadenas aproximadas bastante avanzadas dan una idea bastante mala de  $L$ . La lámina 257 sirve para ejemplificar esta horrenda dificultad.

### *El concepto de osculación fractal*

En mi construcción de  $L$  interviene un nuevo concepto fractal de osculación que generaliza una faceta obvia del caso apoloniano.

OSCULACIÓN ESTÁNDAR. Este concepto está relacionado con el de curvatura. En primer orden, una curva estándar cerca de un punto regular  $P$  es aproximada por la recta tangente. En segundo orden es aproximada por la circunferencia *osculatriz*, esto es, la que tiene la misma tangente y la misma curvatura.

Un parámetro conveniente,  $u$ , para distinguir las distintas circunferencias tangentes a una curva en  $P$  es la inversa de la distancia (arbitrariamente orientada) de  $P$  al centro de dicha circunferencia. Si  $u_0$  es el parámetro correspondiente a la circunferencia osculatriz y  $u < u_0$ , entonces una pequeña parte de la curva centrada en  $P$  queda totalmente a un lado de la circunferencia tangente, mientras que si  $u > u_0$  queda totalmente al otro lado.

Este  $u_0$  es lo que los físicos llaman *valor crítico* y los matemáticos *cortadura*. Y  $|u_0|$  define la «curvatura» local.

OSCULACIÓN FRACTAL GLOBAL. En el caso de la red apoloniana, carece de sentido definir la osculación por medio de la curvatura. Sin embargo, es obvio que en cada punto de la red donde se produce la tangencia de dos circunferencias de relleno, éstas «abarcán» el resto de  $L$ . Resulta, pues, tentador llamarlas *osculatrices* a ambas.

Para generalizar este concepto a conjuntos  $L$  no apolonianos, tomemos un punto en que  $L$  tenga tangente y empecemos con la definición de la osculación ordinaria basada en el comportamiento crítico (= cortadura). La novedad ahora es que, al variar  $u$  de  $-\infty$  a  $+\infty$ , en vez de tener un único  $u_0$  crítico tenemos dos,  $u'$  y  $u'' > u'$ , definidos del modo siguiente: para todo  $u < u'$ ,  $L$  queda completamente a un lado de la circunferencia, mientras que para  $u < u''$ , queda completamente al otro lado, y para  $u' < u < u''$  hay partes de  $L$  a ambos lados de la circunferencia. Sugiero denominar *fractalmente osculatrices* a las circunferencias de parámetros  $u'$  y  $u''$ .

Cada circunferencia delimita dos discos abiertos (uno de los cuales contiene el centro y el otro el punto del infinito). Los discos abiertos li-

mitados por las circunferencias osculatrices y que no contienen  $L$  se llamarán discos osculadores.

Puede darse el caso de que una o las dos circunferencias osculatrices degeneren en un punto.

LOCAL FRENTE A GLOBAL. Volviendo a la osculación estándar, observamos que se trata de un concepto local, pues su definición no depende de la forma de la curva lejos de  $P$ . Dicho de otro modo, la curva, la tangente y la circunferencia osculatriz pueden cortarse en otros puntos además de  $P$ . Por contra, la definición anterior de osculación fractal es global, aunque esta distinción no es crucial. La osculación fractal se podría redefinir localmente, con el correspondiente desdoblamiento de la «curvatura» en 2 números. Sin embargo, en la aplicación que nos ocupa, la osculación local y la global coinciden.

TRIÁNGULOS OSCULADORES. □ La osculación fractal global tiene un análogo en un contexto que nos es familiar. Para definir el interior de nuestro viejo amigo el copo de nieve de Koch como un sigma-triángulo ( $\sigma$ -triángulo), basta con que los lados de los triángulos que se van colocando en cada nuevo paso de la lámina 70 se prolonguen tanto como sea posible sin intersectar la curva copo de nieve. ■

### $\sigma$ -discos que osculan $L$

La clave de mi nuevo método de construcción de  $L$ , que nos ahorra los inconvenientes citados en la pág. 248, reside en los discos y los  $\sigma$ -discos osculadores. Este método se ilustra aquí por vez primera (¡aunque fue anticipado en 1980, en *The 1981 Springer Mathematical Calendar!*). La clave está en tomar las inversas, no de las circunferencias  $C_m$  sino de algunas de las  $\Gamma_{ijk}$ , que (como se establece en la definición de la página 171) son ortogonales a los tripletes  $C_i$ ,  $C_j$  y  $C_k$ . De nuevo, supondremos que las  $\Gamma_{ijk}$  no se reducen a una única  $\Gamma$ .

RESTRICCIÓN A  $M=4$ . La suposición  $M=4$  nos garantiza que, para cada triplete  $i, j, k$ , uno de los dos discos abiertos limitados por  $\Gamma_{ijk}$ —a saber, su interior o su exterior—no contiene ninguno de los puntos  $\gamma_{mn}$  definidos en la página 248. Denotaremos por  $\Delta_{ijk}$  este disco sin puntos.

Mi construcción de  $L$  se basa en las siguientes observaciones: todo  $\Delta_{ijk}$  sin puntos oscula  $L$ , y lo mismo ocurre con sus inversos de órdenes sucesivos con respecto a las circunferencias  $C_m$ , y los clanes construidos tomando como semillas los  $\Delta_{ijk}$  recubren todo el plano excepto la curva  $L$ .

En la lámina 255 se parte de la misma cadena de Poincaré que en la página 248, dibujada a una escala mayor. Como suele ocurrir en la mayoría

de casos, en el primer paso ya se perfila  $L$  con bastante precisión. En pasos posteriores, la producción de nuevos detalles es muy «eficiente», y después de unos pocos pasos más se puede interpolar mentalmente la forma de la curva  $L$  sin el peligro de error que se da en el método de Poincaré.

### *Generalizaciones*

CADENAS DE CINCO O MÁS ESLABONES. Si el número original de eslabones de una cadena de Poincaré es  $M > 4$ , mi nuevo método de construcción de  $L$  precisa de una acción adicional, que empieza por clasificar las circunferencias  $\Gamma$  en 2 montones. Los *dos* discos abiertos limitados por las circunferencias  $\Gamma$  de una de las clases contienen al menos un punto  $\gamma_{mn}$ ; en consecuencia,  $\Delta_{ijk}$  *no* está definido. Esas circunferencias  $\Gamma$  cortan la curva  $L$  en vez de oscularla, pero no son necesarias para su construcción.

Las restantes circunferencias  $\Gamma_{ijk}$  definen discos osculadores  $\Delta_{ijk}$  que se pueden distinguir en dos clases. Si se reúnen los clanes de los  $\Delta_{ijk}$  de la primera clase, se representa el interior de  $L$ , y si se hace lo mismo con los clanes de los  $\Delta_{ijk}$  de la segunda clase, se obtiene el exterior.

Lo mismo vale para muchos otros casos (aunque no para todos) en los que las  $C_m$  no forman una cadena de Poincaré.

CADENAS SOLAPANTES Y/O DESMONTADAS. Cuando  $C_m$  y  $C_n$  se cortan en dos puntos  $\gamma'_{mn}$  y  $\gamma''_{mn}$ , el conjunto de los dos sustituye a  $\gamma$ . Y cuando  $C_m$  y  $C_n$  son disjuntas, es sustituido por los dos puntos mutuamente inversos,  $\gamma'_{mn}$  y  $\gamma''_{mn}$ . El criterio para identificar los  $\Delta_{ijk}$  es difícil de enunciar, aunque la idea de fondo es la misma.

FRACTALES AUTOINVERSAS RAMIFICADAS.  $L$  puede presentar a la vez propiedades típicas de un circuito sinuoso (una curva de Jordan) y de una red apoloniana, obteniéndose una curva fractalmente ramificada del tipo de las estudiadas en el capítulo 14, aunque generalmente de una apariencia más barroca, como en la lámina C7.

POLVOS AUTOINVERSOS. Puede ocurrir también que  $L$  sea un polvo fractal.

### *El modelo apoloniano de los esmécticos*

En esta sección se esboza el papel que tienen los rellenos apolonianos y la dimensión fractal en la descripción de una clase de «cristales líquidos». Al hacerlo, echaremos una ojeada a una de los campos más activos de la física, la teoría de los *puntos críticos*, de los cuales tenemos un ejemplo en el «punto» del diagrama presión-temperatura que describe las

condiciones físicas bajo las cuales pueden coexistir en equilibrio las tres fases (sólida, líquida y gaseosa) de un sistema físico. Las características analíticas de un sistema en el entorno de un punto crítico son escalantes, y por tanto regidas por leyes potenciales, más concretamente por exponentes críticos (capítulo 36). Muchos de ellos resultan ser dimensiones fractales, y aquí nos encontramos con el primer ejemplo.

Como los cristales líquidos no son un campo demasiado conocido, los describiremos parafraseando a Bragg (1934). Estas bellas y misteriosas sustancias son líquidas en cuanto a movilidad y cristalinas en cuanto a comportamiento óptico. Sus moléculas tienen una estructura relativamente complicada, son largas y forman cadenas. Ciertas fases de un cristal líquido se llaman *esméticas*, del griego *σμημα*, que significa jabón, porque constituyen un modelo de sistema orgánico de aspecto jabonoso. Un cristal líquido esmético está formado por moléculas que se ordenan paralelamente una junto a otra como las espigas en un sembrado, de modo que el espesor de una capa viene dado por la longitud de dichas moléculas. Las capas u hojas resultantes son muy flexibles y fuertes, y si se las dobla tienden a enderezarse de nuevo. A bajas temperaturas se apilan de un modo regular, como las hojas de un libro, formando un cristal sólido. Pero cuando aumenta la temperatura las hojas pueden deslizarse fácilmente unas respecto a otras. Cada capa constituye un líquido bidimensional.

Tiene especial interés la estructura de cónicas focales. Dado un bloque de cristal líquido, lo descomponemos en dos conjuntos de pirámides, la mitad de los cuales se asienta en una de dos caras opuestas del bloque, con los vértices en la otra. Dentro de cada pirámide, las capas de cristal líquido se pliegan formando conos muy puntiagudos. Todos ellos tienen el mismo vértice y son aproximadamente rectos. A consecuencia de ello, sus bases son discos limitados por circunferencias. El radio mínimo  $\epsilon$  es el espesor de la capa de cristal líquido. En el interior de un dominio espacial, como una pirámide cuadrangular, los discos que forman las bases de los conos están distribuidos sobre la base de la pirámide. Para obtener una distribución de equilibrio se empieza inscribiendo en la base un disco de radio máximo. A continuación se inscriben discos con el radio máximo posible en cada uno de los cuatro rincones restantes, y así sucesivamente. Si fuera posible iterar esta operación indefinidamente, obtendríamos exactamente un relleno apoloniano.

Las propiedades físicas de este modelo de jabón dependen de la superficie y el perímetro de la suma de los intersticios. Todo ello tiene que ver con la dimensión fractal  $D$  de una especie de «negativo» fotográfico, el tamiz que no es penetrado por las moléculas de jabón. Para más detalles sobre la física del problema, véase Bidaux, Boccara, Sarma, Sèze, de Gennes y Parodi (1973).

FIG. 255. *Un fractal autoinverso (construcción de Mandelbrot)*

Esta lámina ilustra la discusión de la página 251.

FIGURA SUPERIOR. En las cadenas de Poincaré con  $M=4$ , por lo menos uno de los discos  $\Delta_{ijk}$  no es acotado, llamémosle  $\Delta_{123}$ , y se solapa con el disco  $\Delta_{341}$ . (Aquí  $\Delta_{341}$  tampoco es acotado, pero no tiene por qué ser siempre así.) La reunión de  $\Delta_{123}$  y  $\Delta_{341}$ , en gris, nos da una primera aproximación del exterior de  $L$ . Es una situación análoga a la aproximación del exterior de la  $K$  de Koch por el hexágono regular convexo de la lámina 71.

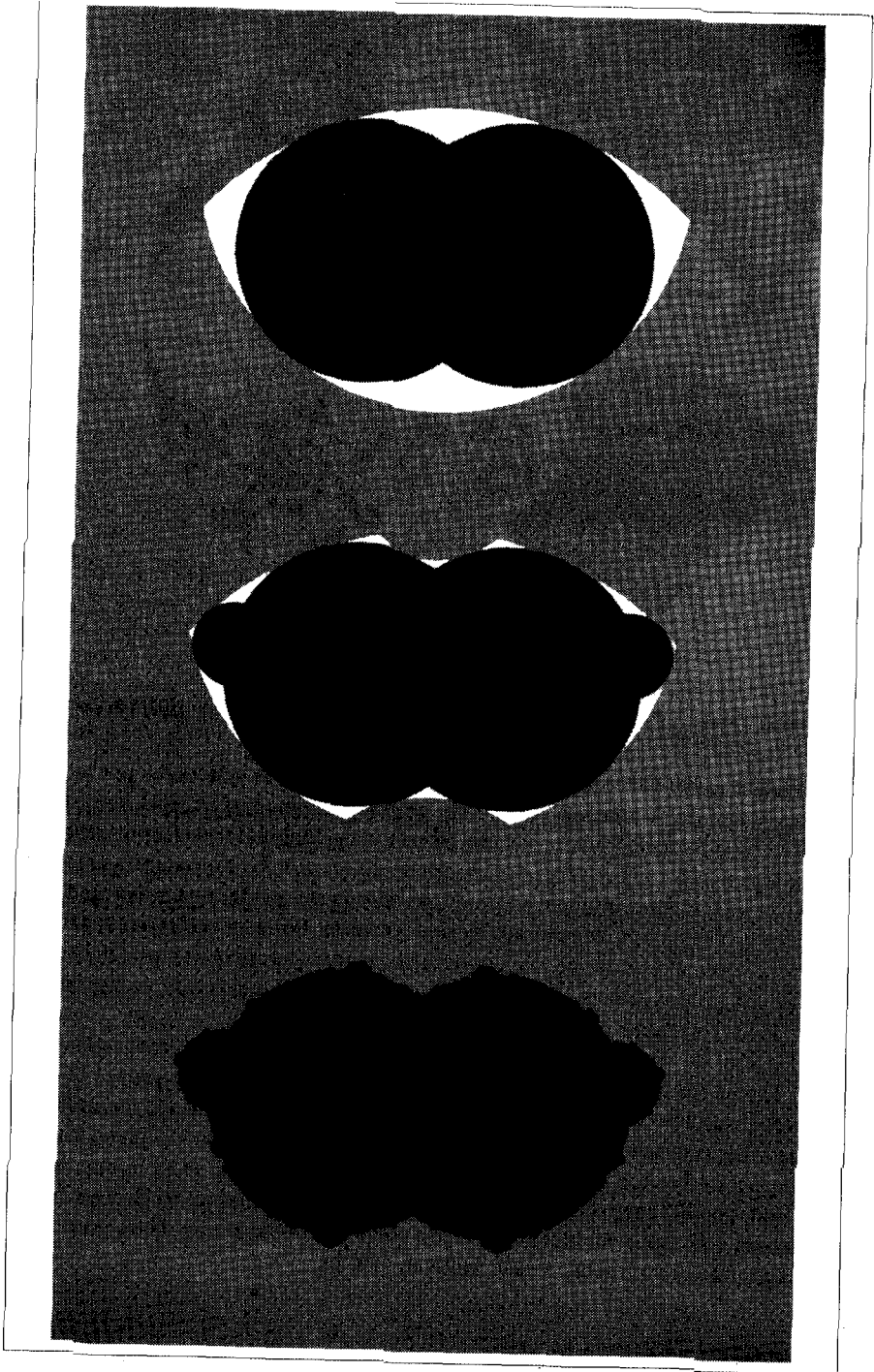
Los discos  $\Delta_{234}$  y  $\Delta_{412}$  se cortan y su reunión, en negro, nos da una primera aproximación del interior de  $K$ . Es una situación parecida a la aproximación del interior de  $K$  por los dos triángulos que forman la estrella regular de seis puntas de la lámina 71.

FIGURA CENTRAL. Una segunda aproximación del exterior de  $L$  se obtiene añadiendo a  $\Delta_{123}$  y  $\Delta_{341}$  sus inversos con respecto a  $C_4$  y  $C_2$ , respectivamente. El resultado, en gris, es análogo a la segunda aproximación del exterior de  $K$  en la lámina 71.

La segunda aproximación correspondiente al interior de  $L$  se obtiene añadiendo a  $\Delta_{234}$  y  $\Delta_{412}$  sus inversos con respecto a  $C_1$  y  $C_3$ , respectivamente. El resultado, en negro, es análogo a la segunda aproximación del interior de  $K$  en la lámina 71.

FIGURA INFERIOR. El exterior de  $L$ , en gris, es la reunión de los clanes de  $\Delta_{123}$  y  $\Delta_{341}$ , y su interior, en negro, es la reunión de los clanes de  $\Delta_{234}$  y  $\Delta_{412}$ . La estructura fina del interior de  $L$  se ve en la parte inferior de la lámina 257, donde se parte de otra cadena de Poincaré distinta. Juntos, los dominios abiertos en negro y en gris recubren todo el plano menos  $L$ .





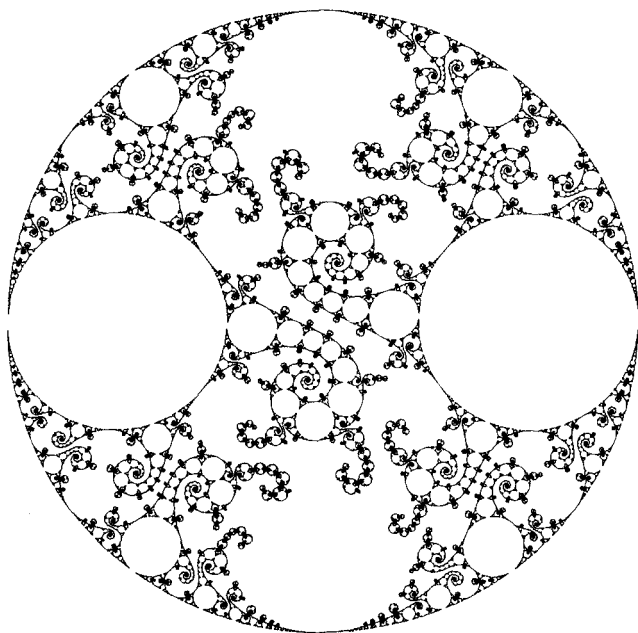


FIG. 256. *Fractal autohomográfico, cerca del límite de Peano*

Para el matemático, el principal interés de los grupos generados por inversiones reside en su relación con ciertos grupos de homografías. Una homografía (también llamada transformación bilineal o de Möbius) transforma el plano complejo según  $z \rightarrow (az + b)/(cz + d)$ , donde  $ad - bc = 1$ . La homografía más general se puede descomponer en producto de una inversión, una simetría axial (que es una inversión degenerada) y una rotación. Por esta razón, en ausencia de rotaciones, el estudio de las homografías aprovecha muchas cosas del estudio de los grupos generados por inversiones. Aunque, claro está, la introducción de las rotaciones enriquece más el tema.

He aquí un ejemplo de conjunto límite  $L$  para un grupo de homografías. Lo ideó David Mumford en el curso de unas investigaciones inspiradas por los nuevos resultados presentados en este capítulo, quien ha tenido la amabilidad de permitir su publicación aquí. Esta figura casi barre un dominio plano y presenta extraordinarias analogías y diferencias con la figura de la lámina 176.

Bajo condiciones muy generales T. Akaza, A. F. Beardon, R. Bowen, S. J. Patterson y D. Sullivan han demostrado que el conjunto límite de un grupo de homografías es un fractal. Véase Sullivan (1979).

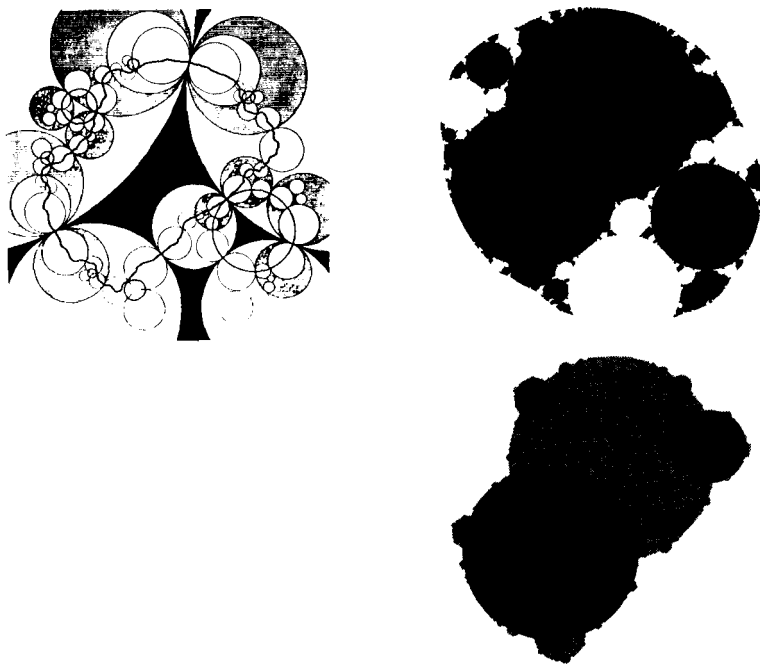


FIG. 257. *Un célebre fractal autoinverso corregido  
(construcción de Mandelbrot)*

La figura superior izquierda es una reproducción de la figura 156 de Fricke y Klein (1897), que pretende (en mi terminología) representar el fractal autoinverso generado por las cinco circunferencias que delimitan el dominio central en negro. Esta figura ha sido ampliamente reproducida.

El contorno de la figura negra de la parte superior derecha muestra la verdadera forma de dicho fractal, según mi construcción basada en los  $\sigma$ -discos osculadores. Como se ve, la discrepancia es horrorosa. Fricke ya sabía que  $L$  contenía círculos, y dio a su delineante las instrucciones pertinentes, pero por lo demás Fricke no tenía idea de qué clase de figura irregular era de esperar.

El verdadero  $L$  contiene el contorno  $L^*$  de la figura dibujada en la parte inferior izquierda empleando mi algoritmo. Este  $L^*$  es el fractal autoinverso que corresponde a las cuatro circunferencias generatrices que forman una cadena de Poincaré. Es claro que las imágenes de  $L^*$  por otras inversiones están también contenidas en  $L$ . En Mandelbrot (1982i) se comenta esta lámina.

En este capítulo se abordan dos familias muy simples de transformaciones y se investigan ciertos conjuntos fractales invariantes bajo dichas transformaciones, las cuales pueden servir como generadores de los mismos.

En primer lugar, una transformación quebrada de la recta real servirá para profundizar nuestra comprensión del polvo de Cantor. Quizá estas observaciones hubieran podido incluirse en el capítulo 8, pero aquí se apreciará mejor su valor.

En particular, nos servirán para apreciar el efecto de las transformaciones cuadráticas, tanto reales como complejas, de la forma  $x \rightarrow f^*(x) = x_2 - \mu$ , donde  $x$  y  $\mu$  son números reales, o  $z \rightarrow f^*(z) = z_2 - \mu$ , donde  $z = x + iy$  y  $\mu$  son números complejos.

El caso elemental  $\mu = 0$  es geoméricamente trivial, pero otros valores de  $\mu$  llevan asociada una riqueza fractal extraordinaria, que en buena parte fue revelada por vez primera en Mandelbrot (1980n).

Las figuras invariantes en cuestión se obtienen como subproducto del estudio de la iteración, esto es, de la aplicación repetida de una de las transformaciones anteriores. Denotaremos por  $x_0$  o por  $z_0$  los valores iniciales, mientras que  $x_k$  o  $z_k$  denotarán las imágenes respectivas después de  $k$  iteraciones de la transformación  $f^*$ .

En líneas generales, se puede decir que la iteración se estudió en tres estadios. El primero, que se ocupaba del caso complejo, estuvo dominado por Pierre Fatou (1878-1929) y por Gaston Julia (1893-1978). Sus publicaciones son obras maestras del análisis complejo clásico, muy admiradas entre los matemáticos, aunque demasiado difíciles para tomarlas aquí como punto de partida. En mi trabajo, del que este capítulo sólo es un esbozo muy conciso, se hacen intuitivos algunos de sus hallazgos fundamentales, combinando análisis, física y representación gráfica. Se pone así de manifiesto una gran cantidad de hechos nuevos.

El consiguiente resurgir de este campo de investigación hace que las propiedades de iteración sean esenciales para la teoría de los fractales. El

hecho de que los resultados de Fatou-Julia no progresaran por sí solos hasta convertirse en el *origen* de esta teoría nos sugiere que incluso el análisis clásico necesita de la intuición para avanzar, y que los ordenadores pueden ser útiles para este fin.

El estadio intermedio incluye los estudios de P. J. Myrberg sobre la iteración de aplicaciones cuadráticas reales (sobre  $R$ ), por ejemplo Myrberg (1962), Stein y Ulam (1964), y Brolin (1965).

El estadio actual ignora en gran medida el pasado, y se concentra en las aplicaciones de  $[0,1]$  en sí mismo, como se estudia en Gurel y Rössler (1979), Helleman (1980), Collet y Eckman (1980), Feigenbaum (1981), y Hofstadter (1981). La última sección de este capítulo se ocupa del exponente  $\delta$  de Grossmann y Thomae (1977) y Feigenbaum (1978): se demuestra que la existencia de  $\delta$  se sigue de una propiedad más evidente (fractal) de la iteración en el plano complejo.

*El polvo de Cantor se puede generar mediante una transformación no lineal*

Ya sabemos desde el capítulo 8 que el polvo triádico de Cantor  $C$  es invariante bajo transformaciones de semejanza con razones de proporcionalidad de la forma  $3^{-k}$ . Esta autosemejanza es una propiedad vital, aunque no basta para especificar  $C$ . En cambio,  $C$  está determinado completamente como el mayor conjunto acotado invariante bajo la siguiente transformación no lineal en «V invertida»:

$$x \rightarrow f(x) = \{1/2 - |x - 1/2|\} / r, \text{ con } r = 1/3.$$

Concretando más, si aplicamos repetidas veces esta transformación del eje real en sí mismo, con  $x_0$  extendido sobre el eje  $x$ , los valores finales se reducen a  $x = -\infty$  más el polvo de Cantor  $C$ . Los puntos fijos  $x = 0$  y  $x = 3/4$  pertenecen a  $C$ .

ESBOZO DE UNA DEMOSTRACIÓN DE LA INVARIANCIA DE  $C$ . Como para  $x < 0$ ,  $f(x) = 3x$ , las iteraciones de todos los puntos  $x_0 < 0$  convergen directamente a  $-\infty$ , esto es, sin dejar de cumplirse  $x_n < 0$ . Para los puntos  $x_0 > 1$ , dicha convergencia directa va precedida por un paso preliminar, pues  $x_k < 0$  para todo  $k \geq 1$ . Para los puntos del hueco  $1/3 < x < 2/3$  hacen falta 2 pasos preliminares, puesto que  $x_1 > 0$ , pero  $x_k < 0$  para todo  $k \geq 2$ . Los puntos de los huecos  $1/9 < x < 2/9$  o  $7/9 < x < 8/9$  necesitan de 3 pasos preliminares. Y en general, si un intervalo está acotado por un hueco que tiende a  $-\infty$  después de  $k$  iteraciones, el tercio central (abierto) de dicho inter-

valo tenderá directamente a  $-\infty$  después de la  $(k+1)$ -ésima iteración. Pero resulta que, de *todos* los puntos de  $C$ , ninguno converge hacia  $-\infty$ .

### *Finitud de la cota superior*

Para extender estos resultados al polvo de Cantor generalizado con  $N=2$  y  $r$  comprendido entre 0 y  $1/2$ , basta con introducir el  $r$  escogido en la fórmula  $f(x) = \{1/2 - |x - 1/2|\} / r$ . Si se quiere obtener cualquier otro tipo de polvo de Cantor, el grafo de  $f(x)$  tiene que ser una curva en zigzag apropiada.

Sin embargo, no se dispone de un método comparable para el polvo de Cantor extrapolado a todo el eje real. Este es un caso especial de una propiedad muy general: normalmente una  $f(x)$  no lineal comporta *en sí misma* una cota superior finita  $\Omega$ ; mientras que, como ya sabemos, todas las transformaciones lineales ( semejanzas y afinidades) se caracterizan porque  $\Omega = \infty$ , y (en caso de que haga falta) un  $\Omega$  finito se tiene que imponer artificialmente.

### *Anatomía del polvo de Cantor*

Ya sabemos por el capítulo 7 que  $C$  es un conjunto muy «delgado», pero el comportamiento de las iteraciones de  $f(x)$  nos proporcionará una mejor comprensión de las distinciones entre sus puntos.

Cualquiera podría estar tentado, a primera vista, de pensar que  $C$  se reduce a los extremos de los huecos abiertos. Pero la realidad es muy otra, pues  $C$  contiene, por definición, todos los límites de sucesiones de puntos extremos de los huecos.

Este hecho no pasa por intuitivo. No me habría extrañado que nuestro maltrecho conocido Hans Hahn hubiera incluido estos puntos límite en su lista de conceptos, cuya existencia sólo se puede imponer por medio de la fría lógica. Pero la presente discusión constituye una prueba *intuitiva* de que estos puntos límite tienen unas personalidades muy marcadas y diversas.

Así, por ejemplo, el punto  $x=3/4$ , que es invariante según  $f(x)$ , no cae en el tercio central ni en la frontera de ningún intervalo. Algunas de las imágenes iteradas de los puntos de la forma  $x=(1/4)/3^k$  converge a  $x=3/4$ . Además, hay una infinidad de ciclos límite, cada uno de ellos formado por un número finito de puntos. Y  $C$  contiene también puntos cuyas imágenes lo recorren indefinidamente.

### *El generador cuadrático*

La función generatriz en  $V$  invertida usada en las secciones anteriores se eligió para obtener un resultado ya conocido, pero da al polvo de Cantor una apariencia artificial. A continuación la sustituiremos por

$$x \rightarrow f(x) = \lambda x(1-x),$$

cuya riqueza inesperada ya fue observada por Fatou (1906). Si se cambia el origen y la escala de las  $x$ , y se escribe  $\mu = \lambda^2/4 - \lambda/2$ , esta función se puede escribir como

$$x \rightarrow f^*(x) = x^2 - \mu.$$

Unas veces usaremos  $f(x)$  y otras  $f^*(x)$ , según convenga.

Dichas funciones recibirán el nombre de *generador cuadrático*. Elevar al cuadrado es, naturalmente, una operación algebraica, aunque aquí se le da una interpretación geométrica, y llamaremos conjuntos *autocuadráticos* a aquellos que son invariantes bajo una transformación cuadrática. La más simple es la que transforma el punto de abscisa  $x$  en el punto de abscisa  $x^2$ . En tal caso los puntos autocuadráticos de la recta se reducen a  $x=0$ ,  $x=\infty$  y  $x=1$ . Y aunque el añadido del término  $-\mu$  pueda parecer totalmente inocuo, introduce de hecho unas posibilidades completamente inesperadas, que pasamos a considerar a continuación.

### *Polvos de Fatou reales y autocuadráticos*

Como la transformación en  $V$  invertida nos ha dado como resultado un producto bien conocido, el polvo de Cantor, nos facilitará muchísimo la introducción de un descubrimiento extraordinario, aunque de difusión siempre restringida, de Pierre Fatou. Fatou (1906) supone que  $\lambda$  es real y que  $\lambda > 4$ , y estudia el mayor conjunto acotado de  $R$  invariante según  $f(x)$ . Este es un pariente próximo del polvo de Cantor al que llamo *polvo de Fatou real*. No precisa de mayor explicación y se encuentra ilustrado en la lámina 274.

En el plano complejo, el mayor conjunto autocuadrático acotado para los valores de  $\lambda$  anteriores sigue siendo el polvo de Fatou real.

La curva autocuadrática más simple se tiene para  $\mu=0$ , y se trata de la circunferencia  $|z|=1$ . La transformación  $z \rightarrow f(z)$  convierte una cinta que envuelve una vez la circunferencia en una cinta que da dos vueltas a la misma, dejando fijo el «empalme» en  $z=1$ . El máximo dominio acotado y autocuadrático correspondiente es el disco  $|z| \leq 1$ .

Sin embargo, si se introduce un  $\mu \neq 0$  real (láminas 265 y 266), y luego un  $\mu$  complejo (láminas 271 y 272), se abren las cajas de Pandora de las posibilidades, las *curvas fractales de Julia*, tan gratas a la vista como al intelecto.

EL SEPARADOR  $S$ . La topología del mayor conjunto acotado autocuadrático depende del lugar que ocupa  $\mu$  con respecto a una curva ramificada  $S$ , descubierta por mí, a la que llamo separador. Es la frontera conexa de la figura en negro de la parte inferior de la lámina 268; se trata de una «lemniscata límite», a saber, el límite para  $n \rightarrow \infty$  de las curvas algebraicas denominadas lemniscatas, definidas por  $|f_n^*(0)|=R$  para un cierto  $R$  grande. En la lámina 269 se explica más en detalle la estructura de  $S$ .

LOS ÁTOMOS. El dominio abierto interior de  $S$  se descompone en una infinidad de componentes conexas para las que propongo el nombre de *átomos*. Las fronteras de dos átomos dados, o bien son disjuntas o bien sólo tienen un punto en común, que llamaremos «enlace», perteneciente a  $S$ .

DIMENSIÓN TOPOLÓGICA. Si  $\mu$  cae fuera de  $S$ , el mayor conjunto acotado autocuadrático es un polvo (de Fatou). Si  $\mu$  pertenece a  $S$  o es un enlace, el conjunto máximo correspondiente es un dominio limitado por una curva autocuadrática. Hay algún  $\mu$  de  $S$  que da lugar a una curva en forma de árbol.

FRACTALES AUTOCUADRÁTICAS. Se dice que estos polvos y curvas son fractales cuando  $\mu \neq 0$ , según ha demostrado plenamente Dennis Sullivan en algunos casos, y no me cabe la menor duda de que se podrá probar para todos los demás.

La forma de una curva o un polvo autocuadráticos varía continuamente con  $\mu$ , por lo que  $D$  es necesariamente una función continua de  $\mu$ .

RAMIFICACIÓN. Si  $\lambda$  pertenece a uno de los discos abiertos de la parte superior de la lámina 269, la curva autocuadrática es un arco simple cerrado (un circuito sin ramificaciones), como en las láminas 265 y 266.

Si  $\lambda$  cae sobre las circunferencias  $|\lambda|=1$  o  $|\lambda-2|=1$ , o en la región abierta y conexa que las rodea, la curva autocuadrática correspondiente es una red ramificada, con tremas rodeadas por circuitos fractales, como los dragones de la lámina 272.



Si  $\lambda$  cae en las importantísimas moléculas isla, que, como pronto se demostrará, son *regiones de no confluencia a 1*, la curva autocuadrática es un  $\sigma$ -lazo o un  $\sigma$ -dragón, como el de la parte inferior de la lámina 271. La  $\sigma$  no introduce ningún nuevo lazo.

### $\mu$ -átomos y $\mu$ -moléculas

Un análisis más completo de la dependencia en el parámetro es más fácil si éste es  $\mu$ . Un  $\mu$ -átomo puede tener forma de corazón, en cuyo caso es la «semilla» donde se enlaza una infinidad de átomos ovales, ya sea directamente, ya sea por átomos intermedios. Los átomos mutuamente enlazados, junto con los enlaces, forman una «molécula». La cúspide de una semilla nunca es un enlace.

Cada átomo tiene asociado un número entero  $w$ , su «periodo». Si  $\mu$  pertenece a un átomo de periodo  $w$ , las imágenes iteradas  $f_n^*(z)$  convergen a  $\infty$  o a un ciclo límite estable formado por  $w$  puntos. En un átomo de periodo  $w$ ,  $|f_w^*(z_\mu)| < 1$ , siendo  $z_\mu$  un punto cualquiera del ciclo límite correspondiente a  $\mu$ . Sobre la frontera del átomo,  $|f_w^*(z_\mu)| = 1$ , siendo  $f_w^*(z_\mu) = 1$  la característica de una cúspide o una «raíz». Cada átomo contiene un punto que llamamos «núcleo», que cumple  $f_w^*(z_\mu) = 0$  y  $f_w^*(0) = 0$ .

Los núcleos en el eje real fueron introducidos por Myrberg (véase Myrberg, 1962) y redescubiertos en Metropolis, Stein y Stein (1973). Las transformaciones correspondientes se suelen llamar «superestables» (Collet y Eckman, 1980).

Considerada una ecuación algebraica en  $\mu$ , la igualdad  $f_w^*(0) = 0$  es de orden  $2^{w-1}$ . Por tanto, podría haber como máximo  $2^{w-1}$  átomos de periodo  $w$ , pero de hecho hay menos, excepto en el caso  $w = 1$ . Para  $w = 2$ ,  $f_2^*(0) = 0$  tiene 2 raíces, pero una de ellas ya es el núcleo de un átomo «antiguo» de periodo 1. En general, todas las raíces de  $f_m^*(0) = 0$  lo son también de  $f_{km}^*(0) = 0$ , donde  $k$  es un entero mayor que 1. Nótese además que cada punto racional de la frontera de un átomo de periodo  $w$ , definido por la condición  $f_w^*(z_\mu) = \exp(2\pi im/n)$ , donde  $m/n$  es una fracción irreducible  $< 1$ , lleva implícito un «enlace receptor» listo para conectarse a un átomo de periodo  $nw$ . Como consecuencia de ello, algunos nuevos átomos se conectan a enlaces receptores ya existentes. Pero esto no agota todas las posibilidades de nuevos átomos, y a los restantes no les queda otra alternativa que sembrar nuevas moléculas. El número de moléculas es, pues, infinito.

Si  $\mu$  varía continuamente en una molécula, cada vez que se atraviesa un enlace yendo hacia afuera aparece una bifurcación:  $w$  se multiplica

por  $n$ . Por ejemplo, al aumentar  $\mu$  tomando valores reales se tiene el doblamiento de período de Myrberg. La inversa de la bifurcación, que se estudia en Mandelbrot (1980n) y se llama *confluencia*, se detiene al llegar al período de la semilla de la molécula. La molécula continente es la región de confluencia para  $c=1$  y cada molécula isla es la región de confluencia para  $c>1$ . La forma del dragón o del subdragón correspondiente viene determinada por los valores de  $f_w^*(z_\mu)$  y de  $w/c$ .

*El separador es una curva fractal; la  $\delta$  de Feigenbaum como corolario*

Mi conjetura □ basándome en un argumento de «renormalización» ■ es que cuanto más alejados están de la semilla de su molécula, los átomos tienden cada vez más a tener una forma *idéntica*.

Como corolario se tiene que la frontera de cada molécula es localmente autosemejante. Y como a pequeñas escalas no es lisa, se trata de una curva fractal.

Esta autosemejanza fractal generaliza un efecto relativo a la bifurcación de Myrberg, descubierto por Grossmann y Thomae y por Feigenbaum. Las anchuras de las intersecciones de retoños cada vez menores con el eje real  $\lambda$  o  $\mu$  convergen a una sucesión geométrica decreciente de razón  $\delta=4,66920\dots$  (Collet y Eckman, 1980). En su forma original, la existencia de  $\delta$  parece un resultado analítico técnico. Ahora se ha demostrado que es un aspecto de una propiedad más general de los fractales escalantes.

Cada bifurcación en  $m>2$  introduce una nueva razón fundamental.

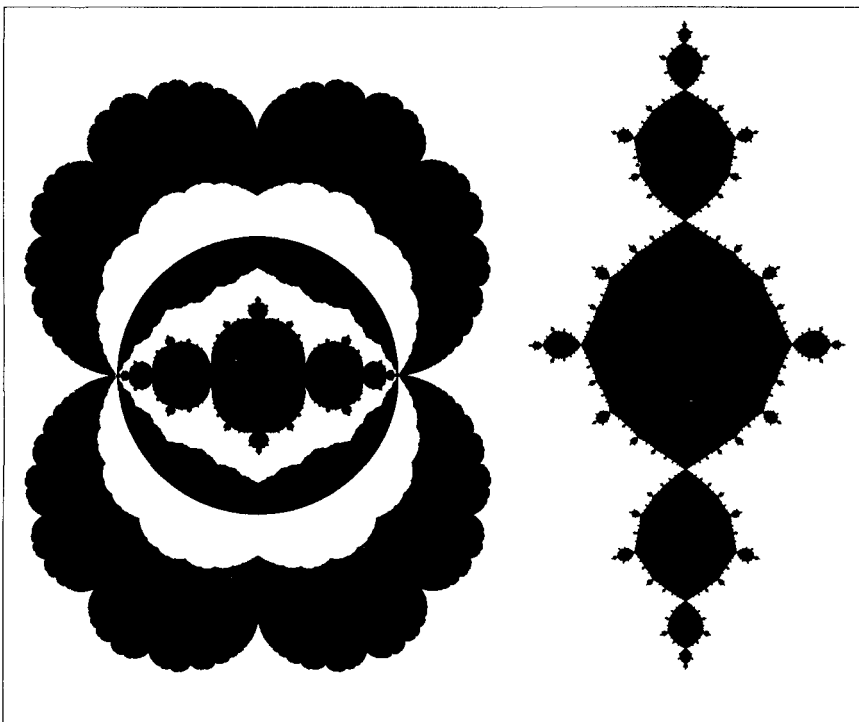


FIG. 265. *Curvas fractales autocuadráticas con  $\lambda$  real.*

Las figuras de las láminas 265 a 274 se presentan aquí por primera vez, a excepción de algunas reproducidas de Mandelbrot (1980n).

La figura de la izquierda representa los dominios acotados autocuadráticos máximos para  $\lambda = 1; 1,5; 2,0; 2,5$  y  $3,0$ . La figura central en negro corresponde a todos los valores de  $\lambda$  comprendidos entre 0 y 1.

$\lambda = 1$ : VENERA.

$\lambda = 3$ : CURVA DRAGÓN DE SAN MARCO. Tenemos aquí una extrapolación fantástica del perfil de la basílica de Venecia, completada con su reflejo sobre una «Piazza» inundada; la bauticé *dragón de San Marco*.

La figura de la derecha corresponde a  $\lambda = 3,3260680$ . Es la  $\lambda$  nuclear (según la definición de la pág. 263) que corresponde a  $w = 2$ . La figura autocuadrática correspondiente se ha girado  $90^\circ$  para que quepa en la página.

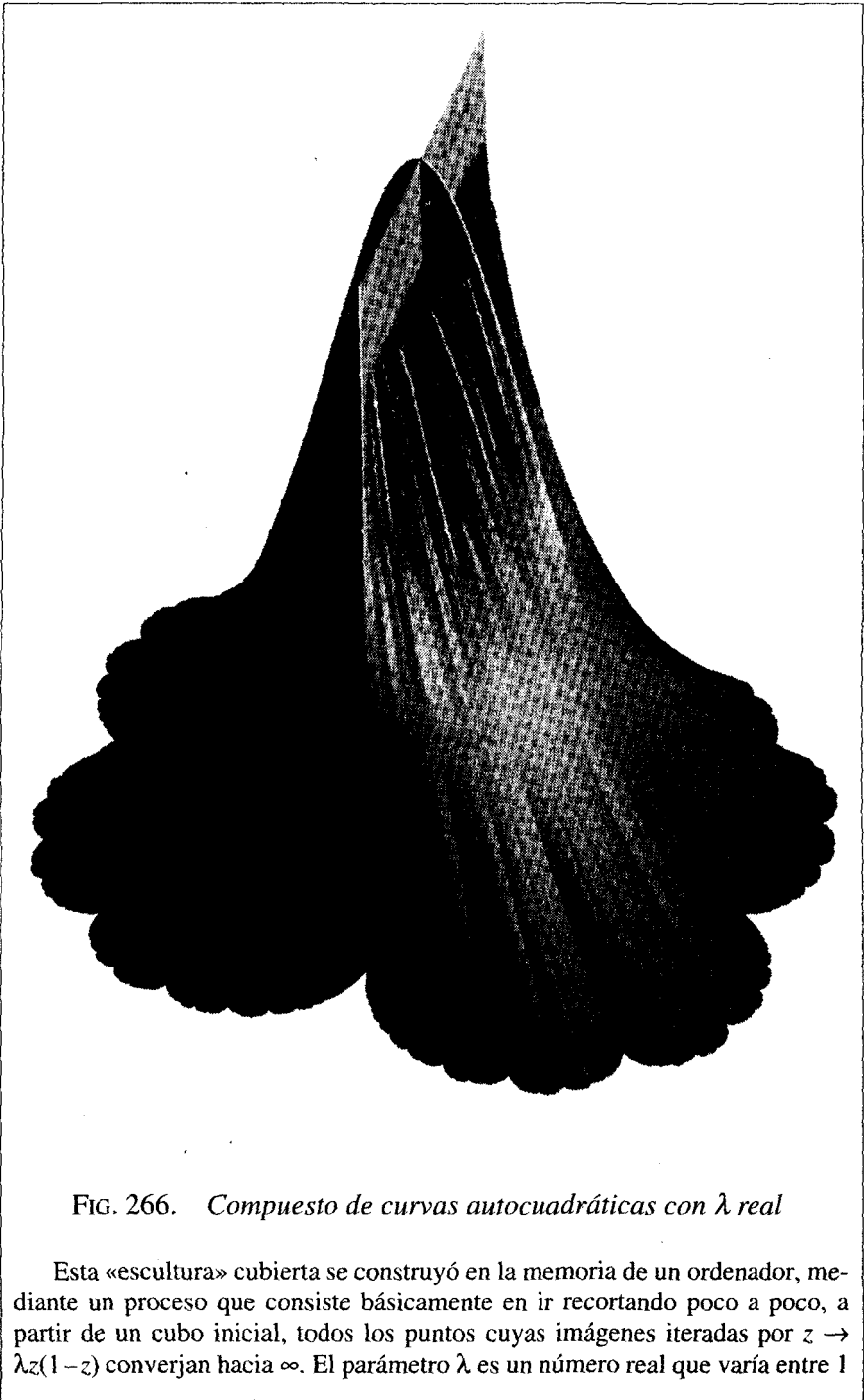


FIG. 266. *Compuesto de curvas autocuadráticas con  $\lambda$  real*

Esta «escultura» cubierta se construyó en la memoria de un ordenador, mediante un proceso que consiste básicamente en ir recortando poco a poco, a partir de un cubo inicial, todos los puntos cuyas imágenes iteradas por  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$  converjan hacia  $\infty$ . El parámetro  $\lambda$  es un número real que varía entre 1

y 4. El eje  $\lambda$  está orientado verticalmente a lo largo de un lado de la escultura, mientras que  $x$  e  $y$  forman el número complejo  $z=x+iy$ .

Cada sección horizontal es una figura acotada autocuadrática maximal de parámetro  $\lambda$ .

En el caso del valor especial  $\lambda=2$ , el contorno de la sección correspondiente es una circunferencia: el «ceñidor» de la cortina.

Para todos los demás valores de  $\lambda$ , el contorno de la figura autocuadrática es una curva fractal, incluidas las que ya vimos en la lámina 265. Se perciben unos «pliegues» sorprendentes cuya posición varía con  $\lambda$ ; por debajo del ceñidor forman *entrantes* y por encima *salientes*.

Tienen especial interés las manchas de la pared que sostiene la cortina. Posiblemente esta escultura no pueda hacer justicia a la complicación de la parte superior de la cortina. (A) Para cada valor de  $\lambda$ , la cortina contiene un árbol fractal (que hace de «espina dorsal») formado por las antiimágenes iteradas del intervalo  $[0,1]$  del eje  $x$ . Para todos los valores pequeños y algunos grandes de  $\lambda < 3$ , las ramas de dicho árbol están totalmente «cubiertas de carne». Sin embargo, para otros valores grandes de  $\lambda$  la carne no existe. Aquí, las ramas a lo largo de  $x=1/2$  o de  $y=0$  son visibles, pero el resto se pierde irremediabilmente en el proceso gráfico. (B) Algunas bandas horizontales de la pared que queda por detrás de la cortina están completamente cubiertas de pequeños «montículos» o «arrugas», aunque aquí sólo se pueden ver unas pocas de las mayores. Estas bandas y montículos tienen que ver con las «moléculas isla» (láminas 268 y 269) intersecadas por el eje real. Las observaciones (A) y (B) generalizan la teoría de Myrberg-Feigenbaum.

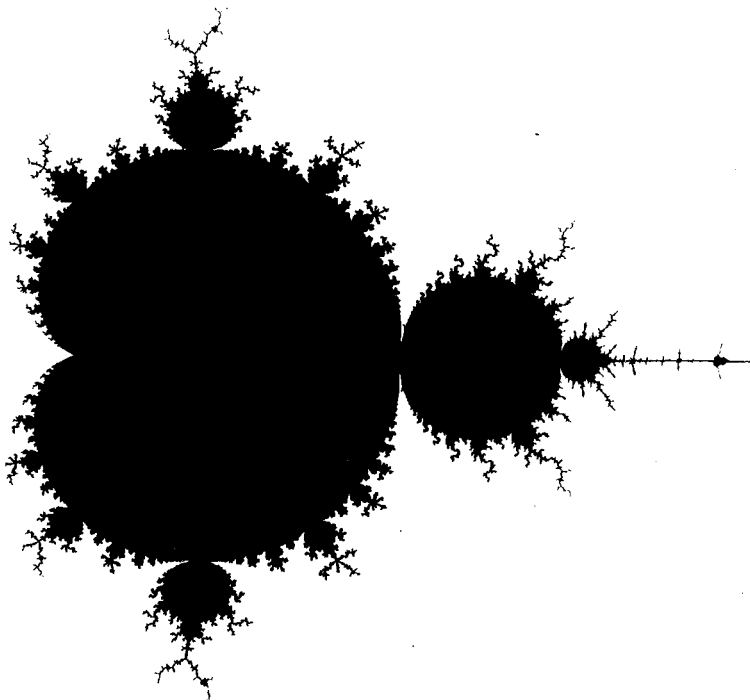
FIGS. 268 y 269. *Los separadores de  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$  y de  $z \rightarrow z_2 - \mu$*

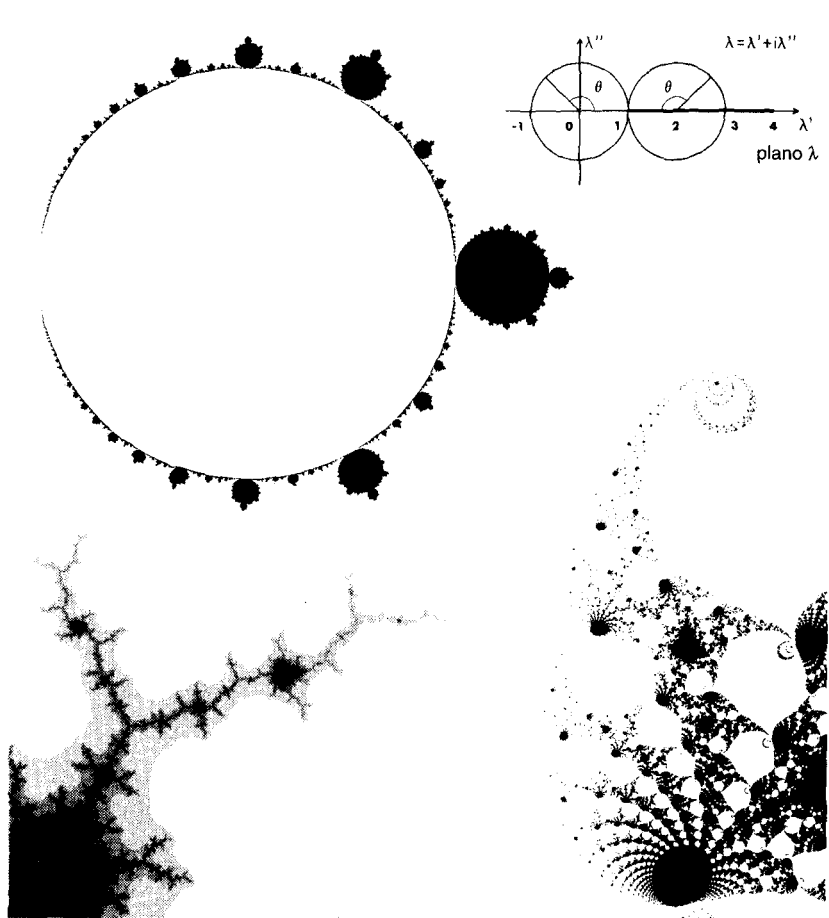
PARTE INFERIOR DE LA LÁMINA 268. MAPA  $\mu$ . Los  $\mu$  de la región cerrada en negro (limitada por una curva fractal) son aquellos para los que las imágenes iteradas de  $z_0=0$  por la transformación  $z \rightarrow z_2 - \mu$  no convergen hacia  $\infty$ . La gran cúspide corresponde a  $\mu=-1/4$ , y el punto del extremo derecho es  $\mu=2$ .

PARTE SUPERIOR DE LA LÁMINA 269. MAPA  $\lambda$ . Los  $\lambda$  de la región cerrada en negro, junto con los del disco vacío, cumplen  $\text{Re}\lambda > 1$  y son tales que las imágenes iteradas de  $z_0=1/2$  por  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$  no convergen hacia  $\infty$ . El mapa  $\lambda$  completo es simétrico con respecto a la línea  $\text{Re}\lambda=1$ .

EL DISCO  $|\lambda-2| \leq 1$ , Y EL DISCO  $|\lambda| \leq 1$  EXCEPTO  $\lambda=0$ . Los  $\lambda$  en estos dominios son tales que las imágenes iteradas de  $z_0=1/2$  convergen a un punto límite acotado.

LA CORONA Y LOS RETOÑOS. El mapa  $\lambda$  fuera de los discos vacíos forma una «corona», que se descompone en «retoños» cuyas «raíces» son los «enlaces receptores» definidos como los puntos de la forma  $\lambda = \exp(2\pi im/n)$  o  $\lambda = 2 - \exp(2\pi im/n)$ , donde  $m/n$  es una fracción irreducible  $< 1$ .





PARTE SUPERIOR DE LA LÁMINA 268. Esta es una parte de la inversión del mapa  $\lambda$  con respecto a  $\lambda=1$ . Si en el mapa  $\lambda$  se examinan los retoños cuyas raíces son de la forma  $\lambda=\exp(2\pi i/n)$ , uno se queda con la impresión de que los «puntos correspondientes» están sobre circunferencias. Esta figura nos lo confirma. Otras inversiones nos confirman que otras figuras que parecen círculos lo son realmente.

MOLÉCULAS ISLA. Muchas de las «manchas» de los alrededores del mapa son verdaderas «moléculas isla», lo que es señalado por primera vez en Mandelbrot (1980n). Tienen la misma forma que el mapa  $\mu$  entero, aparte de una distorsión no lineal.

SEPARADOR, ESPINAS Y ÁRBOLES. Los contornos de los dominios en negro de los mapas  $\lambda$  o  $\mu$  son curvas conexas que yo mismo descubrí y denominé *separador S*. El conjunto interior a  $S$  se compone de átomos abiertos (véase el

texto). Si el período del átomo es  $w$ , definamos su *espinas* como la curva sobre la que  $f_w^*(z_\mu)$  es real.

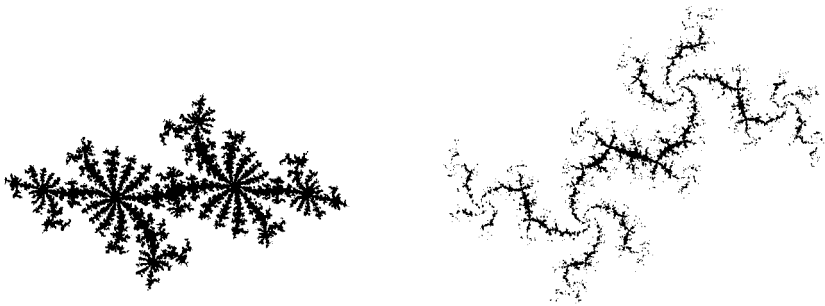
Las espinas que están sobre el eje real se conocen en la teoría de las aplicaciones de  $[0, 1]$  sobre sí mismo, y se sabe que su adherencia es  $[-2, 4]$ .

Descubrí también que, en general, la adherencia de las espinas de los otros átomos se descompone en una colección de árboles, cada uno de ellos plantado en un enlace receptor. La lista de órdenes de ramificación en los distintos puntos de uno de dichos árboles es 1 para los puntos de ramificación, más los órdenes de bifurcación que nos llevan a la raíz del árbol. Además, si el árbol está plantado en un átomo isla, hay que añadir los órdenes de bifurcación que llevan de  $|\lambda - 2| \leq 1$  o  $|\lambda| \leq 1$  hasta dicho átomo.

PARTE INFERIOR IZQUIERDA DE LA LÁMINA 269. Este es un mapa  $\lambda$  detallado en la proximidad de  $\lambda = 2 - \exp(-2\pi i/3)$ . El conjunto interior a  $S$  es el límite de dominios de la forma  $|f_n(1/2)| < R$ , cuyos contornos son unas curvas algebraicas llamadas *lemniscatas*. Aquí se muestran unos cuantos de estos dominios superpuestos. Para valores grandes de  $n$  dichos dominios parecen inconexos, como ocurre también con el mapa  $\lambda$ , pero de hecho están conectados por fuera de la cuadrícula empleada en el cálculo.

PARTE INFERIOR DERECHA DE LA LÁMINA 269. Este es un mapa  $\lambda$  detallado cerca de  $\lambda = 2 - \exp(-2\pi i/100)$ . Este árbol de cien ramificaciones comparte unos rasgos sorprendentes con el mapa  $z$  de la lámina 272.



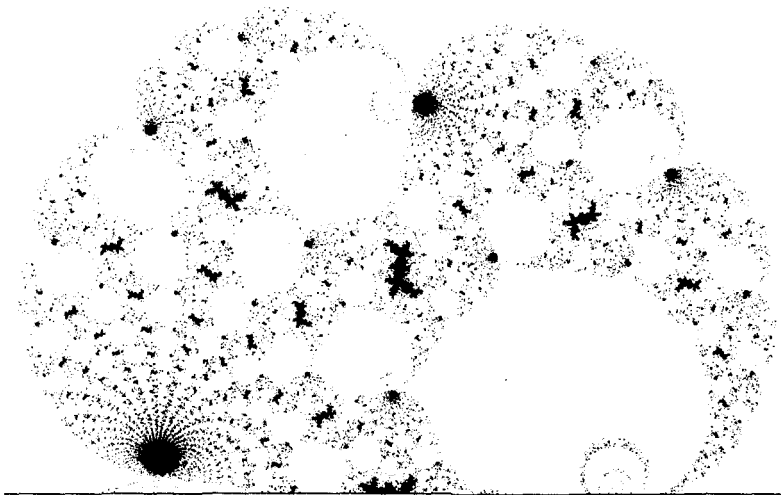


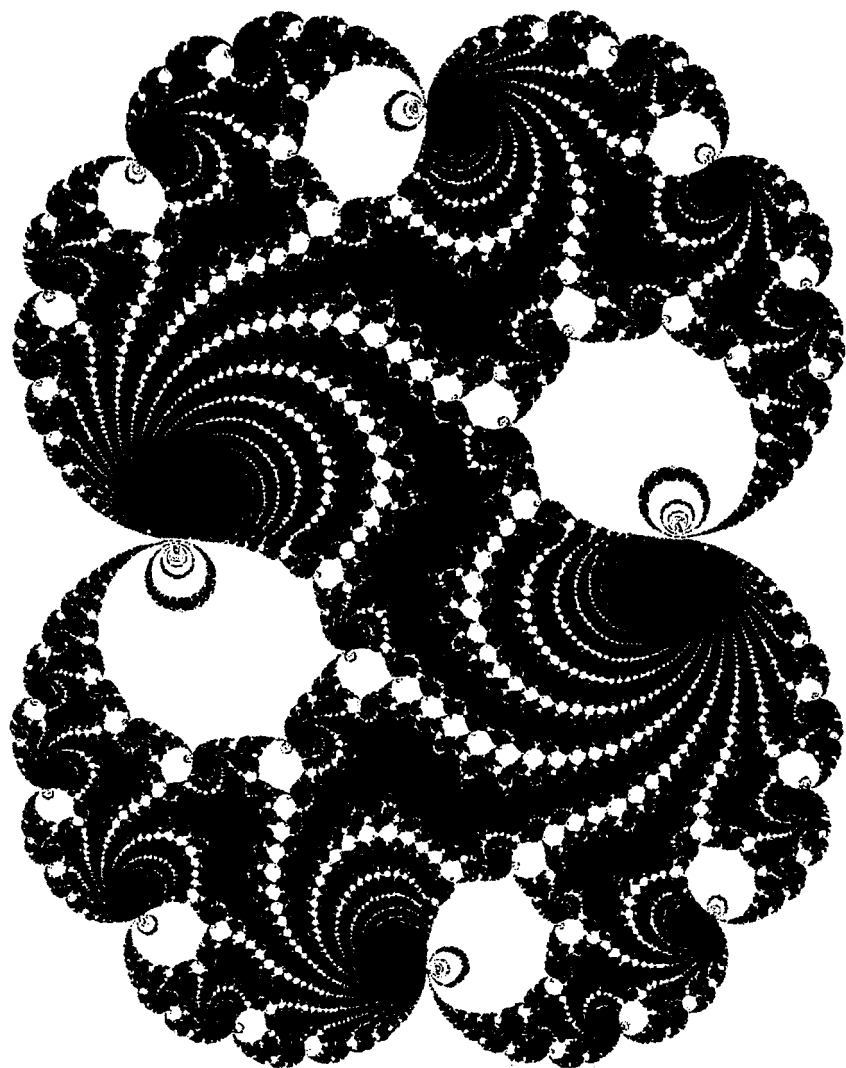
FIGS. 271 y 272. *Dragones autocuadráticos; aproximación al límite de «Peano»*

Todas las curvas autocuadráticas tienen su encanto particular. Y para mí, las más atractivas son los «dragones» que se muestran en estas láminas y en la C5.

LA MUDA DEL DRAGÓN. ¡Ver un dragón en el proceso de autotransformación cuadrática tiene que ser un espectáculo fascinante! Una «muda» monstruosa despega las pieles de los innumerables pliegues de la espalda y el vientre del dragón. Luego las estira hasta doblar su longitud, ¡que por supuesto se mantiene infinita! A continuación vuelve a plegar cada piel alrededor de la espalda y del vientre. Y por fin vuelve a pegar todos los pliegues en sus nuevas posiciones.

HERÁLDICA FRACTAL. No hay que confundir el dragón autocuadrático con el autosemejante de Harter y Heightway (láminas 99 y 100). El lector podría entretenerse en detallar las semejanzas y las múltiples diferencias.





BIFURCACIONES SUCESIVAS. Los mejores dragones autocuadráticos se obtienen cuando  $\lambda$  cae en un retoño de la lámina 269 correspondiente a  $\theta/2\pi = m/n$ , para valores pequeños de los enteros  $m$  y  $n$ . Si el orden de bifurcación es  $n$ , el número de cabezas o colas (o como se quiera llamar a estos dominios) del dragón que parten de cada punto de articulación es  $n$ . Una segunda bifurcación de orden  $m'/n'$  descompone cada uno de estos dominios en  $n'$  «enlaces salchicha», y los hace adelgazar aún más.

Cuando  $\lambda$  cae en el interior de un retoño, lejos de la raíz, se obtienen dragones robustos, ni obesos ni delgados. Si  $\lambda$  cae cerca de uno de los dos sub-

retoños que corresponden a un orden de bifurcación de 4 a 10, se obtienen dragones con una torsión, a la izquierda uno y a la derecha el otro.

PARTE SUPERIOR DERECHA DE LA LÁMINA 271. «DRAGÓN FAMÉLICO» Un dragón que sufre una infinidad de bifurcaciones pierde toda la carne y se convierte en una curva ramificada esquelética.

La dimensión topológica del conjunto que no es atraído hacia  $\infty$  es 0 para los polvos de Fatou, 1 para los dragones hambrientos y 2 para el resto de dragones.

PARTE INFERIOR DE LA LÁMINA 271.  $\sigma$ -DRAGÓN. Esta figura es conexa; su  $\lambda$  cae en la «gran isla» que hay junto a la costa de la parte inferior derecha de la lámina 269.

LÁMINA 272. EL LÍMITE SINGULAR  $\lambda = 1$ . DRAGONES DE PEANO. Supongamos que  $\lambda$  cae en una isla unida a la costa por el enlace de  $\theta = 2\pi/n$ . Cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , con lo que  $\lambda$  tiende a 1. El dragón correspondiente debe tender pues a la forma de venera basal en la cortina de la lámina 266. Pero existe una diferencia cualitativa entre  $n = \infty$  y  $n$  grande pero finito.

Cuando  $n \rightarrow \infty$ , el número de brazos del dragón aumenta, la piel se pliega y la dimensión de ésta aumenta. En realidad, toda la figura intenta converger a un «dragón ermitaño» que llene hasta rebosar la concha de una venera de  $\lambda = 1$ , es decir, que tienda a la dimensión  $D = 2$ . ¿Una curva de Peano auto-cuadrática? Sí, pero ya sabemos (capítulo 7) que las curvas de Peano no son tales: en cuanto alcanza  $D = 2$ , nuestra curva dragón muere como curva para convertirse en un dominio plano.

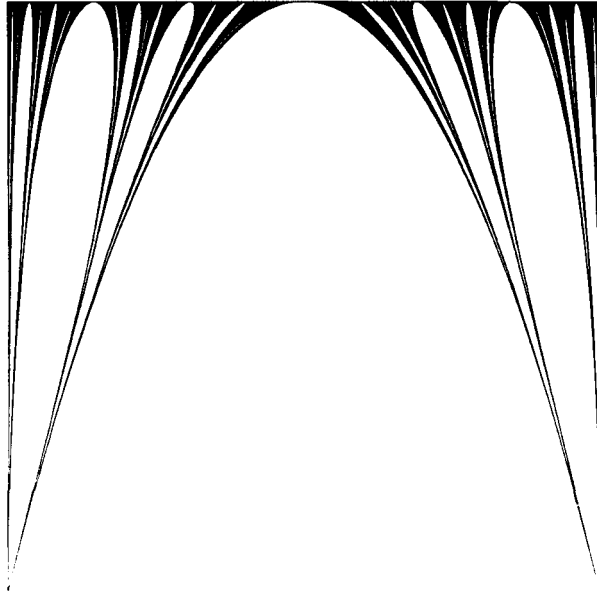


FIG. 274. *Polvos de Fatou reales autocuadráticos en  $[0,1]$*

Fatou (1906) es una obra maestra de un antiguo género literario: el *Comptes Rendus Notes* de la Academia de Ciencias de París. En muchos casos el objetivo es revelar poco, pero dejando constancia de que el autor ha pensado en todo.

Entre otras maravillosas observaciones muy bien comprendidas después de largo tiempo dedicado al estudio del tema, Fatou señala lo siguiente. Cuando  $\lambda$  es real y mayor que 4 o menor que  $-2$ , el mayor conjunto acotado invariante por la transformación  $x \rightarrow f(x) = \lambda x(1-x)$  es un polvo contenido en  $[0,1]$ . Esta lámina ilustra la forma de dicho polvo para  $\lambda > 4$ . A lo largo de la coordenada vertical,  $-4/\lambda$  varía desde  $-1$  hasta  $0$ . Los intervalos en negro señalan los extremos de las tremas de órdenes comprendidos entre 1 y 5. Los extremos  $x_1$  y  $x_2$  de la treme central son las soluciones de la ecuación  $\lambda x(1-x) = 1$ ; y están sobre una parábola. Las tremas de segundo orden acaban en los puntos  $x_{1,1}$ ,  $x_{1,2}$ ,  $x_{2,1}$  y  $x_{2,2}$ , tales que  $\lambda x_{m,n}(1-x_{m,n}) = x_m$ .

La notable relación entre los polvos de Cantor y una de las funciones más elementales merece ser conocida fuera de los círculos de especialistas.

Este capítulo pretende familiarizar al lector con una teoría que evolucionó independientemente de los fractales, pero que está siendo invadida por éstos. Su nombre más corriente es «teoría de los atractores extraños y de la evolución caótica (o estocástica)», aunque, como espero, a lo largo del presente capítulo se harán evidentes las razones por las que sugiero el nuevo nombre que le he dado en el título.

Su relación con los fractales bastaría para justificar que dicha teoría sea mencionada en este ensayo, pero pienso que hay razones para dedicarle todo un capítulo. Una de ellas, de tipo práctico, es que no hace falta un tratamiento demasiado específico, ya que varios de los temas principales se pueden presentar como una simple reinterpretación de los resultados de los capítulos 18 y 19.

En segundo lugar, diversas propiedades de la geometría fractal de la naturaleza se clarifican al contrastarlas con la teoría de los atractores fractales. En efecto, mi trabajo se ocupa principalmente de figuras en el espacio real que se pueden ver, por lo menos al microscopio, mientras que la teoría de los atractores se ocupa en última instancia de la evolución temporal de puntos pertenecientes a un espacio representativo, invisible y abstracto.

Este contraste resulta especialmente sorprendente en el contexto de la turbulencia: la intermitencia turbulenta fue el primer gran problema que abordé (en 1964) haciendo uso de formas primitivas de las técnicas fractales, y (de modo completamente independiente) la teoría de los atractores extraños no despegó en serio hasta el estudio de la turbulencia por Ruelle y Takens (1971). Por el momento ambos enfoques no se han encontrado, pero es inevitable que lo hagan pronto.

Los interesados en la sociología de la ciencia encontrarán apetecible el hecho de que, mientras mis estudios de casos que conectaban monstruos matemáticos con formas físicas *reales* encontraron cierta resistencia, las figuras monstruosas de los atractores *abstractos* fueron aceptadas con ecuanimidad.

Una tercera razón para mencionar los atractores fractales viene sugerida por el hecho de que las evoluciones correspondientes parecen «caóticas» o «estocásticas». Como se verá en los capítulos 21 y 22, muchos estudiosos cuestionan la inclusión de lo aleatorio en la ciencia; con los atractores fractales nace la esperanza de que dicho uso quede justificado.

Por fin, aquellos que hayan aceptado desde hace muchos capítulos (o uno o dos ensayos) mi pretensión de que muchas facetas de la naturaleza sólo pueden describirse con la ayuda de ciertos conjuntos que anteriormente tenían fama de patológicos quizá estén impacientes por pasar del «cómo» al «por qué». Los artículos de divulgación han demostrado en muchos casos que no es difícil endulzar los aspectos geométricos de los capítulos anteriores y hacerlos más fácilmente digeribles. Sin embargo, una de las cosas que quisiera transmitir al lector es un cierto gusto por los fractales, por muy amargo que pueda resultar en primera instancia para los científicos ya formados. Además, como explico en el capítulo 42, pienso que las pseudoexplicaciones endulzadas nunca son convincentes. Por tanto, la explicación se ha bajado de nivel, excepto en aquellos casos en que, como en el capítulo 11, una explicación convincente era asequible. Además, sospecho que aparecerán muchas explicaciones auténticamente nuevas cuando los atractores fractales se conviertan en el fundamento de la geometría fractal de las formas naturales visibles.

Como las transformaciones que tienen atractores son *no* lineales, es probable que los fractales visibles *no* sean autosemejantes. Esto es perfecto: mi empleo de homólogos fractales de la recta para tratar fenómenos regidos por ecuaciones *no* lineales resultaba paradójico. Los fractales escalantes que explican bien un fenómeno natural serían aproximaciones locales de fractales *no* lineales.

### *El concepto de atractor*

Este capítulo se centra en una observación debida a Poincaré que permaneció largo tiempo olvidada: las «órbitas» de los sistemas dinámicos *no* lineales pueden ser «atraídas» por conjuntos extraños que identifico con fractales *no* lineales.

Examinemos en primer lugar el atractor más simple: un punto. La «órbita» seguida por el movimiento de una bolita en un embudo empieza con un balanceo que depende de la posición y velocidad iniciales, pero a la larga converge hacia el vértice del embudo; si la bola es mayor que la abertura del embudo, acabará por detenerse en el fondo. El vértice es, pues, un punto de equilibrio estable, o punto fijo estable, de la bola. En lo

que es una bella terminología descriptiva alternativa (que hay que guardarse de interpretar en términos antropocéntricos), el fondo del embudo se denomina *punto atractor*.

Un sistema físico puede tener también un círculo (o una elipse) como atractor estable. Por ejemplo, se cree (y se desea fervientemente, aunque nadie vivirá lo bastante como para que ello sea motivo de preocupación) que el sistema solar es estable, en el sentido de que, si algo perturbara la órbita de la Tierra, ésta sería en última instancia «atraída» de nuevo hacia su trayectoria actual.

En general, un sistema dinámico se suele definir del modo siguiente: su estado en el instante  $t$  es un punto  $\sigma(t)$  de la recta, del plano o de un «espacio de fases» euclídeo de muchas dimensiones,  $R^E$ , y su evolución entre los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  viene determinada por reglas que no dependen explícitamente del valor de  $t$ . Cualquier punto del espacio de fases puede tomarse como estado inicial  $\sigma(0)$  en  $t=0$ , y de él parte una órbita  $\sigma(t)$  para todos los  $t > 0$ .

La diferencia principal entre tales sistemas estriba en la distribución geométrica de  $\sigma(t)$  para valores de  $t$  grandes. Se dice que un sistema dinámico tiene un *atractor* si existe un subconjunto propio  $A$  del espacio de fases  $R^E$ , tal que para casi todos los puntos iniciales  $\sigma(0)$  y para  $t$  grande,  $\sigma(t)$  está próximo a algún punto de  $A$ .

### *El concepto de repulsor*

Por otra parte, una bola puede estar suspendida en equilibrio inestable sobre la punta de un lápiz. Cuando la posición inicial está cerca de este punto de equilibrio, parece como si la bola fuera impulsada hacia fuera, antes de alcanzar el equilibrio estable en algún otro lugar.

El conjunto de todos los estados de equilibrio inestable, junto con sus puntos límite, se llama *repulsor*.

Muchas veces los atractores y repulsores intercambian sus papeles, invirtiendo las ecuaciones. En el caso gravitatorio basta con invertir el sentido de la gravedad. Considérese, por ejemplo, una lámina horizontal con una depresión en ambos sentidos. Si tenemos una bola en la cara superior de la hoja y la gravedad tira hacia abajo, denotemos por  $A$  la depresión atractora y por  $R$  la repulsora. Si a continuación se pone la bola en la cara inferior de la hoja y se invierte el sentido de la gravedad,  $A$  y  $R$  intercambian sus papeles. Este tipo de intercambios jugará un papel importante en este capítulo.

La mayor parte de los libros de texto de mecánica se ocupan de sistemas dinámicos cuyos atractores son puntos, figuras cuasicirculares u otras figuras euclídeas. Pero estas son excepciones raras. El comportamiento de la mayoría de sistemas dinámicos es mucho más complejo: sus atractores o repulsores tienden a ser fractales. En las secciones que siguen se describen ejemplos en los que el tiempo varía de forma discreta, con  $\Delta t = 1$ .

UN POLVO ATRACTOR. LA  $\alpha$  DE FEIGENBAUM. El ejemplo más simple se obtiene con transformaciones cuadráticas (capítulo 19). Como preludeo, considérese una vez más otra representación del polvo de Cantor  $C$  con  $N = 2$  y  $r < 1/2$ , extendido sobre  $[-r/(1-r), r/(1-r)]$ . Este  $C$  es el límite de los  $C_n$  definidos como conjuntos de puntos de la forma  $\pm r \pm r^2 \pm \dots \pm r^n$ . Al pasar de  $n$  a  $n + 1$ , cada punto de  $C_n$  se bifurca en 2, y  $C$  es el resultado de una infinidad de bifurcaciones.

Interpretando a P. Grassberger, el atractor  $A_\lambda$  de  $x \rightarrow \lambda x(1-x)$  para  $\lambda$  real es análogo a  $C_n$ , pero con dos razones de semejanza distintas, una de las cuales es la  $1/\alpha \sim 0,3995\dots$  de Feigenbaum (1981). Después de una infinidad de bifurcaciones, este atractor es un polvo fractal  $A$  con  $D \sim 0,538$ .

«CAOS». Ningún punto de  $A$  es visitado dos veces en un intervalo de tiempo finito. Muchos autores llaman «caótica» a la evolución sobre atractores fractales.

▣ ARBOLES AUTOAFINES. Si se yuxtaponen los  $A_\lambda$  en el plano  $(x, \lambda)$ , se obtiene un árbol. Como  $\delta \sim 4,6692 \neq \alpha$ , este árbol es asintóticamente autoafín con residuo. ▣

COMENTARIO. Lo ideal sería que la teoría se concentrara en sistemas dinámicos intrínsecamente interesantes y realistas (aunque simples), cuyos atractores sean fractales bien comprendidos. La literatura sobre atractores extraños —aunque sumamente importante— dista mucho de satisfacer este ideal: normalmente sus fractales no se comprenden del todo, pocos son intrínsecamente convincentes y la mayoría no son soluciones a problemas bien motivados.

Esto me llevó a idear «sistemas dinámicos» apropiados, o lo que es lo mismo, a plantear nuevas preguntas para obtener viejas y gratas respuestas. Esto es, me inventé problemas cuyas soluciones fueran fractales bien conocidas. Y aunque en cierto modo sea sorprendente, dichos sistemas son de interés.



En el capítulo 18 se describen los conjuntos  $L$  de las cadenas de Poincaré como los menores conjuntos autoinversos y conjuntos límite. Esta última propiedad se puede reformular como sigue: dado un punto inicial arbitrario  $P_0$ , para cada punto de  $L$  hay una sucesión de inversiones tal que las imágenes de  $P_0$  convergen hacia dicho punto. Supongamos ahora que dicha sucesión de inversiones es elegida por un proceso independiente de la posición actual y las posiciones pasadas de  $P$ . Bajo unas condiciones muy poco restrictivas, se puede esperar, y de hecho se demuestra, que las sucesiones resultantes de puntos  $P$  sean atraídas por  $L$ . De este modo, la enorme literatura relativa a los grupos generados por inversiones se puede interpretar en términos de sistemas dinámicos.

### *Inversión «temporal»*

Mi búsqueda de nuevos sistemas con atractores fractales interesantes me llevó a considerar sistemas conocidos con atractores estándar en el sentido geométrico, que tenían, sin embargo, repulsores interesantes. Es posible invertir los papeles de estos dos conjuntos, haciendo que el tiempo transcurra hacia atrás, siempre y cuando el sistema dinámico en consideración tenga inverso (es decir, que las órbitas no se crucen ni confluyan) de modo que el conocimiento de  $\sigma(t)$  determine  $\sigma(t')$  para  $t' < t$ . Sin embargo, los sistemas concretos en los que queremos invertir el tiempo son distintos. Sus órbitas son como los ríos: la trayectoria está unívocamente determinada en sentido descendente, pero en sentido ascendente cada bifurcación implica una decisión especial.

Probemos a invertir, por ejemplo, la transformación  $f(x)$  en  $V$  que nos da el polvo de Cantor en el capítulo 19. Para  $x > 1,5$  hay definidas dos imágenes inversas, y se podría estar de acuerdo en transformar todos los  $x > 1,5$  en  $x = 1/2$ . Análogamente,  $x \rightarrow \lambda x(1-x)$  tiene dos inversas posibles. En ambos casos, la inversión de la transformación implica elegir entre dos funciones. En otros ejemplos el número de alternativas es aún mayor. De nuevo, queremos que la elección se realice mediante un proceso aparte. Estas ideas apuntan a los sistemas dinámicos generalizados, que introduciremos y describiremos en la sección siguiente.

Supondremos que una de las coordenadas del estado  $\sigma(t)$  —a la que llamaremos *índice determinante* y denotaremos por  $\sigma^\dagger(t)$ — evoluciona independientemente del estado de las  $E - 1$  coordenadas restantes —que denotaremos por  $\sigma^*(t)$ — mientras que la transformación de  $\sigma^*(t)$  en  $\sigma^*(t+1)$  depende a la vez de  $\sigma^*(t)$  y de  $\sigma^\dagger(t)$ . En los ejemplos que yo he estudiado preferentemente, la transformación  $\sigma^*(t) \rightarrow \sigma^*(t+1)$  se elige entre un conjunto finito de  $G$  posibilidades distintas  $J_g$ , que se pueden seleccionar de acuerdo con el valor de una cierta función  $g(t) = \gamma[\sigma^\dagger(t)]$ , a valores enteros. Así pues, estudié la dinámica en el espacio producto del espacio  $\sigma^*$  por un conjunto indicial finito.

De hecho, en los ejemplos que han motivado esta generalización la sucesión  $g(t)$  o es aleatoria o se comporta como tal. Aunque este ensayo no aborda el azar hasta el próximo capítulo, dudo que ésta sea una dificultad insoslayable. Más serio es el hecho de que los sistemas dinámicos sean el mismísimo modelo del comportamiento plenamente determinista, ¡por lo que constituyen un terreno prohibido para el azar! No obstante, los efectos de éste pueden ser introducidos sin necesidad de postularlo efectivamente, tomando para  $g(t)$  el valor de un proceso suficientemente ergódico. Se puede tomar, por ejemplo, un número irracional  $\beta$  y hacer que  $g(t)$  sea la parte entera de  $\sigma^\dagger(t) = \beta^t \sigma^\dagger(0)$ . Los detalles necesarios son en principio simples pero sofisticados, y no los especificaremos aquí.

### *El papel de los atractores «extraños»*

Los estudiosos de los atractores extraños sugieren el siguiente argumento doble: (A) Dado que los sistemas dinámicos con atractores estándar no sirven para explicar la turbulencia, quizá ésta se pueda explicar por medio de atractores *topológicamente* «extraños». (Recordemos mi razonamiento del capítulo 11, de que si una ecuación diferencial tiene singularidades no estándar, uno debería probar con las singularidades fractales.) (B) Los atractores de sistemas ridículamente simples, tales como  $z \rightarrow \lambda z(1-z)$  para  $\lambda$  real y  $z$  en  $[0, 1]$ , son extraños y en muchos aspectos característicos de sistemas más complejos y más realistas. Por tanto, no puede haber la menor duda de que los atractores topológicamente extraños son la regla.

TODOS LOS ATRACTORES «EXTRAÑOS» CONOCIDOS SON FRACTALES. Se ha evaluado la  $D$  de muchos atractores «extraños», y en todos los casos  $D > D_T$ . Por tanto, estos atractores son conjuntos fractales. Para muchos fractales que son atractores extraños, la  $D$  no es una medida de la irregularidad, sino que mide el apilamiento de un conjunto de curvas o superficies diferenciables —o lo que vendría a ser una variante de la fragmentación (capítulo 13).

S. Smale introdujo un famoso atractor, conocido como solenoide. Lo hizo en dos etapas. La definición original era puramente topológica, y dejaba la  $D$  sin definir, pero en una revisión se introdujo una definición métrica (Smale 1977, pág. 57). Para esta revisión, se evaluó la  $D$  (Mandelbrot 1978b), que se introdujo así en el estudio de los atractores extraños. En el caso del atractor de Saltzman-Lorenz con  $\nu=40$ ,  $\sigma=16$  y  $b=4$ , M. G. Velarde y Ya. G. Sinai obtuvieron independientemente el valor  $D=2,06$  (comunicación oral). Esta  $D$  es superior a 2, aunque no mucho, y esto significa que este atractor no es una superficie estándar, pero no se aleja mucho de ellas. Mori y Fujisaka (1980) confirman mi  $D$  para el atractor de Smale y la  $D$  del atractor de Saltzman-Lorenz. Para la transformación de Hénon, con  $a=1,4$  y  $b=0,3$ , encuentran  $D=1,26$ . Se están preparando otros artículos sobre el mismo efecto.

A LA INVERSA. La pregunta de si todos los atractores fractales son o no extraños es una cuestión semántica. Un número cada vez mayor de autores está de acuerdo conmigo en que *para la mayoría de fines, un atractor es extraño si es fractal*. Esta es una actitud saludable, si «extraño» se toma como sinónimo de «monstruoso», «patológico» y otros epítetos que en algún momento se aplicaron a los fractales.

Pero a veces «extraño» se toma en un sentido técnico, tan excluyente que el atractor de Saltzman-Lorenz no es «extraño», sino «extraño-extraño». ■ A la luz de esto, en la «extrañeza» de un atractor intervienen propiedades *topológicas* no estándar, «superpuestas» a propiedades *fractales* no estándar. Una curva cerrada sin puntos dobles no es «extraña» en este sentido, por muy arrugada que esté; de ahí que muchos atractores fractales estudiados por mí no sean extraños.

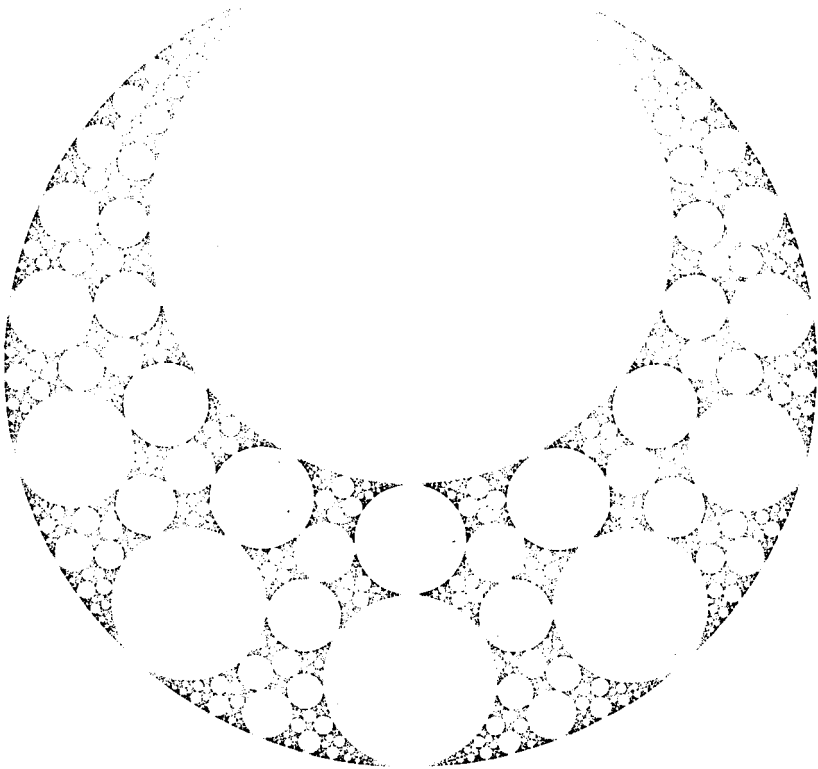
Con esta definición de extraño, el razonamiento de la sección anterior deja de ser convincente. Pero vuelve a serlo otra vez si la extrañeza deja de ser un concepto topológico para convertirse en un concepto fractal. Así pues, yo creo que los que definen «extraño» como «fractal» merecen ganar. Y como están efectivamente ganando, no vale la pena conservar un término cuya motivación desapareció cuando demostré que los fractales no son más extraños que las costas o las montañas. En cualquier caso, no puedo ocultar una cierta antipatía personal hacia el calificativo «extraño».

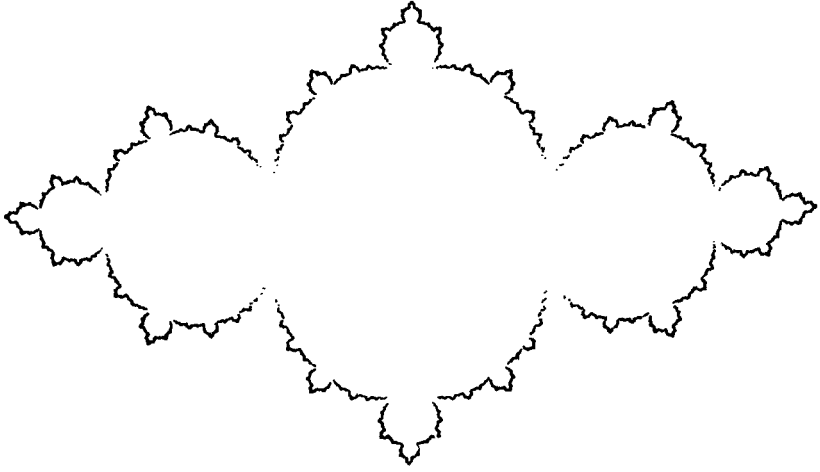
FIGS. 282 y 283. *Atracción hacia fractales*

Estas dos figuras ilustran órbitas largas de posiciones sucesivas de dos sistemas dinámicos descomponibles. El *Peto del Faraón* de la lámina 283 es autoinverso (capítulo 18), y es generado por 4 inversiones escogidas de modo que el conjunto límite  $L$  sea una colección de circunferencias. El *Dragón de San Marco* de la lámina 282 es autocuadrático (capítulo 19) y es generado por las dos inversas de  $x \rightarrow 3x(1-x)$ .

El índice determinante se escoge entre 4 posibilidades, respectivamente 2, y se emplea un algoritmo pseudoaleatorio que se repite 64.000 veces. Las primeras posiciones no se han representado.

Las regiones próximas a las cúspides y a las autointersecciones se rellenan muy lentamente.







VII  
El azar





Aunque los temas fractales básicos impliquen únicamente construcciones deterministas, el significado pleno y la relevancia práctica de los mismos no se manifiestan claramente hasta que no se abordan los fractales aleatorios. Y a la inversa, el estudio de los fractales parece, a mí por lo menos, aumentar la propia comprensión del azar.

Aunque la primera razón para introducir el azar es algo familiar para cualquier científico, merece un comentario aparte en este capítulo, entre otras observaciones de naturaleza genérica y no tan familiares. El capítulo siguiente abre nuevas perspectivas y muestra cómo el azar es también necesario por razones propias del estudio de las fractales.

*$\langle X \rangle$  denota un valor esperado;  $Pr$  es la abreviatura de probabilidad*

Parece como si en cada disciplina se emplee una notación distinta para el valor esperado de la variable aleatoria  $X$ . En este ensayo adoptaremos la notación de los físicos,  $\langle X \rangle$ , pues tiene la virtud de llevar su propio paréntesis portátil.

Dada una función  $B(t)$  y su  $\Delta B(t) = B(t + \Delta t) - B(t)$ , la *delta media* significará  $\langle \Delta B(t) \rangle$ , y la *delta variancia* significará  $\langle [\Delta B(t) - \langle \Delta B(t) \rangle]^2 \rangle$ .

*El papel estándar de los modelos estocásticos*

Volvamos a la pregunta «¿cuánto mide la costa de Bretaña?» Por mucho que nos pueda recordar un mapa real, la curva de Koch tiene grandes defectos que volvemos a encontrar en prácticamente todos los modelos primitivos de los otros fenómenos estudiados en este ensayo. Sus partes son idénticas entre sí, y la razón de autosemejanza  $r$  debe pertenecer a una escala de la forma  $b^{-k}$ , donde  $b$  es un entero, a saber,  $1/3$ ,  $(1/3)^2$ , etc.

El modelo podría mejorarse invocando otros algoritmos deterministas

más complejos. Sin embargo, además de tedioso, este enfoque estaría condenado al fracaso, pues una costa es moldeada a lo largo del tiempo por múltiples influencias que ni están registradas ni se pueden reconstruir con todo detalle. La tarea de conseguir una descripción completa es imposible, y no tiene sentido ni siquiera plantearse.

En física, por ejemplo en la teoría del movimiento browniano, la salida a esta dificultad reside en la estadística. En geomorfología, la estadística es aún más difícil de evitar. En efecto, mientras las leyes de la mecánica afectan directamente al movimiento molecular, su efecto sobre las estructuras geomorfológicas se ejerce a través de muchos intermediarios mal conocidos. Por tanto, el geomorfólogo se ve obligado, más aún que el físico, a renunciar a una descripción precisa de la realidad y a usar la estadística. En otros campos que exploraremos, el conocimiento actual de las interacciones locales está en alguna parte entre la física y la geomorfología.

### *Búsqueda de la proporción correcta de irregularidad aleatoria*

¿Puede el azar producir el marcado grado de irregularidad que uno encuentra, digamos, en las costas? No sólo puede, sino que muchas veces va *más allá* del objetivo deseado. Dicho de otro modo, el poder del azar se acostumbra a subestimar. El concepto de azar de los físicos nace de teorías en las que el azar es esencial a nivel microscópico, mientras que a escala macroscópica es insignificante. Por el contrario, en el caso de los fractales aleatorios escalantes que nos interesan, la importancia del azar es la misma a todos los niveles, incluido el macroscópico.

### *Una utilización pragmática del azar*

La relación entre impredecibilidad estadística y determinismo plantea preguntas fascinantes, pero en este ensayo poco tenemos que decir al respecto. En él la expresión «*at random*» vuelve a tener la connotación intuitiva que tenía cuando el inglés medieval la tomó prestada del francés. No creo que la frase «*un cheval à randon*» tuviera que ver con la axiomatización matemática ni con la psicología equina, sino que simplemente denotaba un movimiento irregular que el jinete no podía *predecir*.

Así pues, mientras el azar evoca toda clase de ansiedades cuasimetáforicas, este ensayo está decidido a preocuparse muy poco de si, en palabras de Einstein, «Dios juega a los dados» o no. La teoría de la proba-

bilidad es el único útil matemático disponible que nos puede servir para representar lo desconocido e incontrolable. Es una suerte que este útil, aunque complicado, sea extraordinariamente poderoso y adecuado.

### *De la recurrencia al azar*

Además, la teoría de la probabilidad se puede introducir de modo que se adapte sin sobresaltos a los métodos recurrentes que predominan en este ensayo. En otras palabras, la segunda mitad de este ensayo sigue a la primera sin solución de continuidad. Seguiremos concentrándonos en casos donde tanto la definición matemática como el algoritmo gráfico se pueden traducir en un «programa procesador» con un bucle interno, y cada repetición del bucle añade nuevos detalles a lo que había sido dibujado anteriormente.

El conocido bucle que genera la curva triádica de Koch se reduce a este programa procesador. Pero otros fractales no aleatorios implican además un «programa de control» que ahora conviene subrayar, y cuyas funciones evolucionan de manera interesante y progresiva hacia una generalidad cada vez mayor. En un primer paso, el pie de figura de la lámina 76 observa que ciertos generadores de Koch se pueden usar en sentido directo (*D*) o inverso (*I*), con lo que el procesador necesita de un controlador que le indique antes de cada bucle si éste debe ser (*D*) o (*I*). En general, distintas sucesiones de control dan fractales distintos. De ahí que, para cada elección de *M* y de la *D* correspondiente, el circuito fractal de la lámina 76 no sea en realidad una curva sino una familia infinita (numerable) de curvas, una para cada sucesión de control. El controlador puede, bien leer esta sucesión de una cinta, bien interpretar una instrucción compacta del tipo «alternar (*D*) con (*I*)», o «útese (*D*) [o (*R*)] en el *k*-ésimo paso si el *k*-ésimo decimal de  $\pi$  es par [o impar]».

### *Azar / pseudoazar*

Muchos fractales aleatorios comportan precisamente la misma estructura: un controlador intérprete seguido de un procesador. Este hecho a menudo queda oculto (a veces para hacer que las cosas parezcan más difíciles), pero está clarísimo en todos aquellos casos en los que, como es de desear, la definición es explícitamente recurrente.

El controlador más simple es lo que se llama «sucesión de tiradas de una moneda no trucada», pero yo nunca lo he usado. En el entorno de los

ordenadores actuales, el controlador es un «generador de números aleatorios». El dato de entrada, que se denomina *semilla*, es un entero con un número predeterminado  $M$  de dígitos binarios. ( $M$  viene determinado por el equipo, y si se introducen menos de  $M$  dígitos, éstos se completan por la izquierda con ceros.) El resultado del controlador es una sucesión de ceros y unos. En simulaciones de un juego de Bernoulli, cada dígito representa el resultado de la tirada de una moneda no trucada. Así, un juego de 1.000 tiradas es realmente una sucesión de 1000 dígitos pseudo-aleatorios individuales.

Pero uno podría también imaginar que en algún lugar existe un libro de  $2^{1000}$  páginas en el que están registrados todos los posibles resultados de una tanda de 1000 lanzamientos de una moneda, con un resultado en cada página. De este modo se podría especificar cualquier tanda de 1000 lanzamientos indicando la página correspondiente del libro. El parámetro de azar es simplemente el número de página, esto es, la semilla.

En general, el resultado del controlador se presenta a menudo cortado en pedazos de  $A$  enteros. Luego se añade una coma decimal al principio y cada pedazo se convierte así en un número fraccionario  $U$ . De este número se dice que es una «variable aleatoria uniformemente distribuida entre 0 y 1».

En la práctica, el resultado de un generador de conjuntos aleatorios no es una función ni una figura, sino una «gran carpeta» virtual de  $2^A$  páginas, correspondiendo cada una a una sola figura. Como antes, los números de las páginas son las semillas.

La analogía botánica implica naturalmente que las semillas son todas de la misma especie y variedad. Se permite que haya algunas «semillas anormales» que produzcan plantas atípicas, pero se espera que la gran mayoría de plantas sean esencialmente iguales y que difieran sólo en los detalles.

El generador de números aleatorios es el eje de cualquier simulación. Al principio están las operaciones que implican en cada caso la misma interfase entre la teoría de los números y la teoría de la probabilidad, y son independientes de los objetivos del programa. Son ejemplares de transformaciones deterministas que imitan el azar tal como se describe en la teoría de la probabilidad. Al final están las operaciones que varían según el objetivo de la simulación.

El paso de este entorno práctico a la probabilidad recurrente hecha y derecha es de lo más natural. El cambio principal consiste en que fracciones con un número finito de dígitos se sustituyen por números reales. Las semillas se convierten en los misteriosos «sucesos elementales» que los probabilistas matemáticos denotan por la letra  $\omega$ . □ Para «traducir»  $\omega$  en

una sucesión infinita de variables de control reales, Payley y Wiener (1934) sugieren la diagonalización inversa de Cantor. ■

### *Invocación vacía del azar contra descripción real*

En la sección anterior se argumenta que la teoría del azar no es *realmente* difícil. Por desgracia, tampoco es realmente fácil. Uno se siente tentado de decir que, para lograr un modelo de costa que no tenga los defectos de la curva de Koch y que conserve sus virtudes, basta con deformar las distintas porciones de la curva y modificar sus tamaños, todo ello al azar, y luego encadenarlas todas en un orden aleatorio.

Esa clase de *invocación* del azar se puede permitir en los estudios preliminares, y en nuestros primeros capítulos esto se consentía sin mayor problema. No es pecado, a menos que se oculte al lector, o que el autor no lo confiese. Y en muchos casos se puede realizar. En otros, sin embargo, la simple invocación del azar es un gesto vacío. En efecto, las reglas que generan curvas aleatorias aceptables son muy difíciles de describir, ya que los conjuntos geométricos están contenidos en un espacio. Si sólo se varían al azar las formas, los tamaños y el orden de las partes de una costa, uno suele encontrarse al final con unas piezas que no encajan entre sí.

### *Azar sin ligaduras y azar con autoligaduras*

Nos topamos, pues, inmediatamente con una distinción informal de gran importancia práctica. Algunas veces nuestro controlador, seguido por un procesador, puede recorrer los bucles sin necesidad de ir teniendo que comprobar los efectos de los bucles anteriores, pues no hay temor de que se produzca un mal emparejamiento. Se puede decir que tales modelos implican una forma de azar *sin ligaduras*. Otras veces, por el contrario, los estadios posteriores de la construcción están condicionados por el resultado de estadios anteriores y/o el azar está sometido a *fuertes autoligaduras por la geometría del espacio*.

Como ejemplo de este contraste, los polígonos de  $2n$  lados de una red, incluyendo los que se autointersecan, plantean un problema fácil de combinatoria. Y se puede generar uno de esos polígonos mediante azar sin ligaduras. Pero las costas no deben autointersecarse, y el recuento de las aproximaciones poligonales a una costa es un problema de azar con fuertes autoligaduras, que sigue escapando a las mejores inteligencias.

Como los problemas en los que interviene el azar con autologaduras son difíciles, los evitaremos, excepto en el capítulo 36.

### *Variables aleatorias hiperbólicas*

Una variable aleatoria no uniforme  $X$  es simplemente una función monótona no decreciente  $x = F^{-1}(u)$ . La función inversa  $U = F(x)$  se denomina la probabilidad  $Pr(X > x)$ . (Para las discontinuidades de  $F(x)$  o de  $F^{-1}(u)$  hace falta hilar un poco más fino.)

La expresión  $Nr(U > u) \propto u^{-D}$  tiene un papel muy importante en los capítulos 6, 13 y 14. Su homóloga en probabilidad,  $Pr(U > u) \propto u^{-D}$ , se denomina distribución hiperbólica, y tiene un papel central en muchos de los capítulos que siguen. La propiedad de que  $Pr(U > 0) = \infty$  es curiosa pero *no* debe causar pánico. Resulta ser exactamente tan deseable y manejable como lo era  $Nr(U > 0) = \infty$  en el capítulo 13. Tendrá que manejarse con cuidado, pero los aspectos técnicos pueden y deben evitarse.

### *La $D$ y la $D_T$ típicas de un conjunto aleatorio*

Cuando se trata con conjuntos aleatorios, los conceptos de dimensión tienen que elaborarse un poco más. En nuestra «gran carpeta», que reúne una gran población de conjuntos aleatorios, cada página es un conjunto, con unos valores determinados de  $D$  y  $D_T$ , igual que en los capítulos anteriores. Dichos valores varían de una muestra (= página) a otra, pero en todos los casos nos encontramos con que su distribución es simple.

Hay un grupito de muestras aberrantes («semillas defectuosas») para las que  $D$  toma todo tipo de valores, pero la probabilidad total correspondiente a este grupito es nula. Todas las demás muestras se caracterizan por un cierto valor común  $D$  al que llamamos «valor casi seguro».

Creo que lo mismo vale para  $D_T$  y espero que el tema atraiga la atención de los matemáticos.

Los valores casi seguros son, en todos los sentidos, «típicos» de la población. Así, por ejemplo, el valor esperado de  $D$  coincide con el valor casi seguro.

Por otra parte, se debería evitar pensar siquiera en la dimensión del «conjunto promedio». Por ejemplo, suponiendo que el lector se haya hecho una imagen mental de un paseo aleatorio simétrico, intentemos definir el paseo promedio. Si es un proceso cuyas posiciones son las medias de todos los paseos que constituyen la población, entonces este promedio

no pasea sino que se está quieto; nunca abandona la posición inicial, y por tanto  $D=0$ ,  $\square$  mientras que para casi todos los paseos se demuestra (capítulo 25) que  $D=2$ .  $\blacksquare$  El único conjunto promedio «seguro» a efectos de tratar con dimensiones es el conjunto caracterizado por  $D=2$ ; y esta definición es segura porque es circular.

Cualquier método aplicable a fractales no aleatorios puede ser útil en la evaluación de  $D$ . Pero no hay que olvidar una advertencia que se hizo en el capítulo 13: si la porción de un conjunto fractal contenida en una bola de radio  $R$  centrada en un punto del conjunto tiende a tener una medida («masa») que cumpla  $M(R) \propto R^Q$ , el exponente  $Q$  no tiene por qué ser una dimensión.

En el capítulo anterior, al insistir en las razones habituales en favor del azar, no se distingue entre modelos estándar y fractales. En el primero de estos contextos, aunque la aleatorización aporta mejoras considerables, los modelos no aleatorios siguen siendo aceptables a muchos efectos. Veamos ahora que, en el contexto fractal, el azar es un ingrediente necesario para que un modelo sea realmente aceptable.

#### *Invariancia por traslación, simetría*

En este razonamiento interviene el antiguo concepto filosófico de *simetría*, que aquí no se toma en el sentido de simetría axial con respecto a una línea recta, sino en el de una combinación del significado griego original de *συμμετρία*, como «resultante de la conmensuración con el todo de varias de sus partes constituyentes» (Weyl, 1952), y el significado que le dan los físicos, para quienes simetría es sinónimo de invariancia.

El defecto esencial de los fractales no aleatorios es que no son lo bastante simétricos. Un primer defecto, formulado en los vocabularios de distintas ramas de la ciencia, es que es inconcebible que un fractal no aleatorio sea invariante por traslación, o estacionario, o que no pueda satisfacer el principio cosmológico.

En segundo lugar, un fractal no aleatorio no puede ser uniformemente escalante, en el sentido de que sólo acepta una escala discreta de razones de semejanza, de la forma  $r^k$ .

El problema de los cúmulos de galaxias es tan importante que esta discusión se centrará en él, de manera que este capítulo se convertirá en la segunda parte de la contribución de este ensayo a la astronomía.



### *El principio cosmológico*

El postulado de que ni el tiempo ni nuestra posición sobre la Tierra tienen un papel especial ni central, de que las leyes de la naturaleza tienen que ser las mismas siempre y en todas partes, se conoce como *Principio cosmológico*.

Esta afirmación, formalizada por Einstein y E. A. Milne (North 1965, pág. 157) se discute a fondo en Bondi (1952).

### *Principio cosmográfico fuerte*

Una aplicación estricta del principio cosmológico exige que la distribución de materia siga *precisamente* la misma ley independientemente del sistema de referencia (origen y ejes) empleado en la observación. En otras palabras, dicha distribución debe ser invariante por traslación.

Hay que poner mucho cuidado en la elección de un nombre para denotar este corolario. Como no se trata de la teoría (*λογος*) sino de la descripción (*γραφη*), y como enseguida propondremos una serie de versiones más débiles, lo mejor es llamarlo *principio cosmográfico fuerte*.

La idea subyacente se encuentra ya en la doctrina de la «ignorancia instruida» de Nicolás de Cusa (1401-1464): «Dondequiera que uno esté, piensa que ése es el centro; El centro del mundo está en todas partes, y por tanto en ninguna, y su circunferencia no está en ninguna parte».

### *Principio cosmográfico*

Sin embargo, la distribución de materia *no* es estrictamente homogénea.

La debilitación más inmediata del principio consiste en introducir el azar, en el marco estándar descrito en el capítulo anterior. El enunciado resultante es lo que los probabilistas llaman *estacionariedad estadística*, pero para mayor consistencia lo llamaremos *principio cosmográfico estadístico uniforme*: la distribución de materia sigue las mismas leyes *estadísticas* con independencia del sistema de referencia.

### *Un dilema*

La aplicación del principio anterior al arracimamiento galáctico plantea serios problemas. El universo de Fournier del capítulo 9 es, natural-

mente, muy poco homogéneo, pero uno tendría la esperanza de poder aleatorizarlo con objeto de satisfacer el principio cosmográfico estadístico uniforme. Sin embargo, para conservar el espíritu del modelo, la aleatorización tendría que preservar la propiedad de que la densidad aproximada  $M(R)R^{-3}$  en el interior de una esfera de radio  $R$  tiende a 0 cuando  $R$  tiende a infinito. Por desgracia, esta última propiedad es incompatible con el principio cosmográfico estadístico uniforme.

Es tentador asignar menos peso a los simples datos que a todo un principio general, y concluir que la agregación jerarquizada debe terminar a partir de un corte superior finito, de modo que todas las fluctuaciones tengan sólo un ámbito local, y que, al fin y al cabo, la densidad global de materia no sea nula.

Para llevar a la práctica esta idea se podría, por ejemplo, tomar una infinidad de universos de Fournier y distribuirlos de manera estadísticamente uniforme. En Peebles (1980) se discute una variante propuesta por R. M. Soneira.

### *Estacionariedad condicional*

Sin embargo, yo creo que el principio cosmográfico estadístico uniforme sobrepasa lo que sería razonable y deseable, y que habría que sustituirlo por una versión más débil, que llamaremos *condicional*, y que no se refiere a *todos los observadores*, sino sólo a los *materiales*. Esta versión más débil debería ser aceptable para los astrónomos, y quizá la hubieran estudiado ya mucho antes si hubieran sospechado que podía tener un mínimo de interés sustantivo. Y en efecto lo tiene: la forma condicional no implica ninguna suposición acerca de la densidad global, y permite tomar  $M(R) \propto R^{D-3}$ .

Reformulando lo dicho de manera menos enérgica, es difícil, si no imposible, reconciliar el principio cosmográfico fuerte con la idea de que la distribución real de galaxias dista mucho de ser uniforme. Por una parte, si la densidad global de materia,  $\delta$ , del universo es nula, el principio cosmográfico fuerte es falso. Y por otra, si  $\delta$  es positiva, aunque sea pequeña, el principio cosmográfico fuerte se cumple asintóticamente, pero no sirve de nada a las escalas que nos interesan. Se podría preferir guardarlo en la trastienda, para estar más tranquilo, o prescindir de lo que es una fuente potencial de confusiones. Finalmente, se podría decidir su sustitución por un enunciado válido para todas las escalas y que fuera independiente de si  $\delta=0$  o  $\delta>0$ . Este último enfoque equivale a subdividir el principio cosmográfico fuerte en dos partes.

## *El principio cosmográfico condicional*

DISTRIBUCIÓN CONDICIONAL. Cuando el sistema de referencia satisface la condición de que el propio origen de coordenadas es un punto material, la distribución de probabilidad de masa se llama *condicional*.

HIPÓTESIS COSMOGRÁFICA PRIMARIA. La distribución condicional de masa es la misma para todos los sistemas de referencia condicionados. Y, en particular, la masa  $M(R)$  contenida en una bola de radio  $R$  es una variable aleatoria independiente del sistema de referencia.

En el enunciado del principio cosmográfico condicional se emplean precisamente las mismas palabras con independencia de si  $\delta > 0$  o  $\delta = 0$ . Esto es satisfactorio desde el punto de vista estético, y tiene la ventaja filosófica de estar de acuerdo con el espíritu de la física contemporánea. Subdividiendo el principio cosmográfico fuerte en dos partes, subrayamos un enunciado que afecta a todo lo observable, y degradamos una afirmación que constituye un acto de fe o una hipótesis de trabajo.

## *La hipótesis auxiliar de la densidad global de materia positiva*

HIPÓTESIS COSMOGRÁFICA AUXILIAR. Las cantidades

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R)R^{-3} \text{ y } \lim_{R \rightarrow \infty} \langle M(R) \rangle R^{-3}$$

existen, son iguales (con probabilidad uno) y son positivas y finitas.

## *El caso estándar en que $\delta > 0$*

Las leyes estadísticas de la distribución de materia se pueden formular de distintas maneras. Se puede usar la distribución de probabilidad absoluta, relativa a un sistema de referencia arbitrario, o bien se puede usar la distribución de probabilidad condicional, relativa a un sistema de referencia centrado en un punto material. Si se cumple la hipótesis auxiliar anterior, la distribución de probabilidad condicional se deriva de la distribución absoluta por la regla de Bayes. Y la probabilidad absoluta se deriva de la condicional tomando la media respecto a los orígenes uniformemente distribuidos por el espacio.

□ La distribución uniforme de los orígenes integrada sobre todo el espacio da una masa infinita. La distribución no condicional puede renormalizarse para que sume 1 si, y sólo si, la densidad global es positiva. Véase Mandelbrot (1967b). ■

### *El caso no estándar en que $\delta=0$*

Supongamos que, por el contrario, la hipótesis auxiliar no se cumple; más concretamente, que  $\lim_{R \rightarrow \infty} (R)R^{-3}$  se anula. En tal caso, la distribución de probabilidad absoluta dice simplemente que una bola de radio finito  $R$  escogida al azar estará vacía casi con toda certeza. Por tanto, cualquiera que pudiera echar una mirada desde un punto elegido al azar, casi seguro que no vería nada. Sin embargo, al hombre sólo le interesa la distribución de probabilidad de masa en el caso del universo real, del que sabe que la masa *no* se anula en su entorno. *Una vez* se ha producido un suceso, conocer la probabilidad absoluta de que ocurra tiene un interés limitado.

El mismo hecho de que la distribución no condicional no tenga en cuenta estos casos la hace muy inadecuada cuando  $\delta=0$ . Aparte de ser incompatible con la masa contenida en un fractal de dimensión  $D < 3$ , tampoco dice absolutamente nada más allá de  $\delta=0$ .

La distribución de probabilidad condicional, por el contrario, distingue entre fractales con dimensiones distintas, entre fractales según sean o no escalantes, y entre otras suposiciones alternativas.

### *«Sucesos despreciables» no estándar*

El caso no estándar  $\delta=0$  enfrenta al físico con un suceso casi seguro que *se puede* despreciar, y con un suceso de probabilidad nula que, aparte de *no poder* despreciarse, se tiene que descomponer en subsucesos más finos.

Esto contrasta de manera absoluta con aquello a lo que estamos acostumbrados. El número medio de caras en una sucesión creciente de lanzamientos de una moneda sin truco puede no converger a  $1/2$ , pero los casos en que dicha convergencia no se da tienen probabilidad nula y *por tanto* carecen de interés. Cuando en mecánica estadística una conclusión vale casi con toda certeza (como por ejemplo el principio de aumento de entropía), la conclusión contraria tiene una probabilidad nula y *por tanto* es despreciable. Queda claro que el *por tanto* de las dos últimas frases indica precisamente lo contrario de lo que propongo en cosmografía.

### *Evitación de la estratificación*

Una segunda forma de simetría se refiere a los cambios de escala. Cuando las razones de reducción de las partes de un fractal no aleatorio

son todas iguales a  $r$ , las razones de cambio de escala admisibles son de la forma  $r^k$ . Cuando las razones de reducción de las partes son  $r_1, r_2, \dots$ , las razones totales admisibles son menos restrictivas, pero tampoco pueden elegirse libremente.

En otras palabras, los fractales no aleatorios encarnan una marcada estructura jerárquica o, como yo prefiero decir, están *marcadamente estratificados*. Algunos modelos estratificados son aceptados por los físicos, pues son muy manejables desde el punto de vista informático. Sin embargo, esta característica es filosóficamente inaceptable, y en el caso de las galaxias no hay una evidencia directa de la realidad de los cúmulos. Esta es la razón de la demanda (especialmente en de Vaucouleurs, 1970) de «la extensión del trabajo de Charlier a modelos cuasicontinuos de fluctuaciones de densidad que sustituyeran el modelo jerárquico supersimplificado original».

Este deseo no puede satisfacerse con un fractal no aleatorio, pero sí con fractales aleatorios, como demostraré más adelante.

### *Universos fractales no estratificados con principio cosmográfico condicional*

Como ya he señalado, no es muy probable que los astrónomos vayan a presentar objeciones a priori a la idea de la condicionalidad, y ésta sería una idea corriente si se reconociera que tiene consecuencias que vale la pena considerar. Me propongo demostrar que se trata en efecto de una auténtica generalización, y no de un simple refinamiento formal. Con este objeto, los capítulos 32 a 35 describen construcciones explícitas con las siguientes propiedades:

- Inducen una densidad global nula.
- Satisfacen el principio cosmográfico condicional estadístico.
- No satisfacen ninguna otra forma del principio cosmográfico.
- Son escalantes con respecto a  $r$ .
- No son intencionadamente estratificados, sino que introducen una estructura jerárquica aparente como corolario de que la dimensión es  $< 2$ .
- Finalmente, se ajustan a los datos cuantitativos.

Mis modelos satisfacen todas estas propiedades menos la última. Por lo que respecta al ajuste a los datos cuantitativos, éste mejora progresivamente. Así pues, basta ordenar mis modelos según una complicación creciente para obtener un ajuste cada vez más perfecto al mejor análisis de los datos.

## *Anticipo*

Después de aclamar las espléndidas perspectivas abiertas por los fractales totalmente aleatorios, no podemos apresurarnos a contemplar esos modelos, pues presentan una complicación matemática que es mejor dejar para más adelante. Los capítulos del 23 al 30 se mantienen en un terreno probabilístico comparativamente familiar.

**VIII**  
**Fractales aleatorios estratificados**





## Coagulaciones aleatorias: racimos de contacto y percolación fractal

Este grupo de capítulos demuestra que diversos dispositivos de una simplicidad casi ridícula conducen a fractales efectivamente aleatorios. En el capítulo 23 se aleatoriza la coagulación, con un procedimiento empleado para esbozar un modelo de ruido inspirado en el polvo de Cantor (capítulo 8), un modelo de las galaxias basado en un polvo de Cantor espacial (capítulo 9), uno de intermitencia turbulenta (capítulo 10), etc. La intención principal del capítulo 24 es introducir mis garabatos, una nueva forma aleatorizada de curva de Koch. El capítulo 25 se ocupa del movimiento browniano y el 26 define otros fractales por «desplazamiento aleatorio del punto medio».

El calificativo «estratificado» del título de este grupo de capítulos expresa que, en todos los casos considerados, tratamos con fractales contruidos por superposición de estratos (en latín, *strata*), cada uno con detalles más finos que el anterior. En muchos casos los estratos son jerárquicos. Sin decirlo, los capítulos anteriores tratan exclusivamente de fractales estratificados. Pero en capítulos posteriores se establece que los fractales aleatorios no tienen por qué ser necesariamente estratificados.

Los fractales de este capítulo implican una cuadrícula o celosía, formada por segmentos, cuadrados o cubos, divididos cada uno de ellos en  $b^E$  subsegmentos, subcuadrados o subcubos;  $b$  es la base de la celosía.

### *Polvos lineales aleatorizados*

El polvo aleatorio más simple sobre una recta, que puede mejorar el modelo cantoriano de los errores visto en el capítulo 8, empieza como la forma más simple de coagulación cantoriana: con una red de segmentos de base  $b$  y un número entero  $N < b$ . Pero, en vez de partir de un generador determinado, se parte de una lista de posibles generadores cantorianos, esto es, de todas las distintas alineaciones de  $N$  cajas llenas y  $b-N$

cajas vacías. Cada vez se toma al azar uno de estos generadores, con probabilidades iguales.

Cualquier punto  $P$  del grumo se define por una sucesión de segmentos de «pregrumo» encajados, de longitudes  $R_k = b^{-k}$ . Si la masa total inicial es 1, cada precoágulo contiene la misma masa  $R_k^D$ . La masa contenida en el segmento de longitud  $2R_k$ , centrado en  $P$ , es  $R_k^D$  multiplicado por una variable aleatoria con valores entre 1 y 2, e independiente de  $k$ .

Nótese que los valores de  $D$  están limitados a los de la sucesión  $\log(b-1)/\log b, \log(b-2)/\log b, \dots$ . Dicha restricción acostumbra a ser un inconveniente. Y lo que es más grave, la definición anterior de coagulación es difícil de implementar en un ordenador y de manejar analíticamente. Como la principal virtud de la coagulación reside en su simplicidad, preferiremos una definición alternativa que vamos a presentar a continuación. Para distinguir la definición de esta sección la denominaremos *constreñida*. (En Mandelbrot, 1974f, se la denomina *microcanónica*.)

### *Polvos lineales por coagulación aleatoria*

Se puede obtener una definición mejor de coagulación, tal como se presenta en Mandelbrot (1974f), donde recibe el nombre de *canónica*, tomando una sucesión de elecciones binarias aleatorias, reguladas por un simple lanzamiento de moneda. Después de lanzar varias veces la moneda, el primer paso de una cascada decide la suerte que correrá cada uno de los  $b$  subintervalos. Cuando sale cara, cosa que tiene una probabilidad  $p < 1$ , el subintervalo «sobrevive» como parte de un pregrumo: en caso contrario, es eliminado. Después de cada iteración, se eliminan los puntos aislados que quedan entre dos subintervalos eliminados de cualquier longitud. Se trata sólo de un problema menor, pero sus homólogos en el plano o en el espacio (rectas aisladas, etc.) darían lugar a falsas conexiones en el conjunto resultante. El número esperado de subintervalos supervivientes es  $\langle N \rangle = pb = p/r$ . Luego el proceso se vuelve a repetir con cada subintervalo, independientemente de los demás.

FORMALISMO DEL PROCESO DE NACIMIENTO. Si llamamos «hijos» a los subintervalos y «familia» a toda la cascada, tenemos que la distribución del número de hijos se rige por el conocido proceso de nacimiento y muerte (Harris, 1963).

El resultado fundamental es la existencia de un valor crítico de  $\langle N \rangle$ . Este hecho fue descubierto por Irénée Bienaymé en 1845 (véase Heyde y Seneta, 1977) y merece llamarse *Efecto Bienaymé*.

El valor  $\langle N \rangle = 1$  es *crítico* en el sentido de que el número  $N(m)$  de la

descendencia presente en la  $m$ -ésima generación se rige por la alternativa siguiente. Si  $\langle N \rangle \leq 1$ , es casi seguro que, a la larga, la familia acaba por extinguirse, en el sentido de que la cascada acaba dando un conjunto vacío. Si, por el contrario,  $\langle N \rangle > 1$ , la línea familiar de cada grumo tiene una probabilidad no nula de prolongarse durante un número infinito de generaciones. En este caso, la coagulación aleatoria da un polvo aleatorio en la recta.

SIGNIFICADO DE LA DIMENSIÓN DE SEMEJANZA. Como el cociente  $\log N(m)/\log(1/r)$  es ahora aleatorio, el concepto de dimensión de semejanza requiere pensar un poco más sobre el tema. La relación casi segura,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \log N(m)/\log(1/r^m) = \log \langle N \rangle / \log(1/r),$$

sugiere una dimensión de semejanza generalizada

$$D^* = \log \langle N \rangle / \log(1/r) = E - \log p / \log r.$$

Con esta  $D^*$ , la condición de existencia de un conjunto final no vacío,  $\langle N \rangle > 1$ , se expresa en una forma muy razonable:  $D^* > 0$ . Cuando  $D^* > 0$ , se tiene  $D = D^*$ . Una aplicación formal de esta fórmula para  $\langle N \rangle < 1$  nos daría  $D \leq 0$ , pero de hecho la dimensión del conjunto vacío es siempre  $D = 0$ .

### *Coágulos encajados con D decreciente*

Vamos a construir una serie de coágulos aleatorios de dimensiones  $D$  decrecientes, encajados cada uno en el anterior.

Hay un paso preliminar independiente de  $D$ : a cada remolino de cualquier orden se le asigna un número aleatorio  $U$  comprendido entre 0 y 1. Sabemos ya (capítulo 21) que todos estos números en su conjunto equivalen a un solo número que mide la contribución del azar. A continuación se escoge la  $D$  y se introduce en la última fórmula escrita para obtener un umbral de probabilidad,  $p$ . Finalmente, la coagulación se basa en el siguiente «proceso de decimación fractal». Siempre que  $U > p$ , el remolino es «eliminado» y se convierte en suero, y la misma suerte corren todos sus subremolinos. Y siempre que  $U \leq p$ , el remolino sobrevive, y sigue participando del proceso de coagulación.

Este método permite seguir todas las características del coágulo, el suero y todos los demás conjuntos interesantes en función de una dimen-

sión que varía continuamente. Basta con mantener fijos todos los números aleatorios  $U$ , mientras  $p$  disminuye de 1 a 0 y  $D$  disminuye de 3 a 0.

Dados los coágulos  $Q_1$  y  $Q_2$ , correspondientes a las probabilidades  $P_1$  y  $P_2 < P_1$ , con dimensiones  $D_1$  y  $D_2 < D_1$ , la transformación de  $Q_1$  en  $Q_2 \subset Q_1$  puede llamarse «decimación fractal relativa» de probabilidad relativa  $P_2/P_1$  y dimensión relativa  $D_2 - D_1$ . Para llevar a cabo directamente una decimación relativa, se buscan los remolinos de lado  $1/b$  pertenecientes a  $Q_1$  y se los deja sobrevivir con la nueva probabilidad  $P_2/P_1$ . A renglón seguido se procede de modo análogo con los remolinos supervivientes de lado  $1/b^2$ , etc. Si por decimaciones sucesivas obtenemos una sucesión  $Q_1, Q_2, \dots, Q_g$ , las probabilidades relativas se multiplican y las dimensiones relativas se suman... hasta que el valor de la suma es menor que cero, y  $Q$  es el conjunto vacío.

### *Coagulación de Hoyle para las galaxias*

La coagulación constreñida tiene un homólogo espacial que puede servir como realización del modelo de coagulación de Hoyle para la distribución de galaxias, láminas 313 y 314.

### *La disipación turbulenta de Novikov-Stewart implica un proceso de coagulación*

La coagulación espacial aleatoria se plantea también, sin saberlo, en un modelo muy primitivo de la intermitencia de la turbulencia. Novikov y Stewart (1964) suponen que la distribución espacial de la disipación es generada por una cascada: cada estadio toma el precoágulo del estadio anterior y lo coagula un poco más, en  $N$  pedazos más pequeños, con una razón  $r$ . Véanse las láminas 315 a 318.

Se trata de un modelo muy tosco, más aún que el de Berger y Mandelbrot (1963) para ciertos ruidos excedentes (capítulos 8 y 31). Despertó poca atención y poca adhesión, y por tanto no fue continuado ni desarrollado. Pero el desdén con que fue recibido no está justificado. Mis investigaciones revelan que muchas características de modelos más refinados, pero más complicados, están ya presentes en el proceso de coagulación.

QUESO. Aunque no deba tomarse literalmente la imagen sugerida por el término *coagulación*, ni por el término complementario *suero*, podría ser que la formación del queso auténtico fuera consecuencia de una inestabilidad bioquímica, del mismo modo que se supone que la coagulación de Novikov

y Stewart es fruto de una inestabilidad hidrodinámica. Sin embargo, **no tengo** datos para asegurar que los quesos comestibles son también quesos fractales.

*Consecuencias del hecho de que los coágulos aleatorios sean figuras «intermedias»*

Sabemos que las figuras espaciales estándar con  $D < 3$  (puntos, líneas y superficies) tienen un volumen nulo. Lo mismo vale para los coágulos aleatorios.

El área de los precoágulos presenta también un comportamiento simple. Si  $D > 2$ , tiende a infinito. Si  $D < 2$ , tiende a cero. Y si  $D = 2$ , la coagulación deja dicha área prácticamente constante.

De modo análogo, cuando  $m \rightarrow \infty$ , la longitud acumulada de las aristas de los precoágulos tiende a infinito cuando  $D > 1$  y a cero cuando  $D < 1$ .

Estas propiedades relativas a las áreas y volúmenes confirman que las coagulaciones con una dimensión fractal tal que  $2 < D < 3$  están a medio camino entre una superficie ordinaria y un volumen.

□ DEMOSTRACIONES. Son de lo más simple si la coagulación está constreñida. El volumen del  $m$ -ésimo pregrumo es  $L^3 r^{3m} N^m = L^3 (r^{3-D})^m$ , el cual  $\rightarrow 0$  con la escala interna  $\eta = r^m$ . Por lo que respecta al área, el caso  $D < 2$  se resuelve determinando una cota superior. El área del precoágulo de orden  $m$ -ésimo es como máximo igual a la suma de las áreas de los remolinos que lo forman, pues esta última incluye también las caras de subremolinos que se neutralizan por ser comunes a coágulos adyacentes. Como el área de cada remolino de orden  $m$ -ésimo es  $6L^2 r^{2m}$ , el área total es como máximo  $6L^2 r^{2m} N^m = 6L^2 (r^{2-D})^m$ . Cuando  $D < 2$ , esta cota superior tiende a 0 para  $m \rightarrow \infty$ , que demuestra lo que pretendíamos. En el caso  $D > 2$ , obtenemos una cota inferior si observamos que la superficie de la unión de los remolinos de  $m$ -ésimo orden contenidos en el precoágulo de orden  $m$ -ésimo contiene al menos un cuadrado de lado  $r^m$  y área  $r^{2m}$ , que está contenido en el pregrumo de orden  $(m-1)$ -ésimo y no puede ser borrado. Por tanto, el área total es mayor o igual que  $L^2 r^{2m} N^{m-1} = (L^2/N)(r^{2-D})^m$  que  $\rightarrow \infty$  con  $m$ . Finalmente, para  $D = 2$  ambas cotas son finitas y positivas. ■

*Las D de las secciones fractales:  
regla de la suma de las codimensiones*

Pasamos a estudiar un tema que hemos citado ya en capítulos anteriores y que ahora estamos preparados para abordar explícita y plenamente en un caso especial.

Recordemos, para empezar, una propiedad estándar de la geometría euclídea plana: si la dimensión  $D$  de una figura satisface  $D \geq 1$ , y su intersección con una línea es no vacía, entonces el valor «típico» de su dimensión es  $D-1$ . Así, por ejemplo, una sección lineal no vacía de un cuadrado ( $D=2$ ) es un segmento, de dimensión  $1=D-1$ . Y la intersección de una línea con otra línea ( $D=1$ ) es un punto, de dimensión  $0=1-1$ , excepto en el caso de que ambas líneas coincidan.

Y, en general, las reglas geométricas estándar relativas al comportamiento de la dimensión para las intersecciones se resumen del modo siguiente: si la suma de las codimensiones  $C=D-E$  es menor que  $E$ , dicha suma es la codimensión típica de la intersección; en caso contrario, la intersección es típicamente vacía. (Animamos al lector a que compruebe este enunciado para distintas configuraciones de rectas y planos en el espacio.)

Es una suerte que esta regla valga también para las dimensiones fractales. Gracias a ello, muchos razonamientos relativos a los fractales son más simples de lo que se podría esperar de entrada. Pero hay que tener presentes las numerosas excepciones. En particular, vimos en el capítulo 14 que, si cortamos un fractal no aleatorio  $F$  por una recta o un plano con una orientación convenientemente escogida, la dimensión de dicha sección no siempre es deducible de la dimensión de  $F$ . Pero, en este aspecto, los fractales aleatorios son más simples.

### *Las $D$ de las secciones de las coagulaciones aleatorias*

Para demostrar la regla fundamental en el caso de coágulos fractales, consideremos las trazas (cuadrados y segmentos) que dejan los remolinos y subremolinos de la cascada de grumos en una cara o una arista del remolino inicial de lado  $L$ . Cada paso de la cascada sustituye un trozo de pregrumo por un número de piezas que se determina por un proceso de nacimiento y muerte. Designemos por  $N_1(m)$  el número de la descendencia de la  $m$ -ésima generación alineada sobre una arista del remolino inicial. Según resultados clásicos, de los que ya hemos hecho uso a lo largo de este capítulo, se tiene que  $N_1(m)$  se rige por la siguiente alternativa. Cuando  $\langle N_1 \rangle = Nr^2 \leq 1$ , esto es,  $D \leq 2$ , es casi seguro que la familia acaba a la larga por extinguirse, con lo que la arista acaba vaciándose, y por tanto su dimensión es cero. En cambio, cuando  $\langle N_1 \rangle > 1$ , esto es,  $D > 2$ , la línea de descendencia de cada remolino tiene una probabilidad no nula de prolongarse durante un número infinito de generaciones. Y la dimensión de semejanza es  $D-2$ , debido a la relación casi segura

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \log N_1(m) / \log(1/r^m) \\ = \log \langle N_1 \rangle / \log(1/r) = D - 2. \end{aligned}$$

Las trazas bidimensionales de los remolinos obedecen al mismo argumento, si cambiamos  $N_1$  por un  $N_2$  aleatorio tal que  $\langle N_2 \rangle = Nr$ . Si  $\langle N_2 \rangle \leq 1$ , esto es,  $D \leq 1$ , todas las caras de los remolinos acaban por desaparecer a la larga. Si  $\langle N_2 \rangle > 1$ , esto es,  $D > 1$ , la dimensión de semejanza es  $D - 1$ , debido a la relación casi segura

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \log N_2(m) / \log(1/r^m) \\ = \log \langle N_2 \rangle / \log(1/r) = D - 1. \end{aligned}$$

La coagulación constreñida conduce a idénticas conclusiones. Una confirmación adicional de que, por lo que respecta a las intersecciones, la dimensión fractal se comporta igual que la euclídea la tenemos en el hecho de que la intersección de varios fractales coagulados de dimensiones respectivas  $D_m$ , y soportados por la misma trama, satisface  $E - D = \Sigma(E - D_m)$ .

### *La topología de los coágulos: racimos*

Aun a riesgo de ponerme pesado, reiteraré que las desigualdades básicas  $D < 2$  para las galaxias (capítulo 9) y  $D > 2$  para la turbulencia (capítulo 10) no son topológicas, sino fractales.

En una coagulación no aleatoria, con  $E \geq 2$  (capítulos 13 y 14), el diseñador controla también la topología. Entre los coágulos planos conexos tenemos las alfombras de Sierpinski ( $D > D_T = 1$ ), y entre los coágulos espaciales conexos tenemos las esponjas ( $D > D_T = 1$ ) y las espumas ( $D > D_T = 2$ ). Otros coágulos son los  $\sigma$ -racimos o los polvos. Así, para  $E = 3$  y  $D > 2$ , que es el caso que interesa en el estudio de la turbulencia, una cascada no aleatoria puede dar  $D_T = 0$  (polvo),  $D_T = 1$  (curvas o  $\sigma$ -curvas) o  $D_T = 2$  (superficies o  $\sigma$ -superficies). Si  $E = 3$  y  $D < 2$ , que es el caso interesante en astronomía,  $D_T$  puede ser 0 o 1.

Por contra, una cascada de coagulación aleatoria equivale a una mezcla estadística de generadores que casi con toda seguridad impone una cierta topología determinada (final del capítulo 21). Por su propia tosquedad, la coagulación es tan simple que es esencial examinar sus predicciones. El conocimiento actual al respecto es una mezcla de verdades probadas e inferencias a partir de evidencias circunstanciales.

**DIMENSIONES CRÍTICAS.** La  $D_T$  del coágulo cambia bruscamente cuando  $D$  cruza ciertos umbrales críticos, que denotaremos por  $D_{\text{crit}}$ ,

$D_{2crit}, \dots, D_{(E-1)crit}$ . En otras palabras, casi nunca se encuentran mezclas de coágulos formadas por porciones con distintos valores de  $D_T$ .

El umbral más importante es  $D_{crit}$ . Es al mismo tiempo una cota superior de los valores de  $D$  para los que el coágulo es casi con toda seguridad un polvo, y una cota inferior de los valores de  $D$  para los que el coágulo se descompone casi con toda seguridad en una colección infinita de pedazos disjuntos, siendo cada uno de éstos un conjunto conexo. Por las razones expuestas en el capítulo 13, dichos pedazos se denominan racimos de contacto.

El siguiente umbral,  $D_{2crit}$ , separa los valores de  $D$  para los que el coágulo es una  $\sigma$ -curva de aquellos para los que es una  $\sigma$ -superficie, etc. Cuando la topología del suero empieza a ser también interesante, pueden aparecer nuevos umbrales críticos.

LA DIMENSIÓN DE LOS RACIMOS. Cuando  $D > D_{crit}$ , los racimos de contacto tienen una dimensión fractal  $D_c < D$ . Y a medida que  $D$  decrece desde  $E$  hasta  $D_{crit}$ ,  $D_c$  disminuye desde  $E$  hasta  $D_{cmin} > 1$ , y luego cae repentinamente a 0.

DISTRIBUCIONES DE LOS TAMAÑOS. Las  $Pr(\Lambda > \lambda)$ ,  $Pr(A > a)$ , etc. se obtienen por sustitución de  $Nr$  por  $Pr$  en las fórmulas del capítulo 13.

COTAS PARA  $D_{crit}$  y  $D_{2crit}$ . Obviamente  $D_{crit} \geq 1$  y  $D_{2crit} \geq 2$ . Y en la sección siguiente se prueba que  $D_{crit}$  tiene una cota superior menor que  $E$ , lo que demuestra que las definiciones anteriores no están vacías de contenido.

Además, y con independencia de  $b$ , valen cotas inferiores más finas. Se puede demostrar que una condición suficiente para que  $D_T=0$  es  $D < 1/2(E+1)$ . De donde,  $D_{crit} > 1/2(E+1) > 1$ . Y una condición suficiente para que  $D_T$  sea 0 o 1 es  $D < E/2+1$ . De donde,  $D_{2crit} > E/2+1 > 2$ .

Para  $E=3$  tenemos que  $D < 1/2(E+1)=2$ , condición satisfecha (sobradamente) por el valor  $D=1$  de Fournier-Hoyle, y por el valor empírico  $D \sim 1,23$  de las galaxias. Así pues, un coágulo aleatorio con cualquiera de estas dimensiones es un polvo, tal como queremos.

La condición  $D < E/2+1$  da  $D < 2,5$  para  $E=3$ . Este valor umbral resulta ser también la dimensión estimada del soporte de la intermitencia turbulenta. La experiencia nos enseña que las condiciones suficientes obtenidas sin afinar demasiado rara vez son óptimas. Así pues, podríamos concluir que el modelo de coagulación para el soporte de la turbulencia es *menos que* hojaldrado.

DEDUCCIÓN DE COTAS INFERIORES. Se basan en el hecho, señalado en el capítulo 13, de que los racimos por contacto de la coagulación se forman cuando el contenido de las celdas vecinas forma grumos. Consideremos por tanto la intersección del coágulo con un plano perpendicular a un eje,



con una coordenada de la forma  $\alpha b^{-\beta}$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$  enteros. Ya sabemos que, si  $D > 1$ , esta intersección tiene una probabilidad positiva de ser no vacía. Sin embargo, la formación de grumos implica un solapamiento entre las contribuciones parciales a dicha intersección de lados opuestos de un lado de longitud  $b^{-\beta}$ . Si la intersección es no vacía, estas contribuciones son estadísticamente independientes, con lo que su solapamiento tiene la dimensión formal  $D^* = E - 1 - 2(E - D) = 2D - E - 1$ .

Cuando  $D^* < 0$ , es decir, cuando  $D < 1/2(E + 1)$ , las contribuciones no se solapan. De lo que se sigue que el coágulo no puede contener ninguna curva continua que cruce nuestro plano, y  $D_T < 1$ .

Cuando  $D^* < 1$ , esto es, cuando  $D < E/2 + 1$ , el solapamiento, si lo hay, no puede contener ninguna curva. De ahí que el coágulo no pueda contener ninguna superficie continua que cruce nuestro plano, y  $D_T < 2$ .

Cuando  $D^* < F$ , con  $F > 1$ , es decir, cuando  $D < 1/2(E + 1 + F)$ , el mismo argumento sirve para excluir la posibilidad de una hipersuperficie de dimensión  $D_T = F$ .

Aceptados estos resultados, el resto de la demostración de las desigualdades anteriores es inmediato: cuando el coágulo contiene una curva (o una superficie), cualquier punto  $P$  de la misma está contenido en una caja de lado  $b^{-\beta}$ , que es intersecada por la curva (o superficie) en algún punto (o curva). Se descubre que, casi con toda seguridad, tal punto (o curva) no existe cuando  $D < 1/2(E + 1)$  (o  $D < E/2 + 1$ ).

### *Racimos fractales percolantes*

Para seguir con esta discusión topológica es mejor emplear el vocabulario propio de la percolación. Según la definición del capítulo 13, se dice que una figura trazada en el interior de un cuadrado o un cubo percola si contiene una curva conexa que una dos lados opuestos del cuadrado o dos caras opuestas del cubo. La percolación se plantea normalmente en el contexto de Bernouilli discutido en los capítulos 13 y 14. Pero surge también el mismo problema en el contexto de los fractales aleatorios. Aquí lo plantearemos para coágulos aleatorios.

El hecho fundamental es que, si una figura es un  $\sigma$ -racimo, percola si lo hace uno de sus racimos por contacto. Cuando los racimos por contacto son fractales y sus longitudes siguen una distribución hiperbólica sin escalas preferidas, la probabilidad de percolación es independiente del lado del cuadrado, y no degenera a 0 ni a 1. En la percolación de Bernouilli, el «cuando» de la frase anterior se satisface para el estrecho margen  $p = p_{\text{crit}}$ . En la percolación a través de un coágulo fractal, el margen se

amplía hasta  $D > D_{crit}$ . Y esta es una diferencia considerable. Sin embargo, la comprensión de la percolación de Bernouilli sirve para entender mejor la percolación de los coágulos, y viceversa.

UNA COTA SUPERIOR DE LA  $D_{crit}$ . Razonaré ahora que, si  $b \geq 3$ ,  $D_{crit}$  cumple que  $b^{D_{crit}} > b^E + \frac{1}{2}b^{E-1}$ . Concretando más, cuando  $N$  es fijo (coagulación constreñida), esta condición hace que la percolación sea casi segura. En la coagulación sin ligaduras, esta condición asegura que la probabilidad de que no haya percolación es positiva, aunque pequeña.

Consideremos en primer lugar el caso de un  $N$  no aleatorio. La condición más restrictiva  $b^E - N \geq \frac{1}{2}b^{E-1} - 1$  implica que no hay ninguna posibilidad de que cualquier cara que separe dos celdas del pregrumo no sobreviva. Aun en el peor de los casos, suponiendo que todos los subremolinos que perecen se alinean sobre dicha cara, su número es tan pequeño que es seguro (no casi, sino absolutamente) que ningún camino llegará a desconectarse. Si se impone la condición más débil  $b^E - N \geq \frac{1}{2}b^{E-1}$ , el mismo resultado ya no es absolutamente seguro, sino casi seguro. La coagulación resultante estará formada por hojas que envuelven huecos separados entre sí y llenos de suero. Dos puntos del suero sólo pueden conectarse si están en el mismo hueco. La topología es, con casi toda seguridad, la de una alfombra de Sierpinski, o la de una espuma (capítulo 14).

Si se aplica la misma condición a la coagulación sin ligaduras, la no percolación ya no es un suceso imposible, sino improbable.

Examinemos ahora ejemplos numéricos con  $E = 2$ . Cuando  $b = 3$ , la más débil y útil de las condiciones anteriores nos da  $N > 7,5$ , que tiene sólo una solución  $N = 8$  (¡el valor correspondiente a la alfombra de Sierpinski!). A medida que  $b \rightarrow \infty$ , la cota superior anterior a la  $D_{crit}$  se va acercando cada vez más a 2.

COTA INFERIOR PARA  $D_{crit}$ . Cuando  $b \gg 1$ ,  $D_{crit} > E + \log_b p_{crit}$ , donde  $p_{crit}$  es la probabilidad crítica de la percolación de Bernouilli. Esta cota se basa en que el primer paso de una coagulación fractal aleatoria equivale a embaldosar un suelo de Bernouilli con unas baldosas cuya probabilidad de ser conductoras es  $b^{D-E}$ . Si esta probabilidad es menor que  $p_{crit}$  la probabilidad de que el suelo sea conductor es pequeña. Y si lo es, es probable que se deba a una sola hilera de baldosas conductoras. El segundo paso de la coagulación fractal aleatoria construye un suelo de Bernouilli sobre cada baldosa conductora del primer paso, con la misma probabilidad  $b^{D-E}$ . Y es muy probable que este paso destruya el camino percolante.

Cuando  $b \rightarrow \infty$ , la nueva cota tiende a  $E$ , y en su dominio de validez ( $b > 1$ ) supera la cota  $1/2(E+1)$ . Por tanto,  $D_{crit} \rightarrow E$ .



FIG. 313 y 314. *Realización del modelo de Hoyle (dimensión  $D=1$ ) por coagulación aleatoria en una parrilla.*

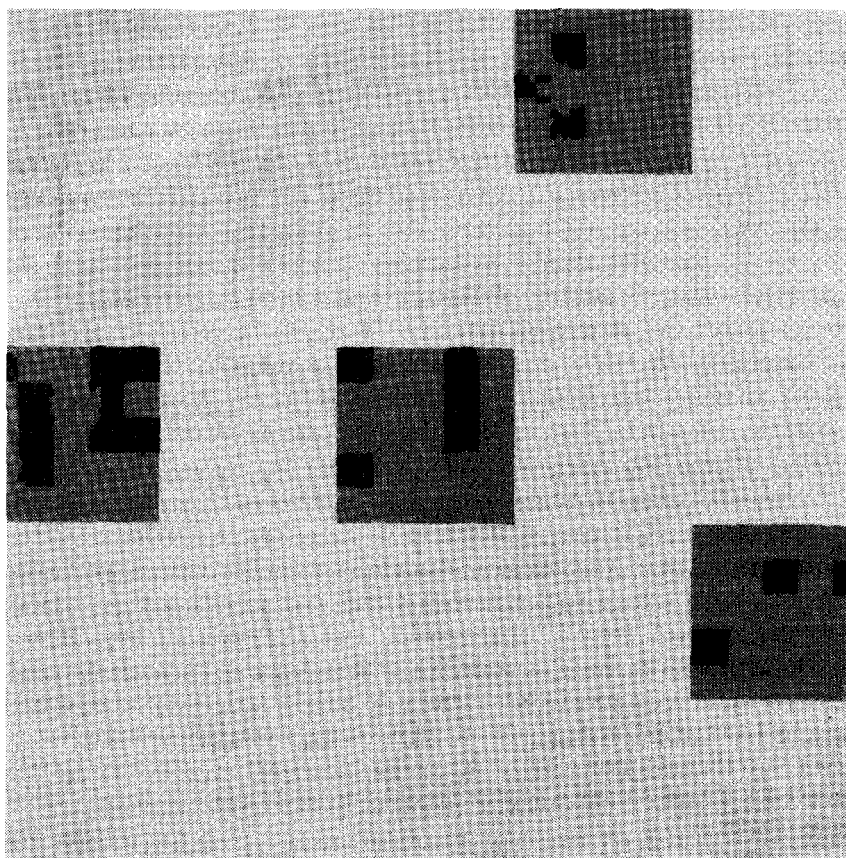
En el modelo de Hoyle (capítulo 9) una nube de gas de muy baja densidad colapsa varias veces para formar cúmulos de galaxias, galaxias y así sucesivamente. La descripción de Hoyle es, sin embargo, demasiado esquemática, y para su realización geométrica efectiva hay que añadir algunas suposiciones concretas. En estas láminas se presenta una proyección plana de la realización más simple.

FIGURA 314. Un cubo iniciador de lado 1 se subdivide en  $5^3=125$  subcubos de lados  $5^{-1}$  los cuales se subdividen a su vez y así sucesivamente hasta  $125^k$  subcubos de  $k$ -ésimo orden, de lado  $5^{-k}$  cada uno de ellos. En el  $k$ -ésimo estadio de la cascada, la materia contenida en un subcubo de  $(k-1)$ -ésimo orden se concentra en 5 subcubos de orden  $k$ -ésimo, que llamaremos  $k$ -pregrumo. La coagulación de Hoyle reduce siempre la dimensión de  $D=3$  a  $D=1$ .

En esta lámina se representan superpuestos los tres primeros estadios, y se emplean tonos de gris cada vez más oscuros para indicar densidades crecientes del gas. Comparada con Hoyle (1975, pág. 286) esta lámina puede parecer un tanto tosca. Pero se ha dibujado cuidadosamente a escala porque los temas relacionados con la dimensión requieren una gran precisión.

Como presentamos una proyección plana de una coagulación, no es raro que dos cubos se proyecten sobre el mismo cuadrado. En el límite, no obstante, las proyecciones de dos puntos casi nunca coinciden. El polvo es tan poco denso que el espacio es prácticamente transparente.

FIGURA 313. Aquí se representa sólo el cuarto estadio de la coagulación (con una semilla distinta). No queda ningún rastro de la parrilla subyacente, lo



que es una suerte porque en la naturaleza tampoco hay evidencias de una tal parrilla (capítulo 27). En este ejemplo, la parte superior del remolino, que queda cortado por el borde de la página, está vacía.

**CONTROL DE LA LAGUNARIDAD.** El concepto de lagunaridad, que se presenta en el capítulo 34, se puede aplicar directamente a la coagulación aleatoria sobre la recta y la coagulación de Hoyle. Si el valor  $N=5$  de Hoyle se sustituye por el valor «real» de Fournier de  $N=10^{22}$  (figura 139), la lagunaridad de la coagulación aleatoria obtenida resulta muy pequeña.

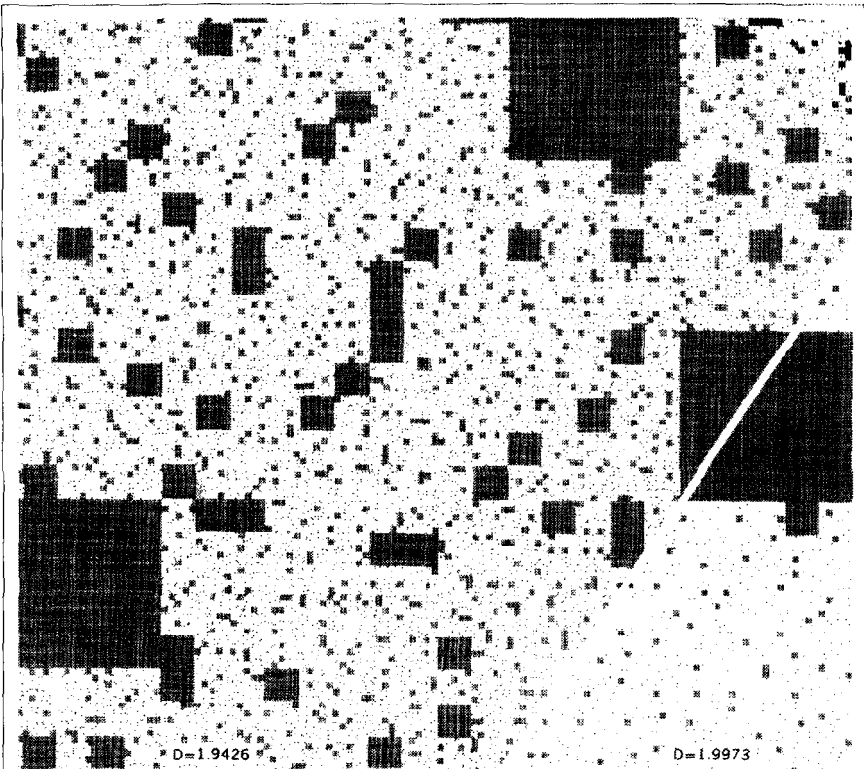
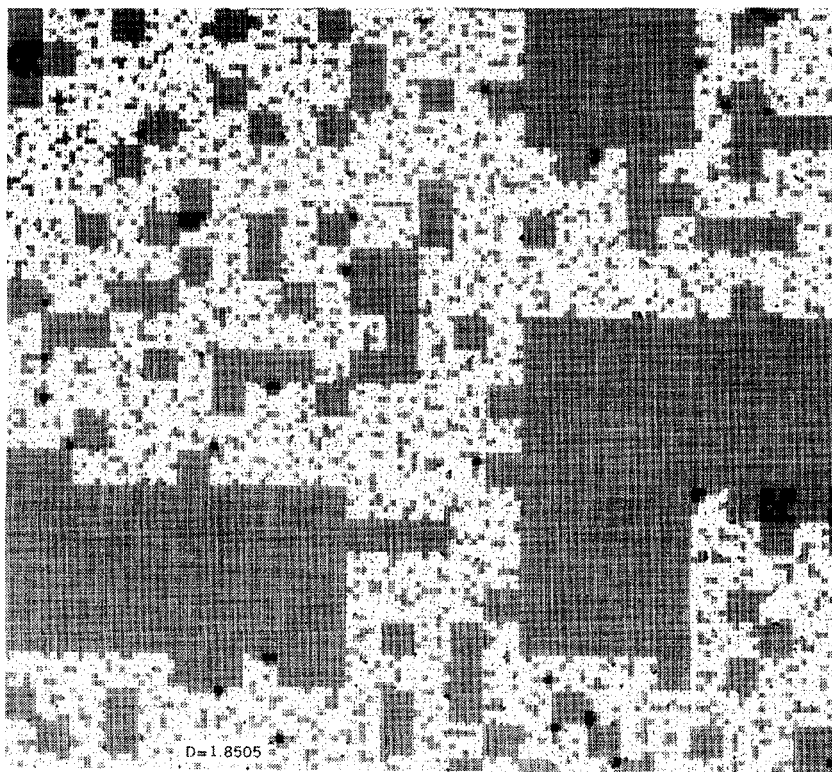


FIG. 315 a 318. *Coagulaciones aleatorias de Novikov-Stewart en una parrilla plana (dimensiones comprendidas entre  $D = 1,5936$  y  $D = 1,9973$ ) seguidas de percolación*

La cascada de Novikow-Stewart nos sugiere una idea general de cómo la disipación turbulenta se concentra en un volumen relativamente pequeño. La idea básica es muy parecida a la cascada de Hoyle que se ilustra en las dos láminas anteriores, aunque los valores de la dimensión fractal  $D$  son muy distintos. Para las galaxias  $D \sim 1$ , mientras que para la turbulencia  $D > 2$ , con  $D$  entre 2,5 y 2,6, es una buena conjetura. Estas láminas ilustran varios valores distintos de la dimensión, con objeto de dar una mejor idea genérica del proceso de coagulación. En los cinco casos tomamos  $r = 1/5$  y

$$N = 5 \times 24, N = 5 \times 22, N = 5 \times 19, N = 5 \times 16 \text{ y } N = 5 \times 13,$$

respectivamente. Por tanto, los valores de las dimensiones son



$$D = 1 + \log 24 / \log 25 = 2,9973; D = 2,9426; D = 2,8505; D = 2,7227 \text{ y } D = 2,5936$$

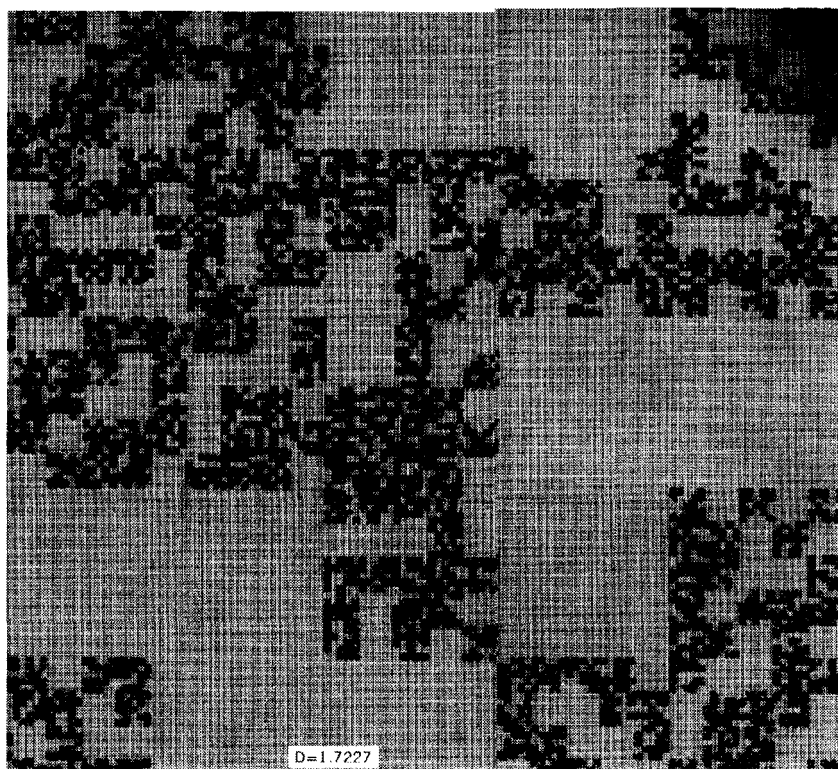
El suero se representa en gris y el coágulo en blanco y negro. La parte blanca es un racimo de contacto precolante, a saber, las partes conexas que tocan tanto la parte superior como la inferior del gráfico. La parte negra rúne los racimos de contacto restantes.

Dado que en la turbulencia se tiene  $D > 2$ , estos coágulos son esencialmente opacos y (al contrarior que los de Hoyle) estas láminas representan sus secciones planas, cuyas dimensiones son

$$D = 1,9973; D = 1,9426; D = 1,8505; D = 1,7227 \text{ y } D = 1,5936$$

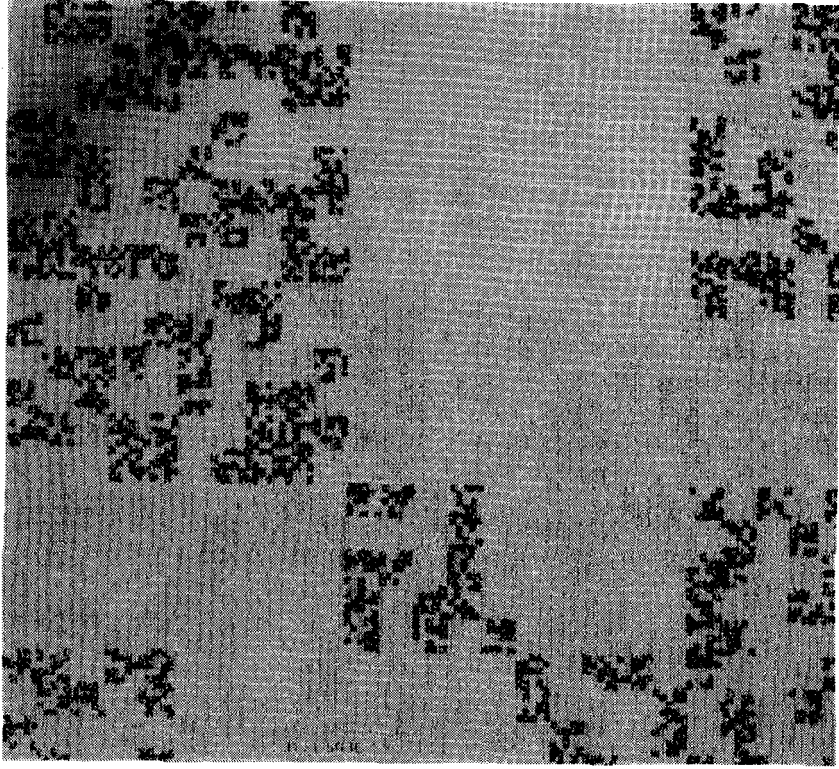
La esquina inferior derecha de la lámina ilustra el caso  $D \sim 1,9973$ , que carece de detalles interesantes. El resto de la lámina ilustra el caso  $D \sim 1,9426$ .

El programa generador y la semilla son los mismos en los cinco casos, y se



puede advertir la desaparición progresiva de los grises. Se empezó amontonando al azar los 25 subremolinos de cada remolino. Luego, para valores enteros sucesivos de  $5^D = N$ , se «agrisaron» los primeros  $25-N$  subremolinos del montón.

Para las dos dimensiones menores no hay percolación. Con  $N = 19$  hay un poco de negro y mucho blanco. Unas pocas semillas ya dan percolación para  $N = 18$ . Pero los estadios representados en esta ilustración son demasiado bajos para permitir una estimación fiable de  $D_{crit}$ .





El capítulo anterior describe la forma de aleatorizar la coagulación sin tocar la trama espacial subyacente de base  $b$ . En una coagulación aleatoria, el «material» que se encuentra en una celda de la red en el paso  $k$ -ésimo permanece en ella por siempre jamás, en tanto que su distribución se hace cada vez menos uniforme. El proceso es muy simple, pues la evolución de cada celda es independiente de lo que ocurra en las demás. Sin embargo, hay que dejar que el azar y las propiedades del espacio determinen la topología de los fractales resultantes.

En este capítulo se muestra cómo se pueden imponer condiciones al proceso de coagulación para que la fractal resultante tenga unas determinadas propiedades de conexión. Así, por ejemplo, si se pretende modelar una costa o el curso de un río, se necesita una curva «autoevitante». En otro campo totalmente diferente, el de la ciencia de polímeros, encontramos otro ejemplo: una molécula sumamente larga flotando en un buen disolvente se mueve erráticamente pero, como es obvio, le está prohibido ocupar la misma porción de espacio más de una vez.

En los métodos iterativos que garantizan que el conjunto resultante del proceso de coagulación será conexo y autoevitante, el iniciador sigue siendo un dominio plano, pongamos un cuadrado, y el generador también es un conjunto de dominios más pequeños contenidos en el iniciador. En el capítulo 23 la única condición sobre dichos dominios era que no se solaparan, aunque estaban *permitidos* los vértices o lados comunes. En este capítulo, por el contrario, se *impone* la existencia de vértices o lados comunes.

El caso de vértices comunes, que examinaremos en primer lugar, es el de las «cadenas aleatorias» que nos dan una generalización directa de ciertas curvas de Koch y de Peano.

El caso de lados comunes da una familia de fractales mucho más atractiva e interesante, que fue introducida en Mandelbrot (1978r, 1979c). Algunas de ellas son «curvas simples» autoevitantes y sin ramificaciones, otras son bucles y otras árboles. El proceso de construcción se

puede generalizar a superficies. Propongo para estas figuras el nombre de *garabatos*.

La razón principal para preferirlos a las cadenas aleatorias es que su *menor versatilidad* parece reflejar una propiedad fundamental del espacio.

Los garabatos lineales son modelos toscos de polímeros lineales y de cursos fluviales, mientras que los garabatos que forman bucles son modelos de costas, y los garabatos ramificados de árboles fluviales.

### *Cadenas aleatorias y curvas en cadena*

Se puede considerar que los dominios en blanco de la lámina 71 forman una cadena de triángulos unidos por los vértices. En la siguiente etapa de la construcción, cada triángulo es sustituido por una subcadena contenida totalmente en su interior, de lo que resulta una cadena de triángulos menores unidos por un solo punto. Esta sucesión de cadenas encajadas converge hacia la curva de Koch. (El procedimiento recuerda las cadenas de Poincaré del capítulo 18.)

De este mismo modo se pueden construir muchas otras curvas de Koch, como, por ejemplo, el tamiz de Sierpinski de la lámina 204, cuya cadena es la figura que se obtiene eliminando las tremas triangulares centrales.

Este método de construcción se puede aleatorizar fácilmente, por ejemplo sustituyendo cada triángulo, bien por dos triángulos con  $r = 1/\sqrt{3}$ , como en la lámina 71, bien por tres triángulos con  $r = 1/3$ .

### *Los garabatos más simples (Mandelbrot, 1978r)*

La curva «garabato» más simple es una curva fractal aleatoria diseñada en Mandelbrot (1978r, 1979c) y estudiada también por Peyrière (1978, 1979, 1981). Es un modelo de curso fluvial trazado según unas figuras bien conocidas en geografía y en geología, que muestran los sucesivos estadios de un río que va excavando su valle, definiendo su curso con una precisión creciente.

Antes del  $k$ -ésimo estadio de excavación, el río fluye por un valle «pregarabato» formado por celdas de una red triangular regular de lado  $2^{-k}$ . Naturalmente, ninguna celda de la red puede ser visitada dos veces, y cada celda del valle debe estar en contacto con dos vecinos a través de un lado común, mientras que el tercer lado está «bloqueado».

El  $k$ -ésimo estadio de la excavación sustituye este pregarabato por otro más detallado dibujado sobre una celosía interpolada de lado  $2^{-k-1}$ . Está claro que el pregarabato de orden  $(k+1)$  incorpora necesariamente la mitad de cada lado compartido entre dos celdas de orden  $k$ . Y se cumple también un enunciado inverso más fuerte, a saber: la posición de las mitades compartidas (no bloqueadas) determina sin ambigüedad el pregarabato de orden  $(k+1)$ .

GARABATOS SIMÉTRICAMENTE ALEATORIOS. Tómese al azar el medio lado a bloquear, con la misma probabilidad para ambas alternativas posibles. El número de enlaces de orden  $(k+1)$  contenidos en un enlace de orden  $k$  es 1, con probabilidad  $1/4$ , o 3 con probabilidad  $3/4$ . El número medio es, pues, 2,5.

A cada paso el valle se hace cada vez más congestionado, convergiendo asintóticamente hacia una curva fractal. Naturalmente conjeturé que la dimensión del límite sería  $D = \log 2,5 / \log 2 = 1,3219$ . La demostración (bastante delicada) se encuentra en Peyrière (1978).

GARABATOS ASIMÉTRICAMENTE ALEATORIOS. Divídase cada lado en dos mitades y sea  $p \neq 1/2$  la probabilidad de que el subvalle cruce la «mitad de la izquierda». Esta puede definirse en relación a un observador orientado río abajo o a uno situado en el centro del triángulo a subdividir. En el primer caso,  $D = \log[3 - p^2 - (1-p)^2] / \log 2$ , y varía entre 1 y  $\log 2,5 / \log 2$ . En el segundo caso,  $D = \log[3 - 2p(1-p)] / \log 2$ , variando entre  $\log 2,5 / \log 2$  y  $\log 3 / \log 2$ . En conjunto se pueden alcanzar todos los valores de  $D$  comprendidos entre 1 y  $\log 3 / \log 2$ .

### *Celosías y garabatos alternativos*

Usando otras celosías interpoladas se obtienen garabatos alternativos. La generalización es inmediata siempre y cuando el conocimiento de los segmentos por los que un pregarabato de orden  $(k+1)$  cruza los lados comunes a las celdas de orden  $k$  baste para identificar el pregarabato de orden  $(k+1)$ . Un ejemplo lo tenemos en una celosía rectangular, en la que el cociente entre el lado largo y el corto es  $\sqrt{b}$ , y la interpolación se hace sustituyendo cada celda por otras  $b$  semejantes a ella, dispuestas transversalmente.

Pero este no es el caso de las celosías triangulares, cuyas celdas se subdividen por interpolación en  $b^2 \geq 9$  triángulos, ni el de las celosías cuadradas, cuyas celdas se subdividen en  $b^2 \geq 4$  cuadrados. En ambos casos la interpolación de los pregarabatos precisa de pasos adicionales.

Si  $b=3$ , en el caso de los triángulos, o  $b=2$ , en el de los cuadrados,

basta con un paso extra muy natural. En efecto, considérense los cuatro «rayos» irradiados desde el centro del cuadrado que lo dividen en cuatro cuadrados menores, o los seis rayos que sirven para dividir el triángulo en nueve triángulos menores. Tan pronto se bloquea uno de estos rayos, el subvalle queda completamente determinado. En mi definición de los garabatos, el rayo bloqueado se escoge al azar, con idénticas probabilidades para todas las alternativas. Se tiene que  $D \sim 1,3347$  para los triángulos que se dividen en 9, y que  $D \sim 1,2886$  para los cuadrados que se dividen en 4. Si recordamos que los garabatos más simples dan  $D \sim 1,3219$ , observamos que la  $D$  de un garabato es casi universal: próxima a  $4/3$ .

Si se divide un triángulo o un cuadrado en  $b^2$  partes, con  $b > 3$  para el triángulo o  $b > 2$  para el cuadrado, hacen falta más especificaciones para determinar el subvalle, con lo que la construcción tiene una componente arbitraria creciente. En el espíritu de la discusión de la sección siguiente, acaban por perderse los méritos de la construcción por garabato.

### *Comparación de las curvas en cadena y las curvas garabato*

Detengámonos ahora para recordar que, si se obtiene una curva fractal por el método de las cadenas de Cesàro o por el método original de Koch, el error cometido al truncar el proceso se reparte a lo largo de la curva de un modo muy *heterogéneo*. El hecho de que algunos puntos se alcancen con una precisión infinita al cabo de un número finito de estadios puede resultar ventajoso. Le sirvió a Koch, por ejemplo, en su búsqueda de la curva más simple que carece de tangente en todos sus puntos. Pero el significado esencial del concepto de curva queda muchísimo más claro cuando ésta se presenta como límite de una banda de anchura *uniforme*. Mis curvas garabato satisfacen este desiderátum.

Otro elemento de comparación tiene que ver con el número de decisiones arbitrarias que debe tomar el «diseñador» en cada paso. El enfoque de fractales a lo Koch es muy potente, tanto si son aleatorios como si no (en particular, se consigue cualquier  $D$  que se quiera con una simple curva), pero implica un gran número de elecciones concretas por parte del diseñador, que no tienen una motivación independiente. La base  $b$  es especialmente no intrínseca.

Después de haber padecido la aridez de los modelos euclídeos de las formas rugosas que se dan en la naturaleza, el que las fractales nos libe-raran de esta incuestionable inconveniencia fue un motivo de alegría. Pero en el estado actual de la teoría tenemos que superar la euforia inicial y arreglarnos con menos decisiones arbitrarias.

A la luz de este comentario, el hecho de que la construcción por garabatos esté mucho más condicionada por la geometría del plano (en el sentido de ser menos versátil que la construcción por cadenas) resulta ser una virtud.

### *La dimensión $D \sim 4/3$*

En particular, hay que tener presente que la dimensión de los garabatos es  $D \sim 4/3$ . El hecho de que este valor se encuentre también en el capítulo 25 (lámina 343) y en el capítulo 36, no puede ser fruto de una coincidencia, y puede llevarnos finalmente a la comprensión de aspectos fundamentales de la estructura geométrica del plano.

### *Garabatos ramificados*

Volvamos a la construcción del curso de un río. Una vez sustituido el intervalo triangular de un valle por un subvalle formado por 1 o 3 subtriángulos, imaginemos que los 3 o 1 subtriángulos restantes desaguan en el nuevo subvalle. El patrón de drenaje queda totalmente determinado. Los puntos por los que los afluentes cruzan las divisorias entre triángulos son escogidos por el mismo procedimiento empleado para el río principal. La construcción resultante converge hacia un árbol que llena un triángulo al azar, como se ve en la figura.

### *Dos casos ilustrativos*

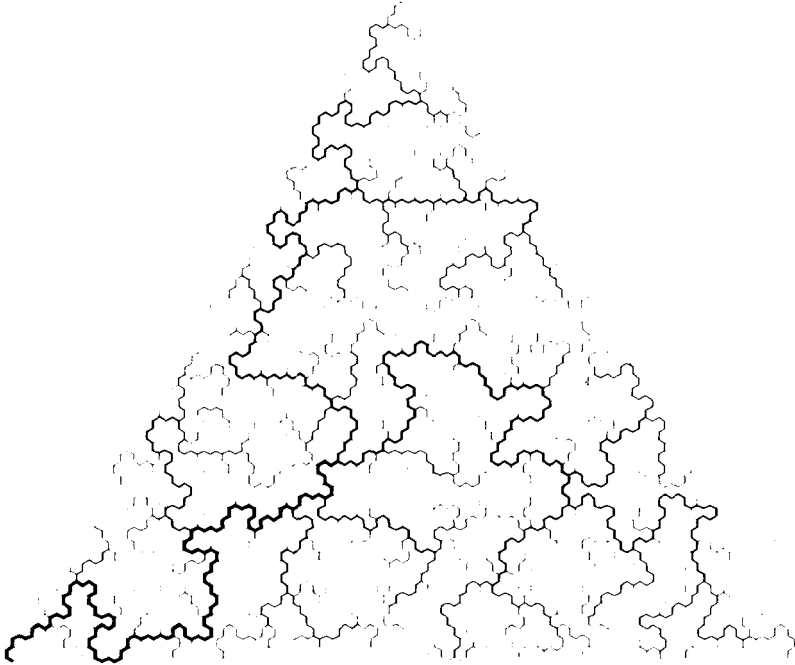
Es interesante, y quizá incluso significativo, que un modelo tan tosco como mis garabatos lineales bastara para explicar —aunque sólo sea aproximadamente— las dimensiones observadas de los ríos.

Y también da la dimensión del modelo más corriente de polímero lineal altamente diluido, el paseo aleatorio autoevitante sobre una celosía (PAAE, capítulo 36).

La razón por la cual las ligaduras derivadas de la geometría del plano son muchísimo más fáciles de manejar en el caso de los garabatos que en el PAAE tiene que ver obviamente con el hecho de que los garabatos se construyen por interpolación.

### *Superficies garabato*

Se definen en un cubo que se subdivide en  $b^3$  subcubos. He encontrado procedimientos apropiados de «bloqueo» que determinan unívocamente una especie de edredón de espesor constante pero decreciente. Por desgracia, el algoritmo es demasiado largo para reproducirlo aquí.



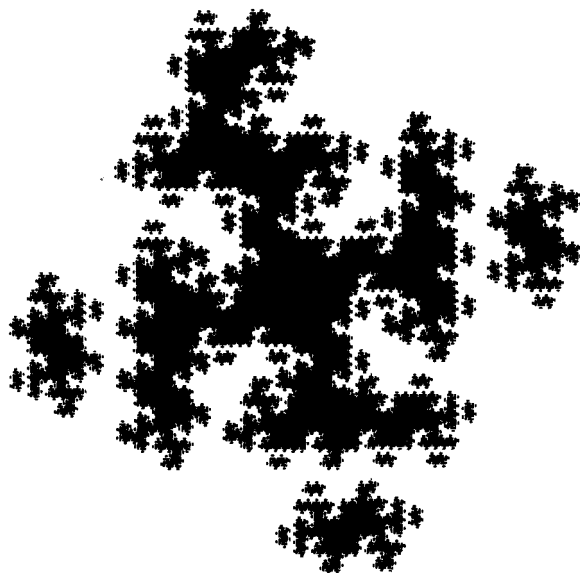
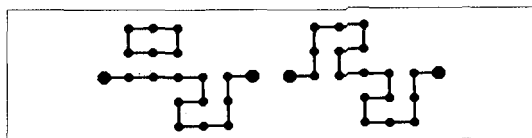


FIG. 325. *Costa aleatoria de Koch (dimensi3n  $D = 1,6131$ )*

En muchos casos se puede obtener una curva de Koch con una  $D$  prescrita y sin puntos de autocontacto mediante diversos procedimientos, manteniendo la misma trama global y el mismo iniciador. Supongamos adem3s que por lo menos dos generadores distintos encajan en el mismo esquema global. En tal caso es f3cil aleatorizar la construcci3n escogiendo al azar entre dichos generadores. Se puede, por ejemplo, alternar los dos generadores siguientes



El resultado es el que se muestra sobre estas l3neas.

La forma global de una isla de Koch aleatoria construida de este modo depende mucho de la figura inicial. En particular, todas las simetr3as de la misma se mantienen visibles a lo largo de todo el proceso. Por esta raz3n, y otras apuntadas en el cap3tulo 24, la barajadura aleatoria de las partes de una curva de Koch es un m3todo de alcance limitado.

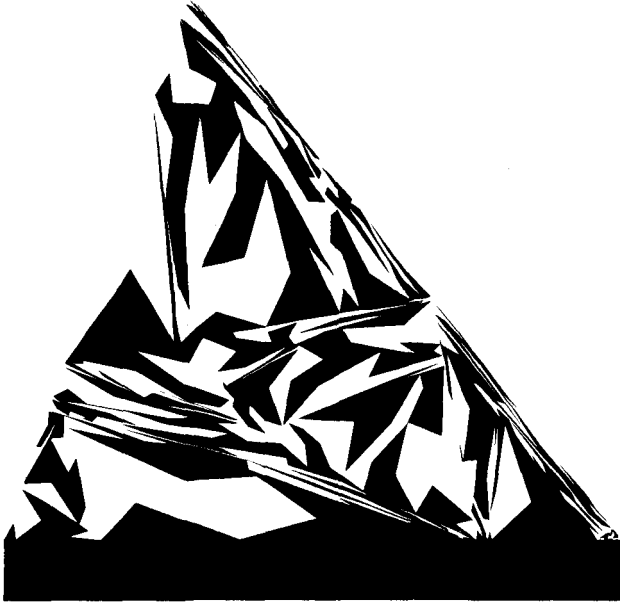
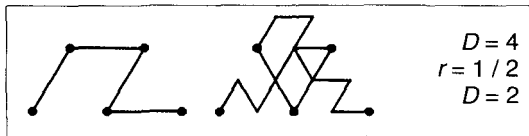


FIG. 326. *Curva aleatoria de Peano (dimension D=2)*

El siguiente generador, aplicado al iniciador [0,1], proporciona una manera de barrer un triángulo



La posición del generador depende de la paridad del segmento del terágono. Sobre los lados impares, el generador (directo) se coloca a la derecha. Y sobre los pares, el generador en su forma inversa (lámina 103) se coloca a la izquierda. El método de aleatorización seguido aquí consiste en escoger al azar estos puntos focales. En este ejemplo, la distribución es simétrica con respecto al punto medio. Cada subtriángulo se subdivide luego en cuatro, independientemente de sus vecinos e indefinidamente.

Para facilitar el seguimiento del terágono, cada intervalo se sustituye por dos, añadiendo como punto extremo el centro de dicho intervalo.



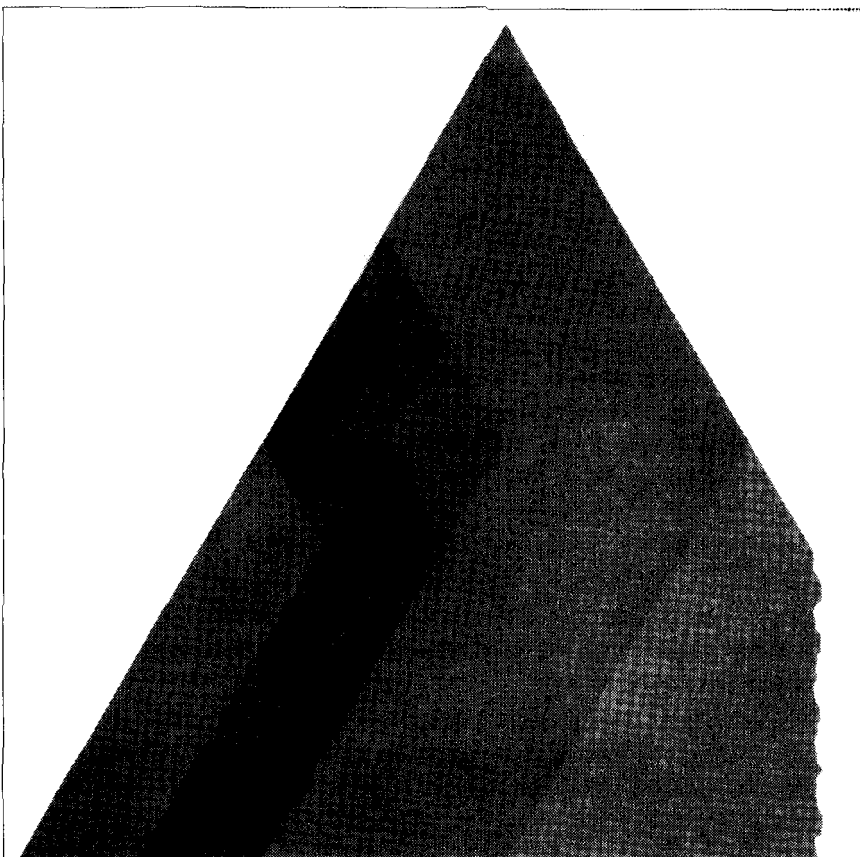


FIG. 327. *Triángulo y curva garabato*

Aquí se ilustra el garabato más simple mediante una superposición de varios diagramas. El orden de dichas figuras es el indicado por las distintas tonalidades de gris, de la más clara a la más oscura. La ilustración empieza con el triángulo gris claro y acaba con una curva en negro. La escala de las etapas 6 a 10 es mayor que la de las etapas 0 a 5. En el texto se describen los distintos pasos sucesivos.

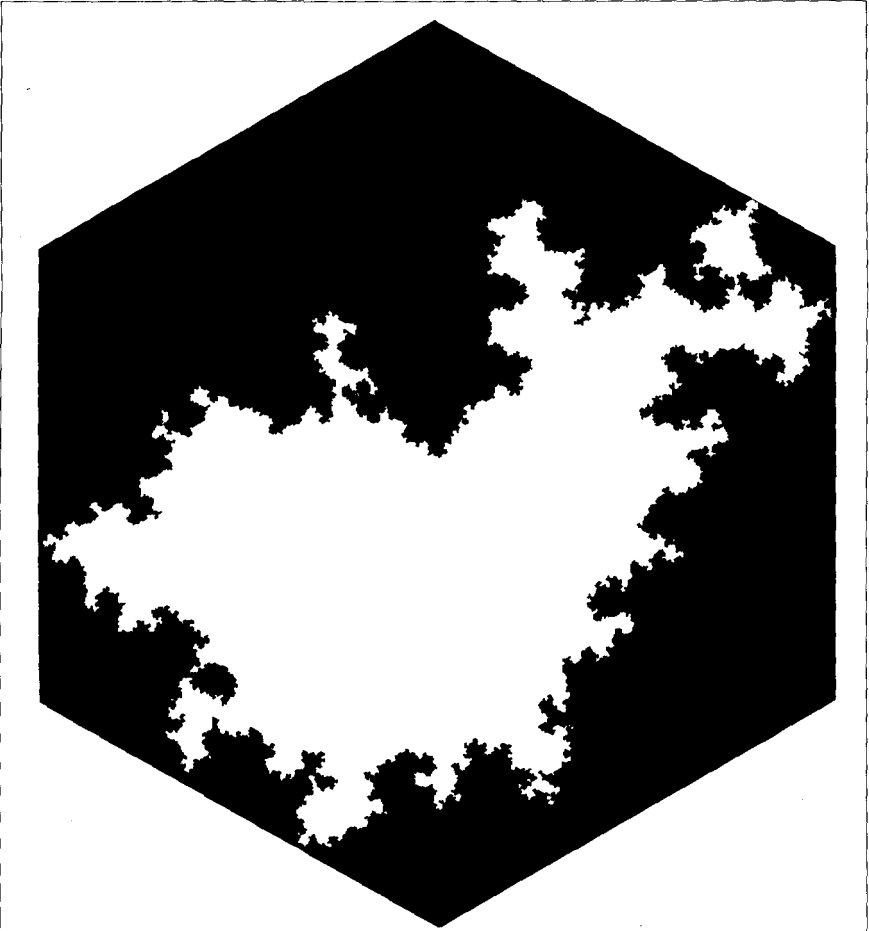


FIG. 328. *Una costa garabato hexagonal*

Esta lámina enlaza seis garabatos formando un circuito autoevitante. La dimensión es muy próxima a  $D=4/3$ . Este valor también se da en gran número de casos autoevitantes, por ejemplo en la frontera del casco browniano de la lámina 343, cuyo parecido con un garabato hexagonal es particularmente digno de mención.

Aquí crea Dios los círculos, las ondás y los fractales



FIGS. C1, C3 y C16. *Tres grandes artistas del pasado ilustran la naturaleza, y con ello llevan al lector a la puerta de los fractales*

Esta sección es un libro-dentro-del-libro y su objeto es que, si «ver es creer», ver en color puede producir una convicción más intensa aún, por muy torpes que fueran nuestros primeros esfuerzos con este medio. De ahí que los pies de figura de esta sección sean en cierto modo independientes del resto.

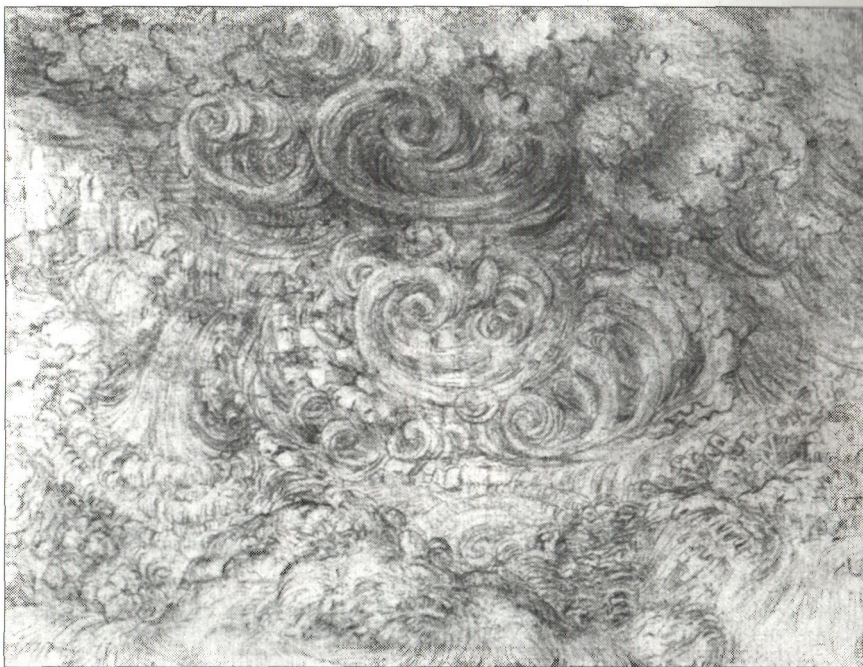
La Geometría Fractal de la Naturaleza mezcla las matemáticas y la ciencia necesarias para tratar ciertas clases amplias y generales de formas naturales. Aunque muchas de estas formas son bastante comunes, los autores del pasado rara vez hablan de los problemas que plantean. Las láminas C1, C3 y C16 son vivos ejemplos de los asuntos tratados por la geometría fractal.

FIG. C1. LA PORTADA DE UNA *BIBLE MORALISÉE*. El periodo de la historia europea occidental centrado en 1200, aunque estancado en cuanto a ciencia y filosofía, registró una actividad exuberante en ingeniería. En una época que levantó las grandes catedrales góticas, ser maestro albañil era una vocación superior. Así, las *Bibles Moralisées illustrées* de esa época (Biblias con «historietas») a menudo representan al Señor sosteniendo compases de albañil (Friedman, 1974). La lámina C1 es la portada de una famosa *Bible Moralisée*, escrita entre 1220 y 1250, en el dialecto francés hablado en la Champagne oriental. Se encuentra ahora en la Biblioteca Nacional Austriaca de Viena (código 2554), con cuya autorización se ha reproducido aquí. La leyenda reza:

*Ici crie dex ciel et terre  
Soleil et lune et toz elemenz  
[Aquí crea Dios el cielo y la tierra  
el sol y la luna y todos los elementos]*

Percibimos tres clases de formas distintas en este mundo recién creado: círculos, ondas y unos «culebros». Los estudios de los círculos y las ondas se han aprovechado de una colosal inversión de esfuerzo humano, y constituyen los mismísimos cimientos de la ciencia. En comparación con ellos, esos «culebros» han permanecido prácticamente intactos. El objeto del presente libro es afrontar el reto de construir una geometría natural de ciertos «culebros» que se llamarán «fractales». Uno de los rasgos más atractivos de esta lámina es que pide al científico que «tome la medida del universo». Aplicar compases de puntas a los círculos o a las ondas es una tarea que había resultado fácil desde mucho tiempo atrás. Pero ¿qué ocurre cuando aplicamos el compás a los culebros de esta lámina ... o a las costas de la Tierra? El resultado es inesperado; se discute en el capítulo 5, y en capítulos posteriores exploramos sus consecuencias, guiando de ese modo al lector por una senda que se podría decir que atraviesa la ciencia.

FIG. C3. *EL DILUVIO*, DE LEONARDO DA VINCI. (De las Windsor Castle Collections. Reproducido por amabilidad de Su Majestad la Reina.) Uno de los muchos dibujos en los que Leonardo representó una corriente de agua por superposición de remolinos de muchos tamaños distintos. La ciencia no fue consciente de esta es-



estructura de remolinos hasta que fue parcialmente formalizada por Lewis F. Richardson en los años veinte, con su imagen «escalante» de la naturaleza de la turbulencia. Sin embargo, esta imagen derivó enseguida hacia una búsqueda de fórmulas, perdiendo con ello todo sus tintes geométricos, y resultando también de una eficacia limitada. La teoría expuesta en este libro permite el regreso de la geometría al estudio de la turbulencia, y muestra que muchos otros ámbitos de la ciencia son geoméricamente muy parecidos entre sí y pueden manejarse con técnicas afines.

**EL CONCEPTO DE FRACTAL.** Reuní algunas figuras geométricas cuya forma es muy irregular y fragmentada, y acuñé el término *fractal* para designarlas. Los fractales se caracterizan por la coexistencia de rasgos distintivos de todos los tamaños lineales imaginables, entre cero y un máximo, para el que pueden darse dos casos. Cuando el fractal está acotado, el tamaño máximo de los rasgos es del orden de magnitud del tamaño global del fractal. Cuando se dibuja una parte de un fractal no acotado en el interior de un cuadro de lado  $\Omega$ , los rasgos del dibujo tienen un tamaño máximo del orden de  $\Omega$ . En las láminas C5 a C15 se presentan ejemplos de fractales construidos matemáticamente. Los fractales protagonizan dos historias distintas, separadas en el tiempo por casi un siglo de diferencia, y entre estas dos épocas su papel cambió totalmente. En la primera etapa, algunos fractales (no los que ilustran esta sección) se diseñaron exprefeso para corroer los cimientos de la matemática predominante. *Todo el mundo* veía estos conjuntos como «monstruos». Mientras el resto de la matemática (*Sigue en pág. C16*)

### Fig. C5. Dragón fractal autocuadrado

Por rimbombante que resulte este diseño, el fondo negro se debe considerar como un ejemplo de arte minimalista en grado extremo. En efecto, la fórmula

$$\{z: \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(z)| = \infty, \text{ donde } f(z) = \lambda z(1-z)\},$$

es todo lo que hace falta para duplicar el fondo en cuestión con una precisión total y absoluta. Explicaré esta fórmula: una vez escogido el número complejo  $\lambda$  que determina la «función generatriz»  $f(z)$ , construimos  $f_2(z) = f(f(z))$ , luego  $f_3(z) = f(f_2(z))$ , esto es  $f_3(z) = f(f(f(z)))$ , y así sucesiva e indefinidamente.

El número complejo  $\lambda$  que da lugar a esta lámina es  $\sim 1,64 + 0,96i$ . Está claro que no ha sido escogido porque sí. La forma del dragón es muy sensible al valor de  $\lambda$ , pero una teoría especial desarrollada por mí (esbozada en el capítulo 19) permite elegir  $\lambda$  de modo que uno obtenga el dragón que desea de entre muchas y muy variadas posibilidades.

LAS «PIEDRAS». En cuanto al diseño que resalta sobre el fondo negro, está formado por 25 clases de «piedras», definidas cada una por

$$\{z: \lim_{n \rightarrow \infty} f_{25n}(z) = z_g\},$$

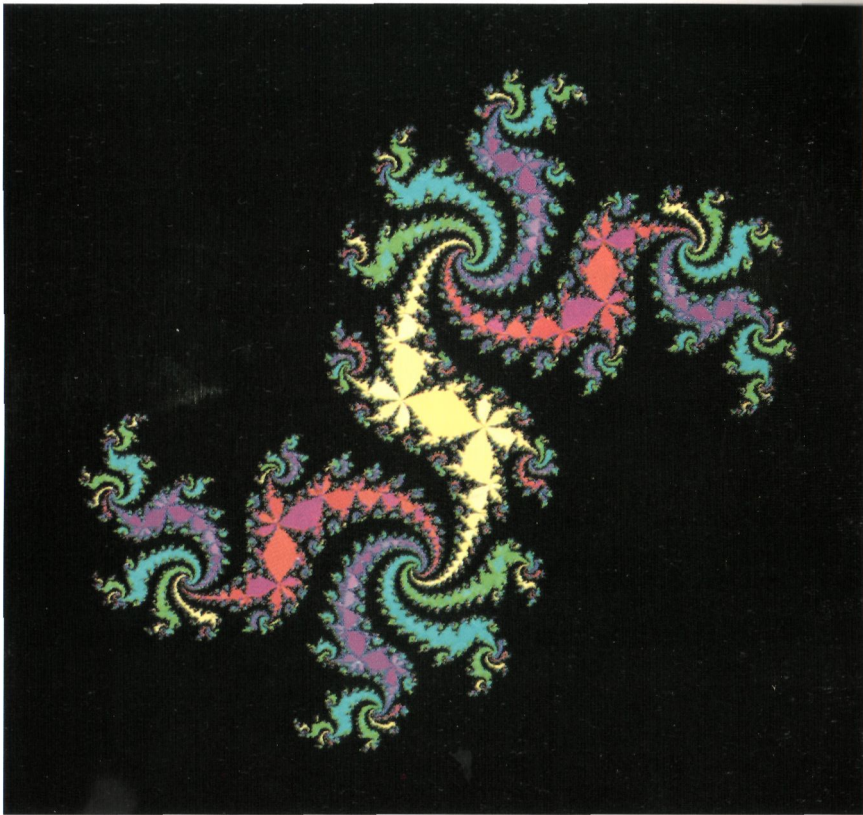
donde los 25 números complejos  $z_g$  son raíces de la ecuación  $f_{25}(z) = z$ , y además satisfacen la ecuación  $|(d/dz)f_{25}(z)| < 1$ .

Si se mira atentamente, se pueden ver 5 tonalidades distintas de rojo, 5 de azul, etc. Este esquema de coloreado se ha elegido así porque los 25 valores de  $z_g$  se ordenan en 5 «géneros», formados a su vez cada uno por 5 «especies». Asignamos un color a cada género y una tonalidad o intensidad a cada especie. Así, por ejemplo, las 5 especies de oro se extienden a lo largo del cuerpo principal dorado del dragón, y se reúnen en los talles de avispa de este cuerpo.

UNA CARA ANTES OCULTA DE LA MATEMÁTICA CLÁSICA. La fórmula de  $f(z)$  es tan breve y parece tan carente de interés (porque procede de un capítulo elemental del cálculo), que poco se esperaba de ella. Así pues, ver una figura de esta clase en la pantalla del ordenador produjo sorpresa y también una fuerte conmoción estética.

El análisis matemático clásico (que es la forma más avanzada del cálculo) había gastado una broma a todos aquellos que o lo amaban o lo odiaban. Se nos han revelado ahora dos caras muy distintas del análisis. La que se nos había estado mostrando durante siglos, y que se había convertido en su orgullo (o su maldición), era irremisiblemente austera. Pero yo demuestro que el análisis tiene también una cara oculta que a menudo es sorprendentemente atractiva y alegre.

El respeto y la admiración por los grandes maestros del análisis austero hacen que uno se apresure a decir que la complicación extrema del perfil de este terciopelo negro *no* fue una sorpresa para el puñado de matemáticos (al que yo tuve la suerte de pertenecer) que estaban al tanto de los «antiguos» trabajos (la mayoría en torno a 1920) de Pierre Fatou y Gaston Julia. Pero la complicación de esas fi-



guras había contribuido a aumentar la severidad del análisis, y nada hacía esperar que tantos espectadores pudieran percibir como bella esta complicación.

ALGORITMOS QUE CONTIENEN UN BUCLE. Los descubrimientos de Fatou y Julia confirman, en efecto, que con una herramienta muy simple (considérese un cincel de escultor) se puede crear un artificio muy complejo, siempre y cuando la herramienta pueda aplicarse repetidamente. Aquí la herramienta es la función  $f(z)$  con la que se generan las funciones  $f_n(z)$ .

Por tanto, no tratamos aquí de una operación que se realiza una sola vez, y que se detiene cuando se ha acabado, sino de una operación que se realiza, luego se repite, etc. Esas funciones iteradas son ejemplos de rutinas o bucles, que a cada paso pueden iniciar una nueva tarea.

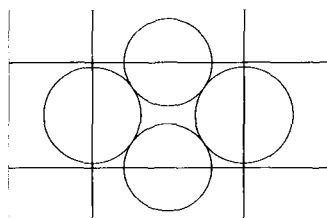
Los programas con bucles más simples son lineales, y eso significa que van añadiendo detalles que no son más que el eco de la forma global a una escala menor. Las figuras resultantes se denominan *autosemejantes*.

En este caso, por el contrario, los detalles se van deformando a medida que se van haciendo más pequeños, porque la función  $f(z)$  no es lineal. Como esta función es cuadrática, el contorno del fondo de terciopelo lo denominaremos *autocuadrático* en el capítulo 19.

FIG. C7. *Parcheado fractal autoinverso*

Este colgante está parcheado con seis clases distintas de tela transparente. Se han cortado una multitud de discos abiertos (esto es, de interiores de círculos) de telas de 6 colores diferentes, y se han cosido sobre un forro transparente, aislados o superpuestos. La mayoría de estos discos están demasiado lejos o son demasiado pequeños para ser visibles.

Esta figura es una variante más intrincada de la que se discute en el capítulo 18. Su construcción empieza por escoger un generador, que en este caso es una colección de 4 círculos y 4 rectas, dispuestos del modo siguiente



Por varias razones, expuestas en el capítulo 18, tiene mucho interés la figura  $L$ , que es la menor figura que permanece totalmente invariante si se realiza una transformación de simetría con respecto a una cualquiera de las rectas o una inversión con respecto a cualquiera de las circunferencias generatrices.

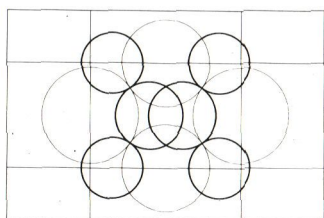
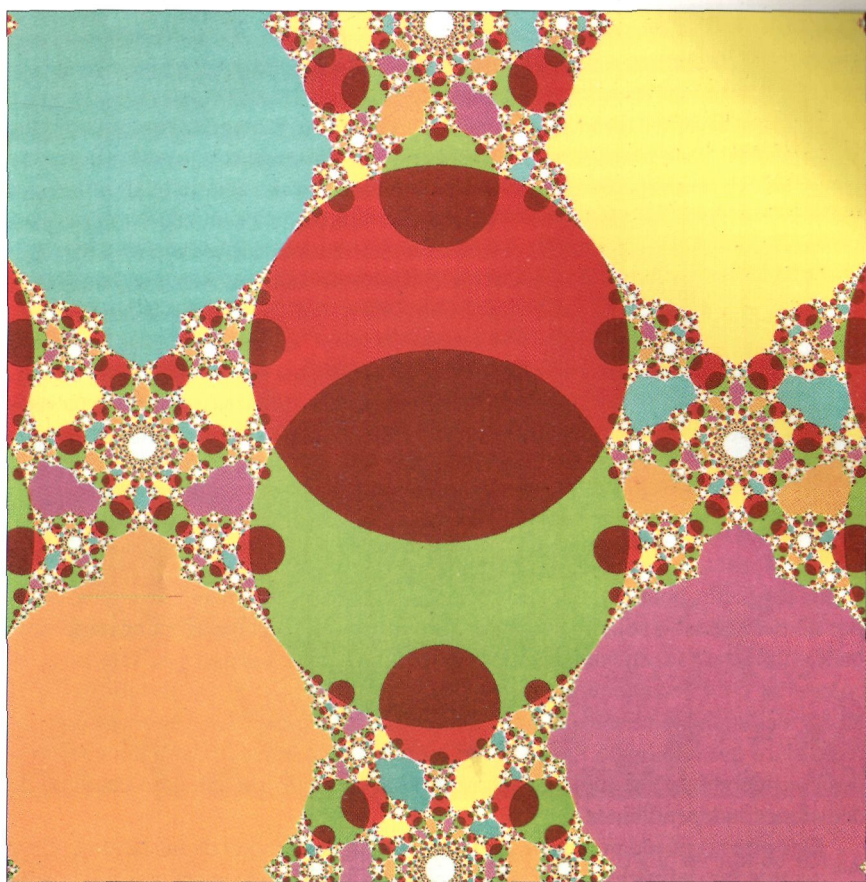
En teoría, la diferencia entre los conceptos de recta y circunferencia no es importante aquí. En efecto, si las rectas y circunferencias anteriores se someten a una inversión con respecto a un punto que no esté sobre ninguna de ellas, se obtienen 8 circunferencias. Por tanto, en vez de decir que  $L$  es «autoinversa y autosimétrica», basta con decir que es «autoinversa».

Pero el hecho de que en esta figura intervengan 4 simetrías respecto a rectas que forman un rectángulo tiene sus ventajas, y se incorporó para garantizar la periodicidad de este  $L$ . El primer periodo está limitado por nuestro rectángulo, y los otros se obtienen por traslaciones paralelas a los ejes.

El problema de determinar la estructura de  $L$  es antiguo y famoso, y yo le di la solución práctica que se ilustra aquí. Esta nueva solución muestra que  $L$  está formado por los puntos en que los parches de tela discoidales están en contacto con las circunferencias que los delimitan. Los puntos interiores de un disco nunca se cuentan como parte de  $L$  aunque estén en el contorno de otro disco distinto, tanto si es del mismo color como si no.

Pasemos ahora a explicar cómo se han escogido estos parches discoidales. Partiendo de la figura generatriz, se dibujan 6 circunferencias, que llamaremos  $\Gamma$ -circunferencias, ortogonales cada una de ellas a 3 de las 8 componentes de la figura generatriz. Hay muchas otras circunferencias ortogonales a 3 de las 8 componentes del generador, pero sólo necesitamos estas 6 como  $\Gamma$ -circunferencias.





Cada  $\Gamma$ -circunferencia rodea un disco al que se asigna un color de tela determinado, y se emplea el mismo color para cada disco obtenido por transformación de un  $\Gamma$ -disco por inversión con respecto a las 4 circunferencias, o por simetría con respecto a las 4 rectas del generador. Los discos del «medallón» central se solapan a todos los demás, pero ninguno se solapa a cualquiera de sus inversos. Los discos de las esquinas, por el contrario, se solapan con algunos de sus inversos.

FIG. C9. *Salida de un planeta sobre una colina Labelgraph*  
(*Recuerdo de una misión espacial que nunca existió*)

Las láminas C9 a C15 quizá parezcan «realistas». Y algunas son, a su modo, obras de arte. Sin embargo, estas láminas *no son fotografías* y *no pretendían ser artísticas*. Además *no* son ejemplos de los falsos paisajes que pueden obtenerse por tratamiento de paisajes reales, del mismo modo que se sintetiza un producto químico por transformación de otros productos. Estas láminas son *exactamente tan artificiales* como las láminas C5 y C7. Son los equivalentes fractales de la síntesis «completa» de la hemoglobina a partir de los átomos que la componen, tiempo (muchísimo) y energía.

La lámina C9 combina la puesta en práctica de dos de mis teorías de las superficies de los planetas, presentadas por primera vez en Mandelbrot (1975w) sobre la base de las láminas 381 y 383, y estudiadas en los capítulos 27 y 28 de esta obra. Varias características de la presente lámina *no consiguen* ajustarse a la realidad, pero los capítulos en cuestión muestran cómo se pueden resolver algunos de estos defectos.

Un planeta en el que el agua se concentra en océanos y nieve (por ejemplo en los casquetes polares), mientras el cielo carece absolutamente de nubes, es — por no decir más— sólo una primera aproximación. El color se ha añadido después empleando las mejores técnicas disponibles actualmente, y la selección de colores es completamente ajena a mis teorías. Un primer algoritmo mostraba la altura mediante los mismos colores que en el *The Times Atlas*. Entonces nos pareció claro que una ligera mejora en el esquema de coloreado daría unos resultados considerablemente mejores, sin necesidad de recurrir a una gran cantidad de decisiones independientes.

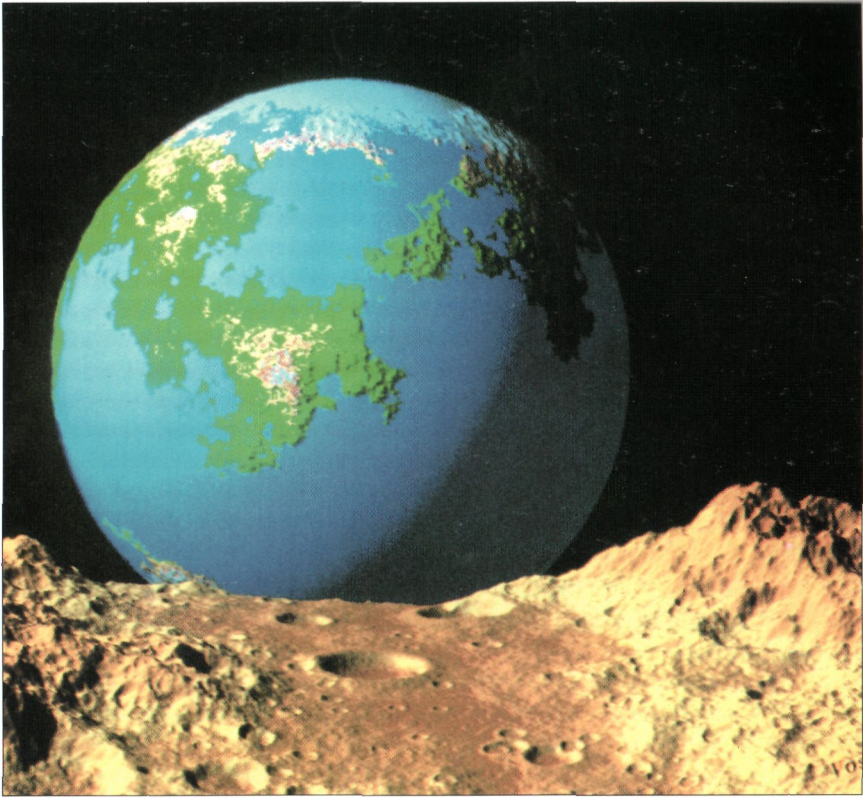
Este arte no puede pretender ser tan minimalista como el de las láminas C5 y C7, ya que las definiciones de los dos planetas no se pueden reducir a una sola línea sin una artificialidad excesiva.

Una segunda razón por la que este arte no se puede llamar minimalista es que la realización del sombreado implica un gran ingenio; harían falta gruesos volúmenes para explicar cada detalle. Además, el algoritmo depende mucho de las herramientas disponibles, por lo que, para duplicar este trabajo, uno tendría que usar exactamente el mismo equipo informático.

Como una versión anterior de esta «salida de planeta» apareció en la sobrecubierta del *Fractals* de 1977, y algunas de las láminas de este último representaban también paisajes fractales, éstos han sido objeto de múltiples imitaciones. La baja calidad relativa de las mismas es una prueba más de la no minimalidad de este arte.

No obstante, los principales rasgos de ambos planetas pueden caracterizarse inequívocamente por un número muy pequeño de propiedades fundamentales de continuidad e invariancia, que exploraremos en los siguientes pies de figura.

DEDICATORIA. El nombre de Colina de Labelgraph es en homenaje a «lbl-graph», un paquete de programas gráficos un tanto caprichosos y a menudo muy



maleducados que surgió del trabajo de Alex Hurwitz y Jack Wright de IBM en Los Ángeles. De 1974 a 1981 embelleció el T. J. Watson Research Center, respondía si se lo trataba con consideración, y (con su vivo sucesor, «yogui») hizo posible la ilustración de mis ensayos. R.I.P.

## FIG. C11. *Colinas gaussianas que nunca existieron*

El nombre de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) aparece en casi todos los capítulos de la matemática y de la física, y eso le convierte en el primero (*princeps*) de los matemáticos (incluidos los físicos) de su tiempo. Pero el calificativo de *gaussianas* aplicado a estas colinas se debe a una distribución de probabilidad que se le atribuye indebidamente. Se trata de la distribución con gráfica «en forma de campana» u «ojiva de Galton». En las láminas C9 a C15, esta distribución es la que regula la diferencia de altura entre dos puntos dados cualesquiera del mapa, por lo menos después de realizar una transformación conveniente.

En su trabajo, muchos estudiosos recurren a la distribución gaussiana sin darse cuenta de que esta elección debe justificarse. Ya sea porque esta es la única distribución que conocen a fondo y que les merece confianza, o porque piensan que explica la distribución de cualquier magnitud aleatoria que se dé en la naturaleza, desde las alturas de los reclutas a los errores en las observaciones astronómicas.

En realidad, esta última creencia carece totalmente de fundamento. Este ensayo contiene muchos ejemplos que demuestran que el mundo está lleno de fenómenos enormemente no gaussianos. Por tanto, el recurso a la distribución gaussiana requiere otra justificación menos discutible. En mi opinión, las únicas justificaciones válidas se basan en el hecho de que la gaussiana es la única distribución que posee ciertas propiedades de invariancia por cambio de escala, y a pesar de ello conduce a relieves que varían con continuidad. La conclusión es que los relieves más simples posibles se rigen por una «función browniana», o al menos por una variante de la misma que yo llamé «función browniana fraccionaria».

El único parámetro que dejan indeterminado estos desiderata, y que por tanto se debe escoger por otras razones, se llama *dimensión fractal* del relieve, y se denota por  $D$ .

Cuando  $D$  alcanza su valor mínimo  $D = 2$ , el relieve es sumamente liso. A medida que  $D$  aumenta, el relieve se hace cada vez más «ondulado» y empieza a parecerse a las montañas altas de la Tierra. Al final se hace demasiado ondulado para ser parecido a las montañas, y acaba por casi llenar el espacio.

Una característica que define la función browniana es que cada corte vertical es una función browniana ordinaria, real de variable real.

Para cada paisaje, excepto el del planeta distante de la lámina C9, la altitud se calcula en función de las latitudes y longitudes dispuestas según una parrilla cuadrada. Luego se introduce una apariencia de redondez enrollando la base plana de este relieve alrededor de un cilindro cuyo eje va de izquierda a derecha. El ordenador está programado para simular la iluminación por un foco que está situado  $60^\circ$  a la izquierda.

Aunque parezca mentira, varios observadores, después de comentar brevemente que una caracterización del relieve que se base sólo en criterios de invariancia y continuidad es ingeniosa y eficiente, proceden a criticar largamente



este enfoque del problema, pues sus criterios son demasiado abstractos y no se han deducido de «modelos» explícitos ni de mecanismos generadores, ni a priori ni a posteriori.

Tengo poco interés en replicar (torpemente) criticando las teorías concretas del relieve que constituyen la «corriente principal» por su incapacidad de presentar falsos paisajes que se aproximen tanto al realismo como los debidos a mis «teorías» abstractas. Creo que es mejor recordar que muchas de las más bellas teorías físicas empezaron con primorosas combinaciones de pistones, cuerdas y poleas, sólo para acabar (varias generaciones más tarde) en su esqueleto de principios de invariancia. Visto así, el trabajo que condujo a las presentes ilustraciones, y otros casos que se estudian en esta obra, parten de la línea de llegada. ¿Es esta una razón suficiente para ponerse triste?

### FIG. C13. *Colinas no gaussianas que nunca existieron*

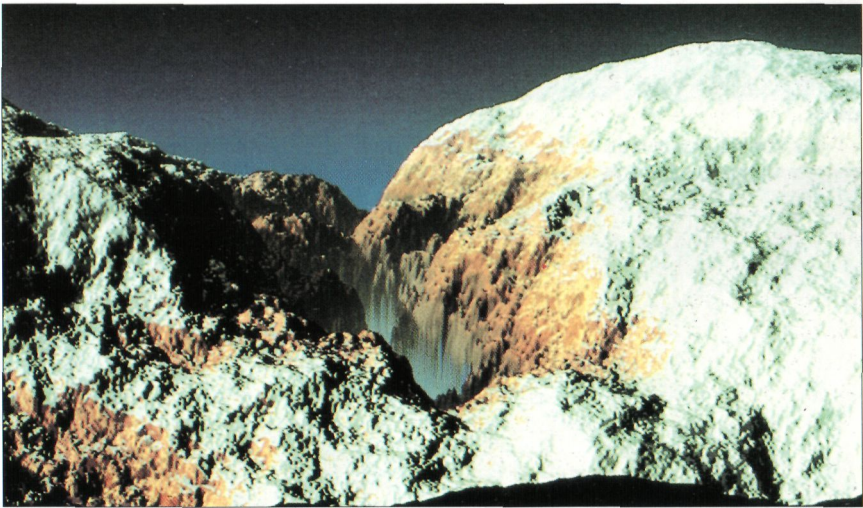
Los pies de todos los paisajes gaussianos de esta obra, incluidos los del capítulo 28, se han allanado para formar un nivel de referencia fijado arbitrariamente. Este procedimiento se usó primero para generar islas. Y en los paisajes montañosos, originariamente pretendía ser una ayuda para que el ojo distinguiera entre superficies distintas.

Me explicaré un poco más. Cuando preparábamos el ensayo de 1975, no queríamos desperdiciar datos y representamos gráficamente todo lo que teníamos, pero el resultado fue penoso: a nuestros ojos les resultaba sorprendentemente difícil distinguir entre paisajes que sabíamos estaban caracterizados por valores de  $D$  significativamente distintos. Luego, el deseo de representar las costas de las islas junto con el relieve nos llevó a introducir una superficie plana de referencia en la misma imagen, y de repente las diferencias en las  $D$  se hicieron clarísimas. Deberíamos haber recordado que, para apreciar el movimiento, se necesita un patrón de reposo. Y lo mismo ocurre con la rugosidad.

Ahora nos encontramos con que, cuando se aplicaba el mismo procedimiento a los valles y también a los montes, tenía además un segundo efecto de lo más afortunado, aunque no fuera intencionado. Al crear los planos (que recuerdan lagos, montones de nieve o aluviones) se ocultan los fondos de los valles, lo que nos obliga a concentrarnos en las montañas altas, donde el modelo resulta mucho más potente de lo esperado. Si hubiéramos mirado demasiado pronto al relieve en su conjunto, nos habríamos llevado un fuerte desengaño, pues en los modelos gaussianos los fondos de los valles son tan «poco lisos» como las cimas de los montes, y en cambio los valles reales lo son *mucho* más. Por el momento, no me gusta ninguna de las explicaciones de esta diferencia,

Pero hay maneras de «arreglar» el modelo gaussiano de las montañas para dar mejor cuenta de los valles. El arreglo más simple supone que las únicas diferencias entre las distintas partes del relieve tienen que ver sólo con la escala vertical, siendo el valor de  $D$  el mismo en todas partes. Para justificar esta suposición, reduzcamos la escala vertical de las sierras gaussianas de la lámina C11. ¡Como por milagro se convierten en terreno ondulado! Y viceversa, consideremos cualquier superficie cuasi plana, como la de una pista de aterrizaje, y aumentemos sus asperezas. En primera aproximación, el resultado es muy a menudo parecido a las colinas gaussianas de la lámina C11, con una dimensión que depende de las circunstancias concretas. No hay razones para pensar que este resultado no es válido para los fondos de los valles. Por tanto, uno no puede dejar de preguntarse por las consecuencias de suponer que, si  $D$  es válida para las cimas de las montañas, también vale en primera aproximación para los fondos de los valles.

Una idea más concreta consiste en restringir la validez de la invariancia por cambio de escala a dominios pequeños, con la misma dimensión en todas partes, mientras la escala vertical aumenta con la altitud sobre el fondo del valle. Con este objeto en mente, en el grabado de la parte superior de esta lámina y en la co-



lina Labelgraph de la lámina C9, las altitudes sobre el nivel del lago o sobre el fondo del valle se han elevado al cubo.

Cuando, por el contrario, la escala vertical se hace *disminuir* con la altitud sobre el fondo (elevándola a una potencia inferior a 1), se obtiene la meseta y el cañón de la parte inferior de esta lámina.

Aunque el truco pueda ser tosco, es sorprendentemente efectivo.

FIG. C15. *Islas fractales que nunca existieron vistas desde el cént*

El algoritmo usado en la parte inferior de la lámina C9, y en las láminas C11 a C15, se basa en métodos numéricos de Fourier, y por tanto da una superficie lisa periódica, en tanto que por definición una superficie fractal es sumamente rugosa. Uno puede imaginar, sin embargo, que estamos inspeccionando nuestras montañas mediante una luz de longitud de onda igual a las celdas de la parrilla. Bajo esa luz, todos los detalles más finos resultan totalmente invisibles.

Para obtener islas centramos el relieve alrededor de un máximo y no representamos las alturas inferiores a cierto nivel de referencia que tomamos como 0.

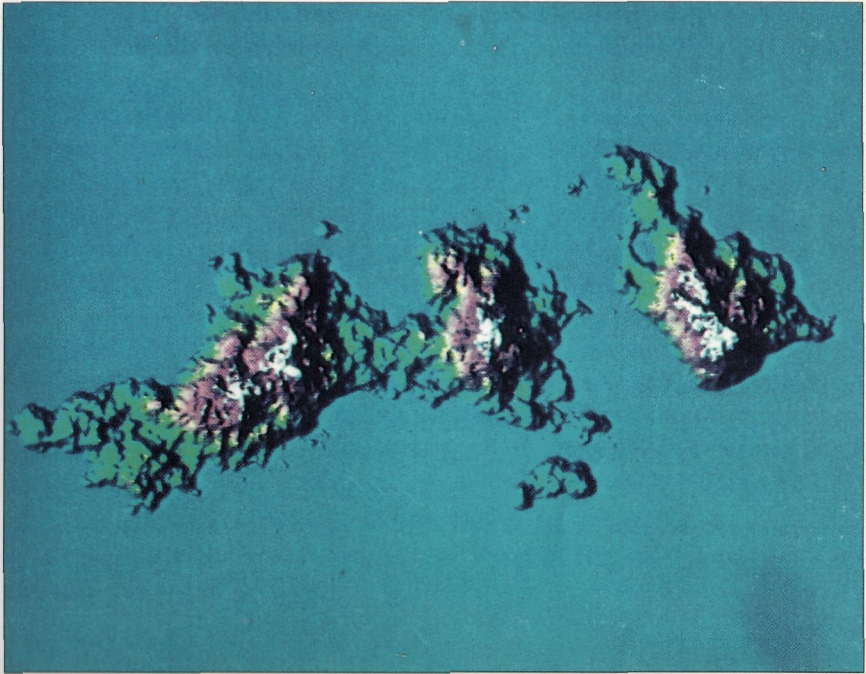
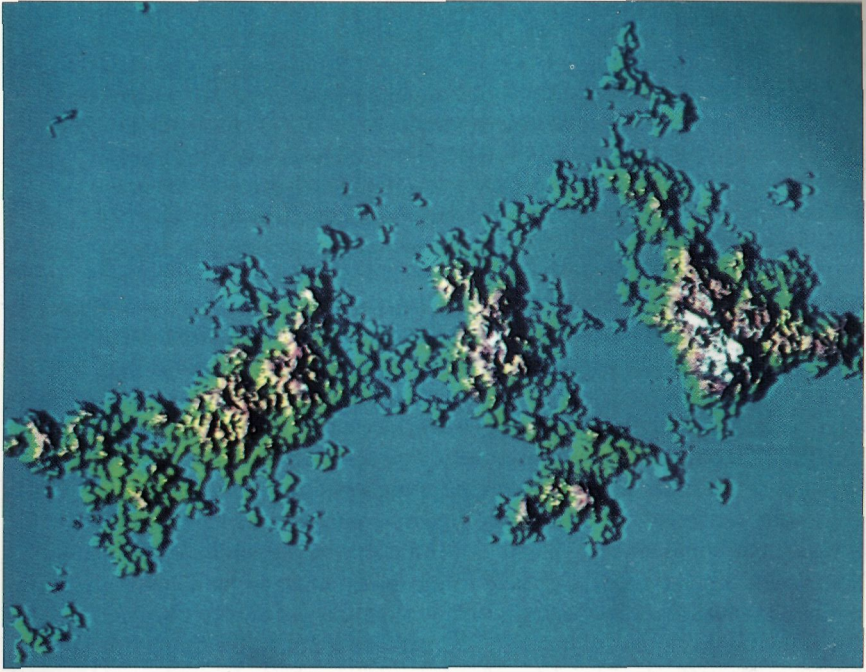
El archipiélago de arriba corresponde a un relieve browniano ordinario. Es un mal modelo de Tierra, pues claramente es demasiado irregular en sus detalles. El ajuste es malo porque una dimensión fractal de superficie  $D = 5/2$  y una dimensión de costa  $D = 3/2$  son demasiado grandes.

En el archipiélago de abajo, la función browniana ordinaria se ha sustituido por una función browniana fraccionaria y de dimensión  $D = 2,200$ , y la costa tiene la dimensión razonable  $D = 1,200$ . Las crestas claramente visibles en la figura son totalmente compatibles con el hecho de que fuera generada por medio de un mecanismo isótropo.

El parecido con Hawai es mayor que el que nos merecíamos, pues no hay razones para pensar que el modelo tenga que ser válido para archipiélagos volcánicos.

La forma observada de las costas está muy influida por cuán apretadamente llenan el dibujo. Esta faceta de la forma *no* está totalmente determinada por  $D$ , pues las láminas C11 y C15 se refieren a una región próxima a un mínimo o a un máximo, y el nivel de referencia tiene un papel importantísimo.

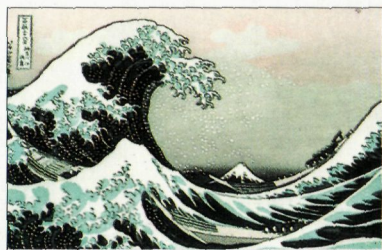




se consideraba un coto potencialmente prometedor para los físicos, a la caza de nuevos útiles, *todos* estaban de acuerdo en que, sin ningún miedo, se podía considerar esos monstruos totalmente irrelevantes en la descripción de la naturaleza. En cincuenta años no se creó casi ninguna variante de los mismos. La inversión de papeles comenzó cuando empecé a descubrir que, uno tras otro, esos monstruos podían servir como herramienta conceptual central para responder a alguna vieja pregunta que el hombre se había estado planteando acerca de la forma de su mundo.

**EL PAPEL DE LOS GRÁFICOS.** Los gráficos por ordenador tuvieron un papel central en la *aceptación* de la geometría fractal, aunque dicho papel sólo fuera marginal en su gestación. Esto es, dada la fascinación que actualmente ejercen los fractales sobre los practicantes del ordenador, uno se siente tentado de atribuir la aparición de la nueva geometría a la disponibilidad de esta nueva herramienta. En realidad, formulé la teoría de los fractales cuando los gráficos por ordenador estaban en mantillas. Sin embargo, dejé que su desarrollo se inclinara hacia temas que se prestaran a ilustraciones que ayudaran a la intuición.

**COMPOSICIÓN PICTÓRICA CLÁSICA.** Examínense ahora de nuevo las láminas C1 y C3. Aquí, como en casi cualquier otro cuadro «compuesto» clásicamente, es sorprendentemente fácil identificar al menos un «rasgo» para casi cada escala entre el tamaño total del cuadro y un corte interno por debajo del cual los detalles se hacen invisibles. Así pues, la propiedad escalante que caracteriza los fractales no sólo está presente en la naturaleza, sino también en algunas de las creaciones artísticas más cuidadas del hombre.



**FIG. C16.** *LA GRAN OLA*, DE HOKUSAI. Katsushika Hokusai (1760-1849) fue un pintor y grabador de extraordinario talento y versatilidad, un gigante desde cualquier punto de vista. Los remolinos y espirales de toda clase le fascinaban, como lo demuestra uno de sus grabados que alcanzó tanta fama que bastará con una reproducción en tamaño reducido.

El lugar de este capítulo en este ensayo responde a un compromiso. Le correspondería estar en la parte siguiente, pero parte de él es un requisito previo al capítulo 26.

### *Los papeles del movimiento Browniano*

Como vimos en el capítulo 2, Jean Perrin tuvo la brillante idea de comparar el movimiento browniano con las curvas continuas y no diferenciables. Con ello, hacia 1920, inspiró en el joven Norbert Wiener la definición y el estudio de una realización matemática conocida como *proceso de Wiener*. Mucho después se supo que el mismo proceso había sido considerado en detalle, aunque sin rigor, por Bachelier (1900, capítulos 37 y 39).

Extrañamente, pues es extraordinariamente importante en otros campos, el movimiento browniano no encuentra nuevas aplicaciones en este ensayo. Algunas veces nos ayuda a bosquejar un problema, pero aun así el siguiente estadio de la investigación lo sustituye por otro proceso distinto. Es sorprendente, sin embargo, lo lejos que se puede llegar en muchos casos mediante simples modificaciones del movimiento browniano, siempre y cuando dichas modificaciones sean escalantes.

Por esta y otras razones, los otros fractales aleatorios no acaban de captarse por completo sin una comprensión completa de las propiedades concretas de este prototipo. Sin embargo, los miles de páginas dedicados al tema o bien desdeñan o bien pasan por alto los aspectos que se tratan en este capítulo. Si al lector se le hace duro seguir adelante, puede —como siempre— saltarse la sección o pasar al capítulo siguiente.

## *Fractales brownianos: función y trayectoria*

Desgraciadamente, la expresión *movimiento browniano* es ambigua. Para empezar, puede significar la *gráfica* de  $B(t)$  como *función* de  $t$ . Si  $B(t)$  es la ordenada de un punto del plano, la gráfica es una curva plana como la de la lámina 340. Si  $B(t)$  es un punto del espacio  $E$ -dimensional, la gráfica es una curva en un espacio  $(E + 1)$ -dimensional (donde la coordenada  $t$  se añade a las  $E$  coordenadas de  $B$ ). En muchos casos, sin embargo, sólo nos interesa la curva en el espacio  $E$ -dimensional que constituye la *trayectoria* del movimiento. Cuando la trayectoria se curva en instantes uniformemente separados, la función se puede deducir de la trayectoria y viceversa. Sin embargo, en un movimiento browniano continuo ambos aspectos no son equivalentes, por lo que emplear el mismo término para designarlos a ambos puede llevar a confusión.

Cuando haya peligro de ambigüedad, hablaré de *función browniana* o *trayectoria browniana*. La misma ambigüedad se presenta para las curvas de Koch, pero aquí es más patente a causa del término «movimiento».

En los capítulos 28 al 30, además, las funciones brownianas son de varias variables. Así, por ejemplo, uno de los modelos de relieve terrestre del capítulo 28 supone que la altura es una función browniana de la latitud y la longitud. Por tanto, a menudo hará falta precisar más la terminología. Cuando sea necesario hablaremos de funciones y trayectorias brownianas de la recta en la recta, de la recta en el espacio, del espacio en la recta, de la recta en el espacio  $E$ -dimensional, etc.

«CAMPOS» BROWNIANOS. «Campo aleatorio» es una expresión que está en boga (ver, por ejemplo, Adler, 1981) para referirse a una «función aleatoria de varias variables». No hay ninguna justificación para dicha expresión y habría que prohibirla antes de que arraigue. Según parece, es una mala traducción del ruso, □ como *automodelo* (cuya difusión pude detener a tiempo), que era una mala traducción del término ruso que significa autosemejante. ■

### *La trayectoria browniana plana, construida como una curva aleatoria de Peano con $N = 2$*

Las trayectorias brownianas arrojan nueva luz sobre las curvas de Peano, y son una variante aleatorizada de las mismas. Este método de construcción no fue identificado como tal por un grupo de estudiosos consultados por mí al azar, ni se cita como tal en muchos libros sobre el tema,

también consultados al azar. Sea como fuere, los matemáticos **esquivan** este método porque su ingrediente fundamental (una jerarquía de estratos con detalles cada vez más finos, controlada por una escala de tiempos diádica) no es intrínseco al resultado de la construcción. Por ello, según los matemáticos, este método es artificial, aunque por eso mismo encaja perfectamente en este ensayo.

El procedimiento parte de una curva de Peano cualquiera con  $N=2$  y  $r=1/\sqrt{2}$ . El truco consiste en relajar varias ligaduras en pasos sucesivos.

Los fractales intermedios, los «híbridos de Peano y Brown», son dignos de estudio por derecho propio, y los dejaremos para mejor ocasión.

DESPLAZAMIENTO TRANSVERSAL DEL PUNTO MEDIO. En las láminas 96 a 100, el estadio  $(k+1)$ -ésimo transforma el  $k$ -ésimo terágono desplazando transversalmente el punto medio de cada lado en  $|\Delta M|=(\sqrt{2})^{-k-1}$ , a la izquierda o a la derecha de acuerdo a unas reglas específicas, por ejemplo la paridad de  $k$ .

Denotemos ahora por  $\Delta P$ ,  $\Delta_1 P$  y  $\Delta_2 P$  los desplazamientos de una curva de Peano durante un lapso de tiempo  $\Delta t=t^{-k}$  y sus dos mitades  $\Delta t_1$  y  $\Delta t_2$ . Tenemos la identidad pitagórica:

$$|\Delta P|^2 = |\Delta_1 P|^2 + |\Delta_2 P|^2.$$

DIRECCIÓN DE DESPLAZAMIENTO ISÓTROPА. En una primera modificación de las reglas de cualquier curva de Peano, aleatorizamos las *direcciones* de desplazamiento. Una manera consiste en ir a la izquierda o a la derecha con igual probabilidad, con lo que se obtiene un «zigzag aleatorio». Otra manera distinta consiste en tomar un punto al azar (con densidad uniforme) sobre un círculo graduado en grados y leer el ángulo correspondiente. Este procedimiento define los desplazamientos como *isótropos*.

Ambas formas de aleatorización preservan la identidad pitagórica: los desplazamientos isótropos sobre subintervalos diádicos de un intervalo diádico son ortogonales.

LONGITUD DE DESPLAZAMIENTO ALEATORIA. Nuestra segunda modificación de las reglas de construcción no aleatorias consiste en hacer aleatoria la *longitud* de los desplazamientos. A partir de ahora  $2^{-k-1}$  no será el cuadrado de un  $|\Delta M|$  no aleatorio, sino la media cuadrática de un  $|\Delta M|$  aleatorio. Los desplazamientos  $\Delta P^*$  resultantes cumplirán:

$$\begin{aligned} \langle |\Delta_1 P^*|^2 \rangle + \langle |\Delta_2 P^*|^2 \rangle &= 1/4 \langle |\Delta P^*|^2 \rangle + \langle |\Delta M|^2 \rangle \\ \langle |\Delta_1 P^*|^2 + |\Delta_2 P^*|^2 \rangle &= 1/2 \langle |\Delta P^*|^2 \rangle + 2^{-k} \end{aligned}$$

INICIADOR ALEATORIO. El paso siguiente consiste en hacer que el propio iniciador sea aleatorio con una longitud cuadrática media igual a 1. Se sigue entonces necesariamente que  $\langle |\Delta P^*|^2 \rangle = 2^{-k-1}$ , con lo que tenemos la identidad pitagórica media

$$\langle |\Delta_1 P^*|^2 + |\Delta_2 P^*|^2 - |\Delta P^*|^2 \rangle = 0$$

Dicho de otro modo, los lados ortogonales *en sentido geométrico* han sido sustituidos por lados que los probabilistas llaman ortogonales *en sentido estadístico o no correlacionados*.

INCREMENTOS GAUSSIANOS. La curva de Peano aleatorizada se convierte en una trayectoria browniana  $B(t)$  cuando los desplazamientos de los puntos medios siguen una distribución gaussiana. □ En el plano, el cuadrado del módulo de esta variable sigue una distribución exponencial. Por tanto, una construcción directa elige  $U$  uniformemente en  $[0, 1]$  y toma  $|\Delta M| = [-2 \log_e U]^{1/2}$ . ■

GENERALIZACIÓN AL ESPACIO. La construcción final sigue teniendo sentido para  $E > 2$ .

LA DIMENSIÓN  $D=2$ . La identidad pitagórica media es una definición generalizada de la dimensión de semejanza. Se ajusta a la trayectoria browniana porque su dimensión de Hausdorff-Besicovitch también es igual a 2. Su conveniencia caso de que el desplazamiento del punto medio no sea gaussiano está aún por estudiar.

### *Redes fractales brownianas*

PUNTOS MÚLTIPLES. Aun en el caso de que la aleatorización se detenga después de la primera etapa descrita en la sección anterior, se produce una destrucción absoluta del orden exquisito que, a corto y largo plazo, hacía que las curvas de Peano no presentaran autointersecciones. Los terrágonos aleatorizados se cortan a sí mismos al cabo de unos cuantos pasos, y es casi seguro que la trayectoria límite se autointerseca constantemente.

HUECOS BROWNIANOS. Es bien sabido que, si se extrapola una trayectoria browniana para todos los valores de  $t$  entre  $-\infty$  y  $+\infty$ , entonces cubre el plano de un modo denso. Volveremos a obtener esta propiedad en esta sección. Sin embargo, la trayectoria trazada durante un lapso de tiempo unidad tiene su propia geometría, que es de lo más peculiar. (No recuerdo haber visto una descripción de la misma en ninguna parte.)

Para compensar, aparentemente, el hecho de que algunos puntos son visitados varias veces para  $t \in [0, 1]$ ,  $B(t)$  deja de pasar por otros puntos. Los puntos no visitados forman un conjunto abierto dividido en una parte exterior que contiene el punto del infinito y una infinidad de huecos brownianos disjuntos. El conjunto exterior y cada hueco están rodeados por curvas fractales que forman parte de la trayectoria browniana. Se trata, pues, de una red fractal. Tenemos ejemplos de la misma en las láminas 342 y 343.

□ En el capítulo 14 se describen redes de dimensión  $D$ , en las cuales el número de huecos de área  $U$  mayor que  $u$  es  $Nr(U > u) \propto u^{-D/E}$ . En un contexto aleatorio con  $D=E=2$ , una generalización formal de esa ley es  $P(u) = Pr(U > u) \propto u^{-1}$ . Sin embargo, esto no puede ser así, por cuanto  $\int_0^{\infty} Pr(U > u) du$  debe ser convergente. Mi conjetura es, por tanto, que  $Pr(U > u) \propto u^{-1} L(u)$ , siendo  $L(u)$  una función de variación lenta que decrece lo bastante rápido para que la integral anterior sea convergente. Debido a la necesidad de esta  $L(u)$  no constante, la dimensión  $D=2$  no se puede conseguir en una red autosemejante, igual que, como se demostraba en el capítulo 15, no se puede conseguir  $D=2$  en una curva simple autosemejante. ■

EL ÁREA DE LA RED BROWNIANA ES NULA. A pesar del valor  $D=2$  de su dimensión, una red browniana tiene área nula. Y lo mismo tiene que valer para los híbridos de Peano-Brown.

LA TRAYECTORIA SIN LÍMITES ES DENSA EN EL PLANO. Esta propiedad se debe al hecho, que demostraremos en una sección posterior en la que nos ocuparemos del conjunto de los cerros, de que la trayectoria sin límites «vuelve» con una frecuencia infinita sobre cualquier dominio plano dado  $D$ , como un disco, por ejemplo. Tomando  $D$  arbitrariamente pequeño y con centro en cualquier punto  $P$ , vemos que la trayectoria sin límites llega una infinidad de veces arbitrariamente cerca de cualquier punto del plano.

Sin embargo, como también veremos al estudiar los conjuntos de cerros, la probabilidad de que una trayectoria concreta pase *exactamente* por un punto dado es nula. Por tanto, es casi seguro que un punto dado *no es visitado* por la trayectoria browniana sin límites.

La parte de la trayectoria sin límites contenida en un dominio  $D$  se puede aproximar mentalmente por una infinidad numerable de redes limitadas independientes, distribuidas apropiadamente sobre  $D$ . El resultado nos recuerda una infinidad numerable de puntos distribuidos aleatoria e independientemente sobre  $[0, 1]$ . Como es bien sabido, el conjunto resultante es denso por doquier, pero su longitud es nula.

## Relación entre la masa y el radio

El cambio de escala por  $\sqrt{t}$  es una característica de muchos aspectos del movimiento browniano. Por ejemplo, la distancia recorrida en un tiempo  $t$ , medida en línea recta, es un múltiplo aleatorio de  $\sqrt{t}$ . Asimismo, el tiempo total de permanencia en un círculo de radio  $R$  alrededor de  $B(0)=0$  es un múltiplo aleatorio de  $R^2$ .

Ponderando los diferentes tramos de una trayectoria browniana con unas «masas» proporcionales al tiempo invertido en recorrerlas, se encuentra que, en el plano o en el espacio ( $E \geq 2$ ), la masa total contenida en un círculo de radio  $R$  es  $M(R) \propto R^2$ .

Formalmente, esta relación es precisamente la misma que en el caso de la curva de Koch estudiado en el capítulo 6 y en el del polvo de Cantor del capítulo 8. Es forzosamente la misma que en los casos clásicos de un intervalo, un disco o una esfera homogéneos.

## La trayectoria browniana «no tiene pliegues», sus incrementos son estacionarios

Al aleatorizar la curva de Peano se obtienen de propina más propiedades de las que se pretendían inicialmente. Fijémonos, de entrada, en que las curvas de Koch y de Peano no aleatorias presentan unos «pliegues» constantes en los instantes de tiempo de la forma  $N^{-k}$ . Por ejemplo, si dividimos en cuartos una tercera parte del contorno del copo de nieve, el ángulo formado por los cuartos 1 y 2 es distinto del formado por los cuartos 2 y 3. En consecuencia, es *imposible* confundir la mitad izquierda con la mitad central.

La trayectoria browniana, por el contrario, «no tiene pliegues». Dado un intervalo correspondiente a un lapso de tiempo  $t$ , no podemos adivinar cual es la posición de dicho lapso en el eje temporal. Los probabilistas dicen que la trayectoria browniana tiene «incrementos estacionarios».

Esta propiedad es notable, pues (a) es la base de una definición alternativa, independiente de la trama, que describimos más adelante en este mismo capítulo, y (b) las formas aleatorizadas análogas de las curvas y superficies fractales simples no presentan una propiedad similar.

## La trayectoria browniana es autosemejante

Un corolario de la ausencia de pliegues es una forma fuerte de autosemejanza estadística. Hagamos  $B(0)=0$  y tomemos dos números positivos



$h$  y  $h'$ . En un capítulo de la teoría de la probabilidad llamado **teoría** de la convergencia débil se demuestra que las funciones  $h^{-1/2}B(ht)$  y  $h'^{-1/2}B(h't)$  son estadísticamente idénticas. También, tomando  $t < \infty$  y  $h < 1$ , y variando  $t$  entre 0 y  $T$ , se tiene que  $h^{-1/2}B(ht)$  equivale a una porción de  $B(t)$  cambiado de escala. El hecho de que dicha porción sea estadísticamente idéntica al todo es una forma de autosemejanza.

La autosemejanza aplicada a los conjuntos aleatorios es menos restrictiva que el concepto introducido en el capítulo 5, pues no hace falta que las partes sean precisamente semejantes al todo. Basta con que las partes y el todo reducido por la semejanza tengan distribuciones idénticas.

Nótese que las curvas de Koch requieren razones de semejanza de la forma  $r = b^{-k}$ , siendo la base  $b$  un entero positivo. En cambio, en el caso de la trayectoria browniana vale cualquier  $r$ . Esta es una característica importante.

### *El conjunto de ceros browniano es autosemejante*

En el estudio de las funciones brownianas reviste especial importancia el estudio de los conjuntos antiimagen de un valor dado, o conjuntos en los que las funciones coordenadas  $X(t)$  e  $Y(t)$  toman valores constantes. Así, por ejemplo, se define el conjunto de ceros por aquellos instantes  $t$  en los que  $X(t) = 0$ .

Dichos conjuntos antiimagen son autosemejantes, y el hecho evidente de que son sumamente ralos se manifiesta en su dimensión fractal  $D = 1/2$ . Constituyen un caso especial de los polvos de Lévy, que estudiaremos en el capítulo 32.

### *Distribución de los huecos en un conjunto de ceros browniano*

Las longitudes de los huecos de un conjunto de ceros browniano satisfacen  $Pr(U > u) = u^{-D}$ , con  $D = 1/2$ . Esta relación juega un papel análogo a la ley  $Nr(U > u) = u^{-D}$  que ya conocemos, válida para los huecos de Cantor. No obstante, aquí  $Pr$  sustituye a  $Nr$ , y los escalones desaparecen debido a la aleatorización.

### *La función browniana es autoafín*

Por contra, las gráficas de  $X(t)$ ,  $Y(t)$  y de la función vectorial  $B(t)$  no son autosemejantes, sino sólo *autoafines*. Esto es, la curva comprendida

entre  $t=0$  y  $t=4$  puede ser descompuesta en  $M=4$  porciones obtenidas contrayendo la(s) coordenada(s) espacial(es) en una proporción  $r=1/2$ , y la coordenada temporal en proporción *distinta*  $r^2=1/M$ . Por tanto, la dimensión de semejanza no está definida para ninguna de las gráficas  $X(t)$ ,  $Y(t)$  o  $B(t)$ .

Es más, en los espacios afines no se pueden comparar las longitudes sobre el eje  $t$  con las distancias sobre los ejes  $X$  o  $Y$ . Por tanto, no podemos definir discos y, en consecuencia, la fórmula  $M(R) \propto R^D$  no tiene una análoga que pudiera servir para definir  $D$  en el caso de las funciones brownianas.

Por otro lado, si es extensible a ellas la dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Este ejemplo concuerda con lo que afirmábamos en los capítulos 5 y 6 de que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch nos ofrece el modo más general de caracterizar el contenido intuitivo de la dimensión fractal (¡y también el más pesado!). Para  $X(t)$  el valor de  $D$  es  $3/4$ , y para  $B(t)$  es 2.

□ BOSQUEJO DE DEMOSTRACIÓN. Durante un lapso de tiempo  $\Delta t$ ,  $\max X(t) - \min X(t)$  es del orden de  $\sqrt{\Delta t}$ . Si recubrimos el trozo de gráfica correspondiente con cuadrados de lado  $\Delta t$ , necesitaremos del orden de  $1/\sqrt{\Delta t}$  cuadrados. Por tanto, para recubrir toda la gráfica entre  $t=0$  y  $t=1$  harán falta del orden de  $(\Delta t)^{-3/2}$  cuadrados. Comparando este número con  $(\Delta t)^{-D}$  (capítulo 5), tenemos heurísticamente que  $D=3/2$ . ■

### *Las dimensiones fractales de las secciones*

El conjunto de ceros de la función browniana real de una variable real es una sección horizontal de una función browniana  $X(t)$ . Aplicando otra vez una regla enunciada en el capítulo 23, esperamos que la dimensión del conjunto de ceros sea  $3/2 - 1 = 1/2$ , cosa que ya sabemos. Otras aplicaciones de esta regla son de un valor heurístico extraordinario, como veremos a continuación. Sin embargo, hay excepciones a esta regla, y en especial en el caso de fractales no isótropos. Así, la intersección de una aplicación browniana de la recta en una recta vertical se reduce a un solo punto.

De modo análogo, la intersección de una recta con una trayectoria browniana plana debería ser  $2 - 1 = 1$ , y así sucede en efecto.

Dicho en forma más general, y exceptuando algunas configuraciones especiales, la regla estándar es: las codimensiones  $E - D$  se suman en las intersecciones. Por tanto, la codimensión de la intersección de  $k$  trayectorias brownianas planas es  $k \cdot 0 = 0$ . En particular, se espera que las autointersecciones de una trayectoria browniana formen un conjunto de dimen-

sión 2, y así ocurre. (Sin embargo, y al igual que sucede con la propia trayectoria browniana, los puntos múltiples no llenan el plano.)

La regla de adición de las codimensiones se puede emplear para razonar que (como ya dijimos más arriba) es casi seguro que el movimiento browniano no regresa al punto de partida  $B(0)=0$ , pero es casi seguro que vuelve una infinidad de veces al entorno de 0. Para dar mayor generalidad a estos argumentos y poder utilizarlos sin modificaciones en el capítulo 27, denotaremos por  $H$  la dimensión del conjunto de ceros browniano.

Los instantes en que  $B(t)$  regresa a 0 son aquellos en que, simultáneamente  $X(t)=0$  e  $Y(t)=0$ . Pertenecen por tanto a la intersección de los conjuntos de ceros de  $X(t)$  e  $Y(t)$ , los cuales son independientes entre sí. La codimensión de la intersección es  $1-2H$ , con  $H=1/2$ , con lo que su dimensión es  $D=0$ . De donde se sigue una clara indicación (¡la demostración completa es más complicada!) de que es casi seguro que  $B(t)$  nunca regresa a  $B(0)=0$ .

Consideremos, por otra parte, el conjunto de instantes en que  $B(t)$  regresa a un cuadrado de lado  $2\varepsilon$ , centrado en 0 y paralelo a los ejes. Esto es aproximadamente la intersección de los conjuntos en que  $t$  está a una distancia  $\varepsilon^{1/H}$  de un punto del conjunto de ceros de  $X(t)$ , o de  $Y(t)$ . Para cada uno de estos conjuntos, la masa en el lapso de tiempo  $[0, t]$  es  $\propto \varepsilon^{1/H} t^{1-H}$ , y la probabilidad de que el instante  $t$  esté contenido en este lapso es  $\propto \varepsilon^{1/H} t^{-H}$ . Por tanto, la probabilidad de que  $t$  esté contenido en la intersección de estos conjuntos es  $\propto \varepsilon^{2/H} t^{-2H}$ . Como  $H=1/2$ , tenemos  $\int_0^\infty t^{-2H} dt = \infty$ ; de donde, gracias a un teorema de Borel y Cantelli, se llega a que el número de regresos al cuadrado centrado en 0 es casi seguramente infinito. Aunque se podría decir también «apenas» infinito. Como consecuencia de ello, los huecos de una red browniana con límites se van llenando lentamente y con una desgana manifiesta.

### *Paseos aleatorios sobre celosías reducidas*

El movimiento browniano se puede generar también por medio de un paseo aleatorio sobre una celosía. Citamos aquí esta posibilidad, pero varias complicaciones nos obligan a posponer su discusión al capítulo 36.

Decimos que un punto  $P(t)=(X(t), Y(t))$  de  $R^2$  lleva a cabo un paseo aleatorio sobre una celosía si, en sucesivos instantes de tiempo separados por un intervalo  $\Delta t$ , se mueve por pasos de longitud  $|\Delta P|$  fija según direcciones escogidas al azar siguiendo una celosía dada.

Si la red está formada por los puntos del plano de coordenadas ente-

ras, las cantidades  $(x+y)/\sqrt{2}$  y  $(x-y)/\sqrt{2}$  cambian en  $\pm 1$  a cada paso, y se dice que cada una de ellas realiza un paseo aleatorio sobre la recta. Tenemos un ejemplo en la lámina 340. A gran escala, esto es, para  $\Delta t$  pequeño y  $|\Delta P| = \sqrt{\Delta t}$ , el paseo aleatorio es indistinguible del movimiento browniano.

### *Definiciones directas de $B(t)$ , sin trama*

Las definiciones anteriores del movimiento browniano parten, bien de una trama temporal, bien de una celosía espacio temporal, aunque estos «accesorios» no aparecen en el resultado final. De hecho, es posible caracterizar éste último sin recurrir a ellos.

La caracterización directa de Bachelier (1900) postula que, sobre una sucesión arbitraria de incrementos de tiempo  $\Delta t$  iguales, los vectores desplazamiento  $\Delta B(t)$  son independientes, isótropos y aleatorios, obedeciendo a una distribución gaussiana de probabilidad con

$$\langle \Delta B(t) \rangle = 0 \text{ y } \langle [\Delta B(t)]^2 \rangle = |\Delta t|.$$

Por tanto la raíz de la media cuadrática de  $\Delta B$  es  $\sqrt{|\Delta t|}$ . Esta definición es independiente del sistema de coordenadas, pues la proyección de  $\Delta B(t)$  sobre cualquier eje es una variable aleatoria escalar gaussiana, de media nula y varianza  $1/2 |\Delta t|$ .

La definición que prefieren los matemáticos va más allá y prescinde de la división del tiempo en intervalos iguales. Impone la isotropía de los movimientos entre dos instantes cualesquiera  $t$  y  $t_0 > t$ , la independencia del movimiento futuro con respecto a las posiciones ocupadas en el pasado y, finalmente, que el vector que va de  $B(t)$  a  $B(t_0)$ , dividido por  $\sqrt{|t_0 - t|}$ , tenga una densidad de probabilidad gaussiana reducida, para cualesquiera  $t$  y  $t_0$ .

### *Deriva y transición a $D = 1$*

El movimiento de una partícula coloidal en un río que fluye uniformemente o el de un electrón en un alambre conductor puede representarse por  $B(t) + \delta t$ . La trayectoria de esta función es indistinguible de la de  $B(t)$  cuando  $t < 1/\delta^2$ , y de la de  $\delta t$  cuando  $t > 1/\delta^2$ . Así pues, la dimensión de la trayectoria pasa de  $D = 2$  a  $D = 1$  para  $t_c \propto 1/\delta^2$  y  $r_c \propto 1/\delta$ .

□ En la terminología de los fenómenos críticos,  $\delta$  es la distancia a un

punto crítico, y los exponentes de las fórmulas de  $t_c$  y  $r_c$  son los exponentes críticos. ■

### *Otras curvas de Peano aleatorias*

□ La aleatorización de las curvas de Peano por medio del desplazamiento del punto medio aprovecha unas circunstancias especiales. Las construcciones análogas para curvas de Peano con  $N > 2$  son mucho más complicadas. Se consigue también un paralelismo más cercano con el cambio de escala no aleatorio si el desplazamiento del punto medio sigue una distribución gaussiana cuya desviación cuadrática media es  $1/2 |\Delta B|$ , cosa que implica que  $r_1$  y  $r_2$  son gaussianas, independientes y satisfacen la relación más común  $\langle r_1^2 + r_2^2 - 1 \rangle = 0$ . El proceso resultante es muy interesante aunque, obviamente, no es el movimiento browniano. No carece de pliegues. ■

### *Dimensión de la trayectoria de una partícula en mecánica cuántica*

Terminaremos esta discusión mencionando una nueva versión fractal de la presentación de la mecánica cuántica. Feynman y Hibbs (1965) señalan que la trayectoria típica de una partícula cuántica es continua y no diferenciable, y para muchos autores hay semejanzas entre el movimiento browniano y el de una partícula cuántica (véase, por ejemplo, Nelson, 1966, y las referencias que allí se dan). Inspirados en este paralelismo y mis primeros ensayos, Abbot y Wise (1980) demuestran que la trayectoria observada de una partícula en mecánica cuántica es una curva fractal con  $D=2$ . La analogía es interesante, por lo menos desde el punto de vista pedagógico.

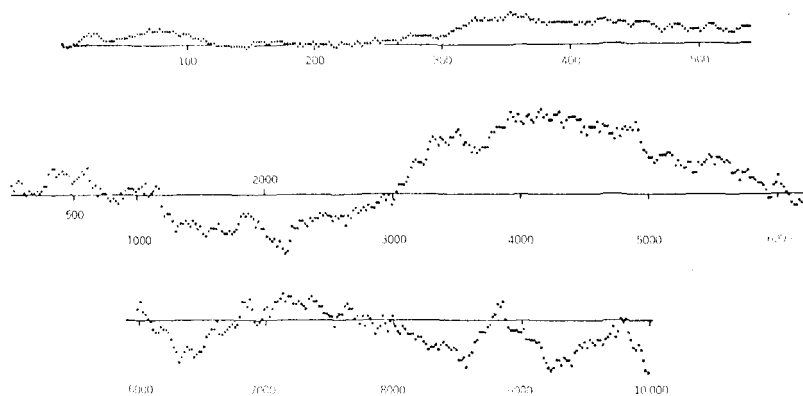


FIG. 340. Una muestra de paseo aleatorio que aproxima una función browniana real de variable real (dimensión  $D = 3/2$ ) y su conjunto de ceros (dimensión  $D = 1/2$ ).

El juego de azar más duradero (¡y el menos complicado!) empezó hacia 1700, cuando la teoría de la probabilidad estaba dominada por la familia Bernouilli. Cuando una moneda permanentemente bien equilibrada cae de cara, Carlos gana un centavo, y cuando sale cruz, lo gana Cristóbal. (Se les suele llamar Pedro y Pablo, pero así nunca recuerdo quién apuesta cara y quién cruz.)

Hace algún tiempo, William Feller estudió este juego y representó las ganancias acumuladas de Carlos en la figura superior de esta lámina, que pertenece a Feller (1950). (Reproducida de *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume I*, de William Feller, por amabilidad de los editores, J. Wiley y Sons, copyright 1950.)

Las figuras central e inferior representan las ganancias acumuladas de Carlos durante un juego más largo, usando los datos a intervalos de 200 tiradas.

Cuando se representan conjuntos de datos cada vez más largos en papel gráfico cada vez más fino, se obtiene asintóticamente una muestra de los valores de una función browniana real de variable real.

Feller ha confesado en una conferencia que estas figuras son «atípicas», y fueron seleccionadas frente a otras que parecían demasiado disparatadas para ser creíbles. Sea como fuere, la contemplación continuada de estas figuras tuvo un papel decisivo en la elaboración de dos teorías incorporadas en este ensayo.

LA GRÁFICA GLOBAL. Mandelbrot (1963e) observa que la forma global de la gráfica recuerda la silueta de una montaña o de una sección vertical del relieve

terrestre. Después de varias generalizaciones, esta observación condujo a los sucesivos modelos que se describen en el capítulo 28.

CONJUNTO DE CEROS DE LA GRÁFICA. El conjunto de ceros de la gráfica es el conjunto de instantes en los que las fortunas de Carlos y Cristóbal vuelven a sus valores iniciales. Por construcción, los *intervalos* de tiempo entre ceros son mutuamente independientes. Sin embargo, es obvio que las *posiciones* de los ceros no son independientes, ni muchísimo menos. Se presentan *muy claramente agrupados*. Así, por ejemplo, si se examina la segunda curva con el mismo detalle que la primera, casi cada cero es sustituido por toda una nube de puntos. Al tratar con el movimiento browniano, dichas nubes de puntos admiten una organización jerárquica de infinitos grados.

Cuando me pidieron que colaborara en la realización de un modelo de la distribución de errores telefónicos, tuve la suerte de recordar el diagrama de Feller. Aunque se sabía que los errores se agrupaban en ráfagas (esta era la esencia del problema práctico que se planteaba), sugerí que los intervalos entre errores podían ser independientes. Un estudio empírico detallado confirmó esta conjetura y condujo a los modelos comentados en los capítulos 8 y 31.

▮ El conjunto de ceros browniano constituye el polvo de Lévy más sencillo, a saber, un polvo de Cantor aleatorio de dimensión  $D=1/2$ . Cualquier otra  $D$  entre 0 y 1 se puede obtener de modo análogo con los ceros de otras funciones estocásticas. Con este modelo es posible definir la dimensión fractal de una línea telefónica. Las dimensiones reales dependen de las características concretas del proceso físico subyacente. ▮



FIG. 342 y 343. *Envolturas / islas brownianas; movimiento browniano autoevitante.*

**BUCLE BROWNIANO.** Llamo así a una trayectoria recorrida en un tiempo finito  $\Delta t$  por un movimiento browniano plano que regresa al punto de partida. Se trata de una curva de Peano aleatoria cuyo iniciador tiene longitud nula.

**LÁMINA 343. ENVOLTURA BROWNIANA.** Al estar acotado (casi con toda certeza), un bucle browniano divide el plano en dos partes: una *exterior* a la que se puede llegar desde un punto distante sin atravesar el bucle, y otra interior, para la que propongo los nombres de envoltura browniana o isla browniana.

**LÁMINA 342.** Envoltura de una trayectoria browniana sin bucles.

**COMENTARIO.** No sé de ninguna investigación acerca de la envoltura browniana, pero creo que merece mucha atención. En los ejemplos de la derecha se han empleado 200.000 pasos brownianos, y cada uno se ha dibujado en una pantalla de  $(1.200)^2$ .

Por construcción, las envolturas brownianas correspondientes a  $\Delta t$  distintos son estadísticamente idénticas, aparte de la escala. Y hay buenas razones para creer que los detalles más finos del contorno de la envoltura son asintóticamente autosemejantes. La frontera no puede ser estrictamente escalante, ya que un lazo no puede descomponerse en piezas que tengan la misma estructura, pero cuanto menores son las piezas más aproximadamente escalantes son.

**MOVIMIENTO BROWNIANO AUTOEVITANTE.** Por razones que se expondrán en el capítulo 36, cuando estudiemos el paseo aleatorio autoevitante propongo llamar *movimiento browniano autoevitante*, al contorno de la envoltura browniana.





LA DIMENSIÓN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO AUTOEVITANTE. Después de haber interpretado que ciertas relaciones conocidas (que citaremos en el capítulo 36) implican que el paseo aleatorio autoevitante tiene dimensión  $4/3$ , mi conjetura es que lo mismo vale para el movimiento browniano autoevitante.

Una comprobación empírica de esta conjetura nos proporciona también una ocasión magnífica para comprobar la relación longitud-área del capítulo 12. Se recubre la lámina con cuadrículas cada vez más finas y se cuenta el número de cuadrados de lado  $G$  intersecados por (a) la envoltura, para obtener la  $G$ -área, y (b) el contorno, para obtener la  $G$ -longitud. La gráfica de la  $G$ -longitud en función de la  $G$ -área en papel bilogarítmico resulta ser notablemente recta, con una pendiente prácticamente igual a  $D/2 = (4/3)/2 = 2/3$ .

Vale la pena señalar el parecido entre las curvas de las láminas 343 y 328, y sus dimensiones.

NOTA. Las zonas grises de la lámina 343 representan los dominios abiertos máximos que no son visitados por  $B(t)$ . Se pueden interpretar también como tremas de contorno fractal, con lo que el bucle es una red en el sentido del capítulo 14.

▮ Se puede plantear la pregunta de si el bucle es un tamiz o una alfombra por lo que respecta a su orden de ramificación. Yo conjeturé que se trataba de lo segundo, en el sentido de que las redes brownianas satisfacen la propiedad de Whyburn (descrita en la pág. 193). Esta conjetura ha sido confirmada por Kakutani y Tongling (no publicado). Se sigue de ello que la trayectoria browniana es una curva universal en el sentido de la definición de la página 206. ▮

## Curvas construidas por desplazamiento aleatorio del punto medio

La trama lógica de este capítulo se remonta a la mitad del capítulo 25, donde se generaba el movimiento browniano por aleatorización de una curva de Peano.

Recuérdese que, entre dos instantes sucesivos de la forma  $h2^{-k}$ , el  $k$ -ésimo terágono de una  $B(t)$  browniana es un segmento rectilíneo, y que el  $(k+1)$ -ésimo terágono se obtiene por un desplazamiento aleatorio de los puntos medios de los lados del  $k$ -ésimo terágono. Exactamente lo mismo vale para los terágonos  $X_k(t)$  e  $Y_k(t)$  de los procesos coordinados  $X(t)$  e  $Y(t)$  de  $B(t)$ .

Como este método del desplazamiento del punto medio funciona a la perfección para  $D=2$ , se puede esperar adaptarlo al copo de nieve y otras curvas de Koch con  $N=2$ , y usarlo en la construcción de superficies. Esto es lo que haremos a continuación.

El mismo enfoque genérico han tomado muchos autores de películas y gráficos por ordenador que pretendían duplicar y mejorar los gráficos del *Fractals* de 1977, buscando un método más directo y menos costoso. Estos autores no se dieron cuenta de que el método del desplazamiento aleatorio del punto medio da un resultado sustancialmente distinto de lo que ellos andaban buscando. Tiene la ventaja de su simplicidad, pero también muchas otras características no deseadas.

### *Curvas de Koch aleatorias con trama temporal y sin ligaduras espaciales*

Recuérdese que se puede construir la curva «copo de nieve» de Koch con una base  $N=2$  y un generador formado por dos segmentos de longitud  $1/\sqrt{3}$ . En este caso, y más generalmente siempre que el generador consista en dos segmentos de longitud  $2^{-1/D}$ , con  $D < 2$ , el método de construcción indica si los puntos medios de los lados del  $k$ -ésimo terágono deben desplazarse a la derecha o a la izquierda. El desplazamiento es siempre ortogonal al lado y el cuadrado de su longitud viene dado por

$$2^{-2(k+1)/D} - 2^{-2(k/D+1)}$$

Para aleatorizar esta construcción se procede del mismo modo que en la transformación de una curva de Peano en un movimiento browniano. Se toma una dirección de desplazamiento aleatoria e isótropa, independiente de su historia anterior, se toma una distribución gaussina para la longitud del desplazamiento y se aplica la fórmula anterior al desplazamiento cuadrático medio. Como no se hace nada por evitar las autointersecciones, la curva fractal que se obtiene como límite estará plagada de ellas. La denotaremos por  $B_H^*(t)$ , usando la notación  $H=1/D$ , que justificaremos dentro de poco.

Como consecuencia tenemos que la relación entre el desplazamiento  $\Delta B_H^*$  en un lapso de tiempo  $2^{-k}$  y los dos desplazamientos interpolados  $\Delta_1 B_H^*$  y  $\Delta_2 B_H^*$  toma la forma

$$\langle |\Delta_1 B_H^*|^D + |\Delta_2 B_H^*|^D - |\Delta B_H^*|^D \rangle = 0$$

con una  $D < 2$  arbitraria.

Un corolario es que, si el intervalo de tiempo  $[t', t'']$  es diádico, esto es, si  $t' = h2^{-k}$  y  $t'' = (h+1)2^{-k}$ , tenemos que

$$\langle |\Delta B_H^*|^2 \rangle = |\Delta t|^{2/D} = |\Delta t|^{2H}$$

Hemos tomado  $H$  como parámetro por ser el exponente de la raíz del desplazamiento cuadrático medio.

Se puede probar también que, si  $B_H^*(0) = 0$ , la función  $B_H^*(t)$  es estadísticamente autosemejante para razones de semejanza del tipo  $2^{-k}$ . Es, pues, una generalización deseable de lo que ya sabemos para  $D=2$ .

### *Incrementos no estacionarios*

Pero no debemos regocijarnos demasiado. Excepto en el caso de Peano-Brown con  $D=2$ , que se reduce a  $B(t)$ ,  $B_H^*(t)$  no es estadísticamente autosemejante para razones de proporcionalidad distintas de  $2^{-k}$ .

Se plantea un problema más serio aún cuando el intervalo  $[t', t'']$  no es diádico, aunque con la misma duración  $\Delta t = 2^{-k}$ , como por ejemplo en el caso  $t' = (h-0,5)2^{-k}$  y  $t'' = (h+0,5)2^{-k}$ . En tales intervalos, el incremento  $\Delta B_H^*$  tiene una varianza *distinta* y menor, que depende de  $k$ . Una cota inferior de dicha varianza es  $2^{1-2H} \Delta t^{2H}$ . Además, si  $\Delta t$  es conocido pero  $t$  no lo es, la distribución del  $\Delta B_H^*$  correspondiente no es una gaussiana sino una mezcla aleatoria de gaussianas distintas.

A consecuencia de ello, los pliegues característicos de los puntos diádicos de los terágonos aproximados se mantienen durante todo el proceso. Si  $D$  es apenas inferior a 2, y por tanto  $H$  es apenas superior a  $1/2$ , los pliegues son suaves. Pero si  $H$  es próximo a 1 (en el capítulo 28 se ve que para un modelo del relieve terrestre hay que tomar  $H \sim 0,8$  a  $0,9$ ), los pliegues son muy importantes y son visibles en las funciones de muestra. El único modo de evitarlos es abandonar el esquema del desplazamiento recurrente del punto medio, como haremos en la sección siguiente y en el capítulo 27.

### *Estratos dispuestos al azar*

□ Para investigar el porqué del carácter no estacionario de las curvas y superficies construidas por desplazamiento aleatorio del punto medio, consideremos la función  $X(t)$  de una curva  $B_H^*(t)$ . Cada estadio contribuye con una función  $\Delta_k X(t) = X_k(t) - X_{k-1}(t)$ , cuya gráfica es una línea quebrada y cuyo conjunto de ceros ( $a$ ) es periódico con período  $2^{-k}$ , y ( $b$ ) contiene el conjunto de ceros de  $\Delta_{k-1} X(t)$ . Así pues, se puede decir que cada contribución está sincronizada con las anteriores.

□ Una posibilidad consiste en construir la función  $\Delta B_k^\dagger(t)$  del modo siguiente. Tómese una sucesión poissoniana de instantes  $t_n^{(k)}$ , con una media de puntos por unidad de tiempo igual a  $2^k$ , toméense luego unos valores al azar independientes y con la misma distribución para los  $\Delta B_k^\dagger(t_n^{(k)})$ , y finalmente interpólese linealmente entre los  $t_n^{(k)}$ . La suma infinita  $B_H^\dagger(t)$  de dichas contribuciones es una función aleatoria estacionaria, propuesta por primera vez en la tesis doctoral del hidrólogo O. Ditlevsen (1969). Véase Mejía, Rodríguez-Iturbe y Dawdy (1972) y Mandelbrot (1972w).

□ Se puede ver también que en esta generalización no hace falta que el número medio de ceros por unidad de tiempo sea  $2^k$ . Puede ser también de la forma  $b^k$ , siendo  $b$  cualquier base real mayor que 1.

□ Las razones de semejanza admisibles para la correspondiente fractal vienen dadas por la sucesión discreta  $r = b^{-k}$ . Cuando  $b \rightarrow 1$ , esta sucesión se hace cada vez más tupidita y asintóticamente se hace prácticamente continua. Así pues,  $B_H^\dagger(t)$  es cada vez más aceptable para quien esté interesado en la estacionariedad y en una amplia gama de cambios de escala. Pero en este proceso  $B_H^\dagger(t)$  pierde su especificidad. El argumento de Mandelbrot (1972w) implica que  $B_H^\dagger(t)$  converge hacia la función aleatoria  $B_H(t)$  que se estudia en el capítulo siguiente.

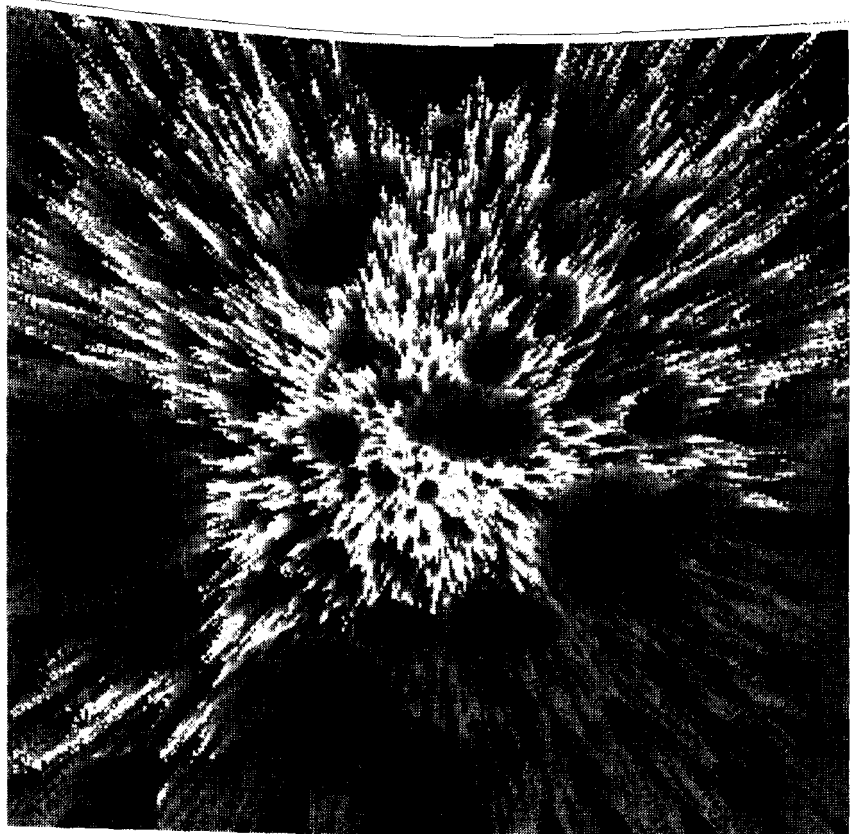


FIG. 347. *El «gazapo» informático haciendo de artista, Opus 1.*

Esta lámina se debe en parte a una programación defectuosa. El «gazapo» fue identificado y corregido al instante (¡pero sólo después de ver y grabar el resultado, naturalmente!). El resultado definitivo corresponde a las láminas 429 a 432.

El cambio introducido por un solo gazapo en un lugar crítico fue mucho más allá de lo que hubiéramos podido imaginar.

Está claro que las láminas correctas contienen un orden muy estricto y planificado. Aquí este orden está oculto, y aparentemente no hay ningún otro tipo de orden.

El hecho de que, al menos a primera vista, esta lámina pudiera pasar por una obra de arte podría no ser accidental. Mis ideas al respecto están esbozadas en Mandelbrot (1971), y pienso desarrollarlas en un futuro próximo.



IX  
Fractales brownianos fraccionarios





Pasar a los fractales brownianos fraccionarios constituye uno de los principales puntos decisivos de este ensayo. Hasta ahora nos hemos limitado a fractales cuya construcción requiere una trama temporal y/o espacial, con las consiguientes restricciones sobre sus propiedades de invariancia, esto es, sobre las posibles traslaciones y semejanzas que aplican dicha fractal sobre sí misma.

Tales restricciones contradicen la segunda de las razones aducidas en el capítulo 22 para aleatorizar las fractales. Además, en muchos casos de interés no tienen ninguna realidad física. Por contra, en los capítulos 27 a 35 pasaremos a estudiar fractales cuyas invariancias por traslación y semejanza no están sometidas a ninguna restricción.

En este capítulo se estudia un movimiento browniano generalizado, que denotaremos  $B_H(t)$ , y que en Mandelbrot y Van Ness (1968) se denomina movimiento browniano fraccionario (abreviado, mbf). Su motivación son las descargas fluviales anuales, aunque también citamos las redes escalantes y los ruidos escalantes («1/f»). En los capítulos 28 a 30 se estudian las superficies construidas por procedimientos análogos.

### *La importancia de ser Gaussiano*

Una primera característica común a los capítulos 27 a 30 es que únicamente tratan de procesos gaussianos. Para los estadísticos, el ser gaussiano es algo extraordinariamente especial, pero yo hace tiempo que he dejado de compartir esta opinión. (Véanse mis comentarios al respecto en el capítulo 22.) Sin embargo, los procesos gaussianos siguen siendo un hito importante, y requieren ser estudiados con mucho cuidado antes de ir más allá.

## *Definiciones no recurrentes*

Los capítulos 27 a 30 tienen también en común otra característica que no se presenta en ningún otro lugar de este ensayo.

Las construcciones de todos los demás capítulos, sean o no aleatorias, proceden iterativamente, añadiendo cada vez más detalles a las figuras menos detalladas obtenidas en los pasos anteriores del proceso constructivo. Las propiedades de los fractales resultantes se obtienen a partir de las reglas de dicho proceso iterativo.

Ahora, por el contrario, establecemos de entrada qué propiedades son deseables, y sólo después buscamos unas reglas de construcción que satisfagan nuestros deseos. Desgraciadamente, si bien las propiedades deseables son fáciles de enunciar y *en apariencia* simples, las reglas para realizarlas no son iterativas, y de hecho son bastante incómodas.

Si esto es así ¿por qué habríamos de insistir en tales propiedades? La respuesta es que entre ellas están la autosemejanza y la carencia de pliegues (es decir, la estacionariedad), propiedades que son inmanentes al mismísimo corazón de la ciencia y también a la teoría de fractales.

El coste relativo del enfoque «axiomático» de este capítulo se hace especialmente evidente cuando el resultado se compara con un fractal obtenido por iteración. Por ejemplo, cualquiera que investigue un caso concreto que requiera una curva fractal plana de dimensión  $D$  comprendida entre 1 y 2 puede dudar entre un proceso de desplazamiento del punto medio, como en el capítulo 26, y un proceso como el que describiremos en este capítulo. El primero *tiene* pliegues, lo cual es un inconveniente que no presenta el segundo. Y, en la mayoría de casos, la sucesión de pasos discretos que hace tan atractivo el proceso iterativo se traduce en estratos que no tienen ningún significado ni son deseables.

## *Los efectos José y Noé*

La afirmación del capítulo 1 de que muchas estructuras no uniformes que se dan en la naturaleza han llamado la atención del hombre desde muy antiguo es, en muchos casos, difícil de documentar con precisión. Pero la Biblia nos ofrece dos excepciones fantásticas:

«... se hendieron todas las fuentes del gran abismo y se abrieron las compuertas del cielo. Y hubo aguacero sobre la tierra cuarenta días y cuarenta noches.» (Génesis, 7: 11-12)

«He aquí que llegan siete años de grande abundancia en toda la tierra de o. Después de ellos vendrán siete años de hambre.» (Génesis, 41: 29-30.)

Se hace difícil no tomar el relato de Noé como una parábola acerca de la desigualdad de las precipitaciones en el Oriente Medio y el relato de José como una parábola sobre la tendencia que presentan los años secos y los años húmedos a agruparse en periodos de sequía y periodos lluviosos. En mis lecciones sobre *Nuevas formas de azar en las ciencias* (no publicadas pero esbozadas parcialmente en Mandelbrot y Wallis, 1968, y Mandelbrot, 1973 f), apliqué a estos relatos los nombres de *efecto Noé* y *efecto José*. Como se puede confirmar con datos controlables, los «siete y siete» bíblicos son una simplificación poética de la realidad, y (aunque no es tan obvio) cualquier apariencia de periodicidad en el comportamiento real del Nilo es ilusoria. Por otra parte, es un hecho bien comprobado que los caudales y las crecidas anuales sucesivas del Nilo y de muchos otros ríos son extraordinariamente persistentes.

Esta persistencia resulta tan fascinante para muchos estudiosos como vital para quienes se dedican a proyectar embalses. Durante mucho tiempo, no obstante, estuvo fuera del alcance de las posibilidades de medida, y por tanto de las posibilidades de análisis. Como en todos los campos en los que se empieza a introducir la estadística, la hidrología empezó suponiendo que los caudales sucesivos de cada río eran independientes y con distribuciones gaussianas idénticas; lo que también se conoce como ruido blanco gaussiano. Tradicionalmente, el segundo paso consiste en suponer una dependencia markoviana. Sin embargo, ambos modelos son poco realistas. Mandelbrot (1965h) significó un avance importante basado en resultados empíricos de Hurst (1951, 1955). (La historia de Hurst se cuenta en el capítulo 40.)

### *El fenómeno de Hurst. El exponente $H$*

Denotemos por  $X^*(t)$  la descarga acumulada de un río entre el principio del año 0 y el final del año  $t$ . Ajustémosla restando la descarga media muestral entre los años 0 y  $d$ , y definamos  $R(d)$  como la diferencia entre el máximo y el mínimo de la  $X^*(t)$  ajustada cuando  $t$  varía entre 0 y  $d$ . En realidad,  $R(d)$  es la capacidad que debería tener un embalse para asegurar un funcionamiento ideal durante los  $d$  años en cuestión. Un embalse tiene un funcionamiento ideal si al final acaba tan lleno como al principio, sin vaciarse ni desbordarse nunca, y mantiene un flujo de salida uni-

forme. Dicho ideal es obviamente inalcanzable, pero  $R(d)$  es la base de un método para proyectar embalses, debido a Rippl, que iba a seguirse en la Gran Presa de Asuán. Hurst se dio cuenta de que  $R(d)$  podía ser útil en la investigación del comportamiento real de los registros de caudal fluvial. Por razones de conveniencia, dividió  $R(d)$  por un factor de escala  $S(d)$  y examinó la dependencia en  $d$  del cociente  $R(d)/S(d)$ .

Si se supone que las descargas anuales se comportan como un ruido gaussiano blanco, el factor  $S$  no es importante y un conocido teorema prueba que la descarga acumulada  $X^*(t)$  es aproximadamente una función browniana  $B(t)$ , real y de variable real.

Por tanto,  $R(d)$  es proporcional a la raíz de la media cuadrática de  $X^*(d)$  que es  $\propto \sqrt{d}$ . Este razonamiento nos lleva a  $R/S \propto \sqrt{d}$  (Feller, 1951). El mismo resultado vale si las descargas anuales son dependientes pero markovianas con varianza finita, o si la dependencia toma una cualquiera de las formas descritas en los textos elementales de probabilidad y estadística.

Sin embargo, la evidencia empírica llevó a Hurst a la conclusión claramente distinta y totalmente inesperada de que  $R/S \propto d^H$ , con  $H$  casi siempre superior a  $1/2$ . Las avenidas anuales del Nilo, lejos de ser independientes, presentan  $H=0,9$ . Para los ríos San Lorenzo, Colorado y Loira,  $H$  está entre  $0,9$  y  $1/2$ . El Rhin es un río excepcional, sin leyenda de José ni fenómeno de Hurst, y para él  $H=1/2$  dentro del margen de error experimental. En Mandelbrot y Wallis (1969b) se recogen diversos datos observacionales.

### *El ruido de Hurst como ruido escalante*

Propongo llamar *ruido de Hurst* a un ruido o fluctuación  $X(t)$  tal que  $R/S \propto d^H$ . En Mandelbrot (1975w) se demuestra que se debe cumplir  $0 \leq H \leq 1$ .

H.A. Thomas Jr. me pidió que explicara las razones del fenómeno de Hurst y propuse la conjetura de que sería un síntoma de la invariancia por cambio de escala. Para definir de modo intuitivo un ruido escalante, recordemos que cualquier fluctuación natural se puede procesar para hacerla audible, como indica la misma palabra *ruido*. Grabémosla y escuchémosla en un altavoz que funcione bien entre, pongamos, 40 Hz y 14000 Hz. Hagamos pasar la cinta con distintas velocidades, más rápido y más lento de lo normal. En general, uno esperaría encontrar grandes variaciones. Un violín, por ejemplo, deja de sonar como un violín. Y si un canto de ballena se reproduce lo bastante deprisa, pasa de ser inaudi-

ble a poderse oír. Hay una clase especial de sonidos, sin embargo, que se comporta de forma muy distinta. Al cambiar la velocidad de la cinta basta con ajustar convenientemente el volumen para que el sonido emitido por el altavoz «suene igual» que antes. Propongo que estos sonidos o ruidos se denominen *escalantes*.

El ruido blanco gaussiano así transformado proporciona siempre el mismo zumbido soso, y por tanto es escalante. Pero se puede disponer de otros ruidos escalantes para la realización de modelos.

### *Delta variancia fraccionaria*

En el capítulo 21 se define la delta variancia de una función aleatoria como la variancia del incremento de la función durante el incremento de tiempo  $\Delta t$ . La delta variancia de la función browniana ordinaria es  $|\Delta t|$  (capítulo 25). Para explicar la relación  $R(d)/S(d) \propto d^H$  de Hurst, con  $H$  arbitrario, Mandelbrot (1965h) observa que *bastaría* con que el proceso acumulativo  $X^*$  fuera gaussiano con una delta esperada nula y con una delta variancia igual a  $|\Delta t|^{2H}$ . Estas condiciones determinan un único proceso estocástico gaussiano escalante. Y, como el exponente  $2H$  es fraccionario, este proceso único merece el nombre de *función browniana fraccionaria real de variable real*. Para más detalles e ilustraciones véase Mandelbrot y Van Ness (1968) y Mandelbrot y Wallis (1968, 1969abc).

Pasando de la  $B_H(t)$  real de variable real a la función  $B_H(t)$  de una variable real en el plano, una definición alternativa es la siguiente: entre las curvas de dimensión  $D=1/H$  parametrizadas con el tiempo, la trayectoria  $B_H(t)$  es la única cuyos incrementos son gaussianos, estacionarios bajo cualquier traslación (y por tanto «sin pliegues») y escalantes para *cualquier* factor  $r>0$ .

El valor  $H=1/2$ , esto es,  $D=2$ , da el movimiento browniano ordinario, que como ya sabemos es un proceso *sin persistencia* (incrementos independientes). Los otros *mbf* pertenecen a una de las dos clases siguientes, muy distintas entre si. Los valores  $1/2 < H < 1$  corresponden a *mbf persistentes*, cuyas trayectorias son curvas de dimensión  $D=1/H$ , comprendida entre 1 y 2. Los valores  $0 < H < 1/2$  corresponden a *mbf antipersistentes*.

### *Integrodiferenciación fraccionaria*

Después de haber concretado una delta varianza conveniente, nos falta ahora realizarla efectivamente. Si se parte del movimiento brow-

niano, hay que añadirle la persistencia. Un método estándar consiste en integrar, pero esto añade más persistencia de la necesaria. Por suerte hay un modo de atenuar parte de los efectos no deseados de la integración. Para  $0 < H < 1/2$  se puede hacer lo mismo con la derivada. La idea se esconde en uno de los rincones clásicos, aunque oscuros, de la matemática. Hay reminiscencias en Leibniz (capítulo 41) y fue desarrollada por Riemann, Liouville y H. Weyl.

Recuérdese del cálculo ordinario que, si  $m$  es un entero positivo, la función  $x^{1/2}$  se transforma en  $x^{1/2-m}$  después de  $m$  derivaciones seguidas, y en  $x^{1/2+m}$  tras  $m$  integraciones seguidas (con la adición en cada caso de un factor constante). El algoritmo de Riemann-Liouville-Weyl generaliza esta transformación a valores no enteros de  $m$ . La integrodiferenciación fraccionaria de orden  $1/D - 1/2$ , aplicada al movimiento browniano, nos da un *mbf*. De este modo, la típica fórmula browniana, *desplazamiento*  $\propto \sqrt{\text{tiempo}}$ , es sustituida por la generalización *desplazamiento*  $\propto (\text{tiempo})^{1/D}$ , con  $1/D \neq 1/2$ . ¡Hemos logrado nuestro objetivo!

Las fórmulas pertinentes se pueden encontrar en Mandelbrot y Van Ness (1968); en Mandelbrot y Wallis (1969c) y Mandelbrot (1972f) se describen aproximaciones (honestas).

□ Hay sin embargo una complicación más, y un peligro potencial. En el algoritmo de Riemann-Liouville-Weyl interviene una convolución, y resulta tentador llevarla a cabo mediante transformadas de Fourier rápidas (*tFr*). Esta técnica da una función periódica, es decir, una función preparada de modo que no tenga una tendencia sistemática. En las investigaciones de series temporales estándar, la eliminación de las tendencias carece de efectos importantes, pues la dependencia se limita al corto plazo. En el caso del *mbf*, por contra, sí es importante la eliminación de la tendencia, cuya importancia aumenta con  $|H - 1/2|$  y puede ser altamente significativa. Este efecto se ilustra en el capítulo siguiente, en un contexto más amplio, con la comparación de distintas figuras de montañas. Las láminas 374 y 375, obtenidas por *tFr*, no presentan ninguna tendencia global, y recuerdan cimas montañosas, mientras que la lámina 378, obtenida sin emplear tales atajos, presenta una clara tendencia global.

□ Teniendo en cuenta la economía que comportan las *tFr*, a menudo su uso es conveniente a pesar de todo, pero entonces hay que tomar un periodo mucho más largo que el tamaño de la muestra deseado y admitir un desgaste que aumenta cuando  $H \rightarrow 1$ . ■

$H > 1/2$ : persistencia a largo plazo (= infinito) y ciclos no periódicos.

En el caso  $H > 1/2$ , la propiedad más notable de la función  $B_H(t)$  es que la persistencia de sus incrementos toma una forma muy especial: dura *siempre*. Por tanto, la relación entre el *mbf* y el fenómeno de Hurst sugiere que la persistencia encontrada en los registros de descarga fluvial no se limita a lapsos de tiempo cortos (como la duración en el cargo de los ministros del faraón), sino que se alarga durante siglos (algunos húmedos y otros secos), quizá incluso milenios. El parámetro  $H$  mide la intensidad de la persistencia.

La persistencia se manifiesta muy claramente en las gráficas de los incrementos de  $B_H(t)$  y del caudal fluvial anual modelizados por dichos incrementos. Casi todas las muestras, con independencia de su duración, parecen un «ruido estocástico» superpuesto a un fondo que realiza varios ciclos. Dichos ciclos, no obstante, no son periódicos, esto es, *no se pueden* extrapolar a muestras de mayor duración. Además, se observa a menudo una tendencia subyacente que no se mantiene necesariamente en la extrapolación.

El interés de estas observaciones aumenta porque a menudo se observa un comportamiento parecido en la economía, donde los estudiosos suelen descomponer *cualquier* conjunto de datos en una tendencia, unos cuantos ciclos y un ruido.

La descomposición pretende hacer más inteligible el mecanismo subyacente, pero el ejemplo del *mbf* demuestra que tanto la tendencia como los ciclos pueden deberse al ruido, que no significa nada.

□ INTERPOLACIÓN. Si se conoce una  $B(t)$  browniana ordinaria en los instantes  $t_1, t_2, \dots$  no necesariamente equidistantes, los valores esperados de  $B(t)$  entre cada par de instantes se obtienen por interpolación lineal. En particular, la interpolación en  $[t_j, t_{j+1}]$  depende *solamente* de los valores de  $B$  en los instantes  $t_j$  y  $t_{j+1}$ . Por contra, en todos los casos en que  $H \neq 1/2$ , la interpolación de  $B_H(t)$  es *no lineal*, y depende de todos los  $t_m$  y todos los  $B_H(t_m)$ . A medida que  $t_m - t_j$  aumenta, la influencia de  $B_H(t_m)$  disminuye, aunque lentamente. Por tanto, se puede decir que la interpolación de  $B_H$  es global. Las curvas por desplazamiento aleatorio del punto medio del capítulo 26 se comportan de un modo muy distinto, pues sus interpolaciones son lineales a lo largo de ciertos intervalos de tiempo. Este es el aspecto crucial de la diferencia entre ambos procesos. ■

## La $D$ de la función y la del conjunto de ceros

La persistencia de los incrementos es sinónima de una gráfica de  $B_H(t)$  menos irregular a cualquier escala que la gráfica de la  $B(t)$  browniana ordinaria. Esto se manifiesta en que su dimensión es  $2-H$ . La dimensión del conjunto de ceros, por su parte, es  $1-H$ .

$H > 1/2$ : trayectorias brownianas fraccionarias.

Cuando pasamos a una  $B_H(t)$  con valores en el plano, buscamos movimientos cuya dirección tienda a persistir en cualquier escala. La persistencia implica una tendencia de una intensidad apropiada, pero no la obligación de evitar las autointersecciones. Como en este ensayo también queremos mantener la autosemejanza, supondremos que las funciones coordenadas  $X_H(t)$  y  $Y_H(t)$  son dos funciones brownianas fraccionarias del tiempo, con valores en la recta, estocásticamente independientes y con el mismo parámetro  $H$ . De este modo se obtiene una trayectoria browniana fraccionaria en el plano dependiente de una variable real (lámina 362).

Su dimensión fractal es  $D = 1/H$ , que como mínimo es  $1/1 = 1$ , como corresponde a una curva, y como máximo  $1/(1/2) = 2$ . Este último resultado sugiere que la trayectoria de  $B_H(t)$  llena el plano menos «densamente» que la trayectoria browniana ordinaria. Para confirmar esta sugerencia, examinaremos por separado las trayectorias limitadas y no limitadas.

El efecto de  $H$  sobre las trayectorias limitadas es notable. Para  $H > 1/2$ , igual que para  $H = 1/2$ , una trayectoria browniana limitada es una red fractal con una infinidad de huecos. Poderosas consideraciones heurísticas sugieren que las áreas de dichos huecos satisfacen  $Pr(U > u) \propto u^{-D/E} = u^{1/2H}$ .

También he investigado empíricamente los contornos de las trayectorias limitadas, para distintos valores de  $D$ , por si encontraba desviaciones respecto al valor  $4/3$  que, según se muestra en la lámina 342, se obtiene para el caso browniano. ¡No pude encontrar ninguna desviación clara!

Por otra parte, el parámetro  $H$  afecta cualitativamente el comportamiento de las trayectorias *sin límites*. Para una trayectoria que parte de 0 en el instante 0, el número esperado de regresos a una pequeña caja en torno a 0 (infinito en el caso browniano) es finito para  $H > 1/2$ . □ La razón es que la integral  $\int_1^\infty t^{-2H} dt$ , obtenida en la penúltima sección del capítulo 25, es divergente para  $H = 1/2$  y convergente para  $H > 1/2$ . ■ Si se superpone un número finito de redes fractales sobre un cuadro, éste resulta recubierto de un modo menos lagunar, pero es casi seguro que no se al-



canza un recubrimiento denso. El número de redes superpuestas es pequeño para  $H$  próximo a 1 y crece sin límite para  $H=1/2$ .

### *H < 1/2: movimientos brownianos fraccionarios antipersistentes*

Los movimientos brownianos fraccionarios con  $0 < H < 1/2$  dan funciones y trayectorias antipersistentes. La antipersistencia consiste en la tendencia a regresar constantemente al lugar de procedencia, y por tanto a difundirse *más lentamente* que sus homólogos brownianos.

La fórmula  $D=1/H$  sólo vale si  $E > 1/H$ . Si  $E < 1/H$  (en particular en el caso del plano, en que  $E=2$ ) la dimensión fractal alcanza su valor máximo posible  $D=E$ . Recordemos que la dimensión máxima posible de una trayectoria browniana es  $D=2$ , y que éste sólo se puede realizar si  $E \geq 2$ . Si se la comprime en la recta real, con  $E=1$ , la trayectoria browniana tiene que adaptarse a  $D=1$ . Si  $H=1/3$ , la trayectoria del *mbf* apenas llena el espacio tridimensional ordinario.

Volviendo al plano,  $E=2$ , el análisis dimensional demuestra que la trayectoria ilimitada y con  $H < 1/2$  pasa, casi con toda seguridad, una infinidad de veces por cualquier punto dado. Así pues, y en contra de lo que ocurre con  $B(t)$ , que no responde a lo que se esperaría de su  $D=2$  y sólo llena el plano denso pero no completamente, cualquier pequeño exceso de  $1/H$  respecto a 2 nos da un relleno completo. Para demostrar que  $B_H(t)$  regresa, casi con toda seguridad, una infinidad de veces al punto de partida, recordemos (capítulo 25) que la dimensión del conjunto de instantes de regreso es  $1-2H$ , que es un valor positivo para  $H < 1/2$ . Así pues, la intersección de una trayectoria browniana fraccionaria ilimitada de  $H < 1/2$  con un cuadrado de lado 1 tiene área unidad.

Una trayectoria limitada es una red con huecos, pero tiene un área positiva (¡una reminiscencia del capítulo 15!).

### *El modelo browniano fraccionario de la descarga fluvial, «motivado»*

Como otras veces, el móvil inicial de la introducción de  $B_H$  procede de la experiencia personal de este geómetra acerca de qué trucos gráficos y qué trucos matemáticos es probable que den buenos resultados. Ante este posible reproche, tengo preparado un contraargumento: es preferible un modelo que carezca de una motivación seria, pero que se ajuste bien a los datos, a un modelo aparentemente bien motivado que se ajuste mal. Los científicos buscan insaciablemente ambas cosas. Por desgracia, las

«explicaciones» actuales son, en mi opinión, artificiosas y poco convincentes.

Para entender por qué las descargas anuales sucesivas de un río son interdependientes, se empieza considerando el agua que aportan, de un año al siguiente, los embalses naturales. Sin embargo, el almacenamiento natural sólo produce una suavización de los registros a corto plazo y, como mucho, sólo puede dar lugar a una persistencia a corto plazo. Desde el punto de vista de la influencia a largo plazo, la gráfica de la descarga acumulada continúa teniendo una dimensión «efectiva» (en el sentido del capítulo 3) igual a  $3/2$ .

Para ir más lejos, muchos autores están más dispuestos que yo a invocar toda una jerarquía de procesos, cada uno de los cuales funciona en su propia escala. En el caso más simple las contribuciones son aditivas. La primera componente considera los embalses naturales, la segunda los cambios microclimáticos, la tercera los cambios climáticos, y así sucesivamente.

Desafortunadamente, una persistencia de alcance infinito precisa de una infinidad de componentes, y el modelo acaba dependiendo de una infinidad de parámetros. Sigue siendo necesario explicar por qué la suma de diversas contribuciones es escalante.

En determinado punto de la discusión, una función (la correlación) se expresa como una serie infinita de exponenciales. He perdido horas y más horas haciendo hincapié en que la demostración de que esta suma es hiperbólica no es más fácil que explicar por qué es hiperbólica la curva original, y argumentando que una invocación de las posibles causas sólo puede tener un valor mágico (no científico) siempre que siga siendo vacía. Qué alegría me dio, pues, descubrir que había estado trabajando codo con codo con James Clerk Maxwell (véase la entrada «Invariancia por cambio de escala: panaceas antiguas que perduran», del capítulo 41).

No hace falta decir que el ingeniero hidrólogo práctico puede imponer a cada proceso una cota superior finita cuyo orden de magnitud sea el del horizonte del proyecto de ingeniería más largo.

### *Otros ruidos escalantes. Ruidos $1/f$*

DEFINICIÓN FORMAL. Se dice que un ruido  $X(t)$  es *escalante* si el propio  $X$ , su integral o su derivada (de orden superior al primero si hace falta) es *autoafín*. Esto es, si  $X(t)$  es estadísticamente idéntica a su transformada por una contracción temporal seguida del correspondiente cambio de intensidad. Así pues, debe existir un exponente  $\alpha > 0$  tal que, para

cada  $h > 0$ ,  $X(t)$  es estadísticamente idéntica a  $h^{+\alpha}X(ht)$ . Más generalmente, y en especial para valores de  $t$  discretos, se dice que  $X(t)$  es asintóticamente escalante si existe una función de variación lenta  $L(h)$  tal que  $h^{-\alpha}L^{-1}(h)X(ht)$  tiene límite cuando  $h \rightarrow \infty$ .

Esta definición requiere que se comparen todas las propiedades matemáticas de  $X(t)$  y de  $h^{-\alpha}X(ht)$ . Por tanto, en las ciencias empíricas nunca puede *demostrarse* el carácter escalante, y en la mayoría de casos, la propiedad de invariancia por cambio de escala se infiere de un único test que sólo considera una faceta de la semejanza, como por ejemplo la distribución de longitudes de los huecos (capítulo 8) o el  $R/S$  de Hurst.

□ El test de invariancia por cambio de escala más extendido se basa en espectros. Un ruido es espectralmente escalante si su densidad espectral para la frecuencia  $f$  es de la forma  $1/f^\beta$ , siendo  $\beta$  un exponente positivo. Si  $\beta$  es lo bastante próximo a 1 para que pueda tomarse abreviadamente  $1/f$  en vez de  $1/f^\beta$ , se dice que se trata de un «ruido  $1/f$ ». ■

Muchos ruidos escalantes tienen implicaciones notables en sus campos respectivos y su naturaleza ubicua es una realidad genérica destacable.

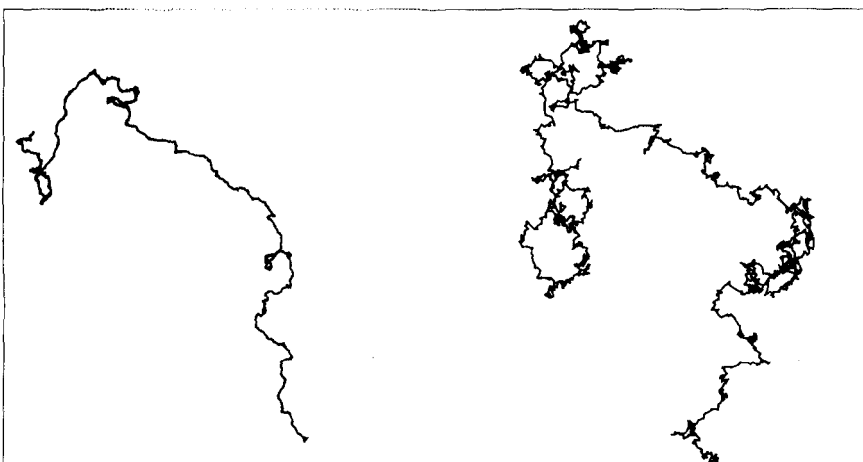


FIG. 362. *Trayectorias brownianas fraccionarias*  
(dimensiones  $D \sim 1,1111$  y  $D \sim 1,4285$ )

La figura de la izquierda constituye un ejemplo de curva fractal estadísticamente autosemejante con  $D = 1/0,9000 \sim 1,111$ . Sus funciones coordenadas son funciones brownianas fraccionarias independientes con exponente  $H = 0,9000$ , que explican el efecto José del Nilo. El hecho de que  $H$  sea próximo a 1 no basta para eliminar las autointersecciones, pero las reduce bastante al hacer que la «tendencia» de la curva persista en cualquier dirección que haya tomado. Si se piensa en las curvas complicadas como superposición de convoluciones de tamaños grande, medio y pequeño, se puede decir que, en caso de persistencia grande y dimensión próxima a 1, las convoluciones pequeñas apenas si son visibles.

La figura de la derecha se ha elaborado con el mismo programa de ordenador y  $D \sim 1/0,7000 \sim 1,4285$ . El generador pseudoaleatorio no se ha cambiado, con lo que la forma global es parecida. Pero el aumento de  $D$  hace que crezca la importancia de las pequeñas convoluciones y también, aunque algo menos, la de las medianas. Detalles que antes no eran visibles ahora lo son.

Este capítulo, cuyas ilustraciones principales son figuras completamente artificiales que imitan los mapas y las fotografías de islas y montañas, se propone demostrar que, en una primera aproximación, superficies fractales elegidas convenientemente y regidas por una especie de azar browniano permiten hacer modelos útiles de montañas como los Alpes. Así obtendremos, por fin, un modelo razonable de las formas naturales de las que hemos partido y que hasta ahora se nos habían estado escapando: las costas.

El punto de partida es la idea de que las superficies de las montañas son figuras escalantes. ¿Es nueva esta idea? ¡Ciertamente no! No se había formulado ni estudiado científicamente, pero es un tema literario recurrente. Como ejemplo añadido a la cita que abre el capítulo 2, en la pág. 88 de *Scrambles Amongst the Alps in 1860-1869*, de Edward Whymper, leemos: «Es interesante observar que... fragmentos de... roca... presentan a menudo las formas características de los peñascos de donde han sido arrancados... ¿Y por qué no habría de ser así si la masa de la montaña es más o menos homogénea? Las mismas causas que producen las formas pequeñas modelan las mayores; se trata de las mismas influencias, la misma helada y la misma lluvia son las que esculpen toda la masa y cada una de sus partes».

No hace falta tomarse al pie de la letra la explicación poética de Whymper para estar de acuerdo en que vale la pena examinar sus consecuencias. Así lo haré en este capítulo con el aparato matemático más manejable que se me ocurre: las superficies brownianas y las superficies brownianas fraccionarias.

Ya hasta en mis primeras simulaciones de montañas brownianas fraccionarias (láminas 104 y 105), «ver es creer». A medida que la calidad de los gráficos fue mejorando, también fue mejorando la intensidad de la «creencia». Pero al final se pusieron de manifiesto discrepancias entre el modelo y la experiencia, lo que obligó a cambiar de modelo, como se verá en el siguiente capítulo.

## *Relieve browniano sobre una tierra plana (Mandelbrot, 1975w)*

Atacamos el problema del relieve por medio de las secciones verticales. Como ya indiqué en el capítulo 4 y en la lámina 340, una de las fuentes inspiradoras de este ensayo fue la intuición, que ya señalé en Mandelbrot (1963e), de que un paseo aleatorio escalar podía ofrecer una primera aproximación de la sección vertical de una montaña. Así pues, empecé por buscar una superficie aleatoria cuyas secciones verticales fueran funciones brownianas reales de variable real. La caja de herramientas del constructor de modelos estadísticos no contenía ninguna superficie de esta clase, pero di con un candidato un tanto oscuro que adopté para el caso.

Se trata de la función browniana real definida en el plano,  $B(P)$ , descrita en Lévy (1948). Para familiarizarse con ella sin invertir demasiado tiempo y aplicarla a un caso concreto, no hay nada mejor que un examen cuidadoso de la simulación mostrada en la lámina 374. El paisaje fractal imaginario tiene una dimensión  $D=5/2$ , y es claramente más rugoso que la mayor parte del relieve terrestre.

Se trata de un primer modelo, que pide a gritos ser devuelto al taller. Pero, ¿no es también un hermoso salto hacia adelante?

ATENCIÓN, NO CONFUNDIR CON LA SÁBANA BROWNIANA. Existe una proliferación interminable de variantes del movimiento browniano y la terminología es un tanto superficial. No hay que confundir la función browniana real definida en el plano con la sábana browniana. Esta última es un proceso completamente distinto, que se anula sobre los ejes y es fuertemente isótropo. Véase Adler (1981) y en especial las ilustraciones de las págs. 265 y 266.

### *Las costas de un relieve browniano*

Detengámonos aquí un momento e intentemos avanzar en el estudio de las costas, definiéndolas como conjunto de ceros: puntos situados al nivel del mar, que incluyen también los puntos de las costas insulares. La costa browniana de la lámina 371 fue el primer ejemplo que encontré de una curva que (a) no tiene autointersecciones, (b) carece prácticamente de puntos de autocontacto, (c) tiene una dimensión fractal claramente superior a 1, y (d) es isótropa. En la lámina 377 se presenta una variante más reciente.

Para ser más precisos, la dimensión es  $3/2$ . Como este valor es mayor que la mayoría de los mostrados en la lámina 59, obtenidos por Richard-

son, resulta que la aplicabilidad de la costa browniana es sólo limitada. Recuerda el norte de Canadá, Indonesia, quizá el oeste de Escocia y el Egeo, y es aplicable a muchos otros ejemplos, pero ciertamente no a todos. A la vista de los datos de Richardson sería ingenuo esperar que una sola  $D$  tuviera validez universal.

### *Generación de un relieve browniano (Mandelbrot, 1975c)*

Es una pena que no baste con el simple relieve browniano, de dimensión  $D=5/2$ , ni con las costas brownianas, de dimensión  $D=3/2$ , pues resultarían fácilmente explicables. En efecto, la función browniana es una aproximación excelente del relieve «poissoniano» creado por superposición de fallas rectilíneas independientes. Se rompe una meseta horizontal por una línea recta escogida al azar, y también se elige al azar el desnivel entre las dos partes del precipicio que se forma, tomando, por ejemplo,  $\pm 1$  con idéntica probabilidad, o según una distribución gaussiana. A continuación volvemos a empezar, y pasamos a la  $k$ -ésima etapa dividiendo por  $\sqrt{k}$  (de modo que cada precipicio tenga un desnivel despreciable en comparación con la suma acumulada de todos los demás).

El resultado obtenido por iteración indefinida generaliza el proceso de Poisson en el tiempo. Sin más detalles físicos o matemáticos, se ve fácilmente que el razonamiento capta al menos uno de los aspectos de la evolución tectónica.

Debido a la simplicidad del mecanismo, sería reconfortante pensar que en un cierto estado, especialmente «normal» y muy antiguo, todo el relieve terrestre fue browniano, con  $D=5/2$ . Pero este tema debe posponerse para más adelante.

### *Efectos globales en el relieve browniano*

Lévy encontró que la función browniana real de varias variables tiene una propiedad que sorprende a primera vista y que tiene consecuencias prácticas muy directas. Enunciada sin gran precisión, esta propiedad establece que las distintas partes de un relieve browniano *distan* mucho de ser estadísticamente independientes. Así pues, en la inmersión de una función browniana real de una variable en una función browniana real de dos variables, tenemos que renunciar a un aspecto que hasta ahora había sido la virtud característica del azar browniano: la independencia de las partes.

Consideremos dos puntos situados respectivamente al este y al oeste de una sección meridiana del relieve. A lo largo del meridiano, el relieve es una función browniana real de una variable, y por lo tanto las «pendientes» en puntos distintos son independientes. Además, uno podría esperar que dicho meridiano hiciera de pantalla, de modo que el conocimiento del relieve en el lado este no influya para nada en la distribución del relieve en el del lado oeste. □ Si fuera así el relieve sería markoviano. ■ De hecho, el lado oeste *sí influye* sobre el este, en el sentido de que el proceso generativo conlleva inevitablemente una fuerte dependencia global.

Esta dependencia implica que una superficie browniana es mucho más difícil de construir que una función browniana real de una variable. El proceso de desplazamiento aleatorio del punto medio del capítulo 25, que, como explicamos en los capítulos 26 y 27, no se puede generalizar a las funciones brownianas fraccionarias de una variable, tampoco se puede generalizar a las funciones brownianas *ordinarias* de dos variables. Esto es, *no se puede* proceder fijando de entrada la función sobre un retículo grueso y luego dar valores en cada celda con independencia de las otras celdas. Es también imposible construirla por capas: primero para  $x=0$ , luego para  $x=\varepsilon$  sin tener en cuenta los valores para  $x<0$ , luego para  $x=2\varepsilon$  sin tener en cuenta los valores para  $x<\varepsilon$ , etc.

Dicho con más generalidad, todo algoritmo que prometa una fácil generalización por pasos de la función browniana de una variable al caso de un «tiempo multidimensional» lleva inevitablemente a una función sistemáticamente distinta de lo que se pretendía.

Como se dice en la última sección de este capítulo, las simulaciones en las que participé reformulan las definiciones teóricas intratables de modo que requieren una serie de aproximaciones sucesivas cuyos términos de error se conocen. Pero no puedo responder de quienes, estimulados por la lectura de mis ensayos anteriores, se han sumado a nuestro juego.

### *Relieve browniano sobre una esfera*

Tomemos ahora una esfera como base del relieve terrestre. Por suerte, la correspondiente función browniana real sobre la esfera,  $B_0(P)$ , también fue investigada por mi mentor (véase Lévy, 1959). Es fácil de describir, divertida y puede que hasta sea importante. Pero, como veremos, tampoco es realista, pues también predice costas con  $D=3/2$ , lo cual es un serio inconveniente.



Aunque la definición más simple de  $B_0(P)$  echa mano de **elementos** de la teoría del ruido, a cuyas definiciones tenemos que acudir **incesantemente**, éstos resultarán familiares a muchos lectores. Se dispone una capa de ruido blanco gaussiano sobre una esfera y  $B_0(P)$  es la integral de este ruido blanco sobre la semiesfera de centro  $P$ .

Si nos movemos en distancias angulares que no superen los  $60^\circ$ ,  $B_0(P)$  se parece mucho a una función browniana de dos variables. Pero considerada globalmente, el parecido se desvanece.

Así, por ejemplo,  $B_0(P)$  tiene la sorprendente propiedad de que, si  $P$  y  $P'$  son puntos antipodales de la esfera, la suma  $B_0(P) + B_0(P')$  es independiente de  $P$  y  $P'$ . En efecto, dicha suma es simplemente la integral sobre toda la esfera del ruido blanco empleado en la construcción de  $B_0(P)$ .

Por tanto, una gran montaña en  $P$  se corresponde con una gran fosa en su punto antipodal  $P'$ . Una tal distribución tendría un centro de gravedad distinto del de la superficie de base, y difícilmente podría estar en equilibrio estable. Pero no hay por qué preocuparse: el modelo se salva de la inestabilidad estática —y por tanto de ser rechazado a las primeras de cambio— gracias a la teoría de la isostasia. Según esta teoría, la corteza sólida terrestre es muy delgada en los lugares más profundos del océano y muy gruesa bajo las montañas más altas, de modo que una esfera concéntrica con la Tierra y trazada ligeramente por debajo del punto más profundo del océano prácticamente biseca la corteza. Una vez se ha aceptado que la cresta visible de una montaña debe considerarse siempre en conjunción con su invisible raíz bajo la esfera de referencia, la constancia de  $B_0(P) + B_0(P')$  no deja de ser una sorpresa, pero ya no implica un gran desequilibrio estático.

### *Pangea y pantalasia brownianas*

¿Cómo concuerda la variante anterior del relieve browniano con los datos observados? Si nos basamos en los continentes y los océanos actuales,  $D$  no es correcta, y por tanto la concordancia es pobre.

Por otra parte, la tectónica de placas (la teoría de la deriva y fragmentación de los continentes) sugiere hacer la prueba con la Tierra primitiva, tal como era hace 200 millones de años. Al ser menos firmes los datos, no es tan seguro que el test vaya a fallar. Según Wegener (y sus ideas han acabado siendo aceptadas; véase, por ejemplo, Wilson 1972) hubo un tiempo en que los continentes estaban unidos en una *Pangea* y los mares formaban un superocéano, la *Pantalasia*.

Como *Pangea*, el relieve de la lámina 379 es una mancha de tierra

mellada aquí y allá por grandes sinuosidades. Pero esta apariencia es engañosa. Tiende a resaltar demasiado los detalles a muy gran escala debido a la combinación de la geometría esférica con el hecho de que en la esfera las reglas brownianas de dependencia producen una correlación grande para ángulos inferiores a los  $60^\circ$  y una gran correlación negativa entre puntos antipodales. Una mirada más atenta y centrada en aspectos menos globales nos da la impresión de una concordancia más pobre: para ángulos inferiores a los  $30^\circ$  (por ejemplo), una costa browniana sobre la esfera no se distingue de una costa browniana plana. Todos los defectos de esta última vuelven a resurgir.

Un copo fractal en el que la altitud sea la misma función que la *Pangea* anterior, con una escala cuyo orden de magnitud sea la mitad del radio, parece una de las lunas irregulares de los planetas exteriores. En contraste con las láminas 25 y 26, no va acompañada de chorros ni restos, por tanto  $D$  sólo es una medida de la irregularidad y no de la fragmentación.

### *Relieve browniano fraccionario en una tierra plana (Mandelbrot, 1975w)*

El problema de los dos modelos brownianos anteriores del relieve terrestre es que  $D=3/2$  es demasiado para las costas. Como consecuencia, nuestra búsqueda de un modelo más general toma un giro inesperado. En los capítulos 5 y 6 señalábamos que  $D > 1$  y empezábamos a buscar maneras de hacer que  $D$  se hiciera mayor que 1. Ahora tenemos que encoger  $D$  por debajo de  $3/2$ . Para conseguir costas menos sinuosas necesitamos un relieve menos escarpado y unas secciones verticales menos sinuosas.

Por suerte el capítulo anterior nos ha preparado el camino. Para obtener un modelo de las secciones verticales he sustituido la función browniana real de variable real por su variante fraccionaria. Existen efectivamente funciones estocásticas  $B_H(P)$  reales y de dos variables. La  $D$  de sus superficies es  $3-H$  (Adler, 1989) y la de sus curvas de nivel y secciones verticales es  $2-H$ .

Por tanto, modelizar y simular cualquier dimensión indicada por los datos empíricos ya no representa ninguna dificultad.

**DETERMINACIÓN DE  $D$ .** Se puede esperar, a partir de los datos de Richardson (capítulo 5), que las dimensiones «típicas» de las costas estén alrededor de 1,2, y las del relieve alrededor de 2,2. Podemos, pues, recorrer un largo trecho con  $H=0,8$  (valor que justifica la lámina 375). Sin embargo, determinadas zonas concretas de la Tierra pueden requerir de otros valores. Valores de  $D \sim 2,05$  servirían para explicar relieves dominados por componentes de variación muy lenta. Si esta componente es una

gran pendiente, el relieve es una meseta inclinada y accidentada, y la costa sólo difiere de una recta por la presencia de pequeñas irregularidades. Cerca de una cumbre el relieve es un cono accidentado y la costa un óvalo moderadamente irregular.

Los relieves con una  $D$  próxima a 3 son también potencialmente útiles, aunque difícilmente ilustrables. Basta con observar, en la lámina 371, que la costa correspondiente a una  $D$  próxima a 3 recuerda una llanura aluvial inundada. Por tanto, todos los valores de  $H$  encontrarán su lugar en la caja de herramientas del diseñador de modelos estadísticos.

### *Principios cosmográficos*

Los principios cosmográficos del capítulo 21 se pueden reformular en términos propios del relieve. El principio cosmográfico fuerte combina los conceptos probabilísticos de estacionariedad e isotropía. Por tanto, se puede decir que el relieve  $z(x,y)$  sobre una Tierra plana es fuertemente cosmográfico si las reglas que generan dicho relieve son las mismas en cualquier sistema de referencia cuyo origen de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  satisfaga  $z_0=0$  y el eje  $z$  sea vertical. En particular, dichas reglas tienen que ser invariantes al intercambiar  $x_0$  por  $y_0$  y bajo rotaciones del plano horizontal. Ni mi relieve browniano sobre una Tierra plana, ni su versión fraccionaria, cumplen este principio.

Pero sí cumplen una versión «condicional» en la que el origen tiene que satisfacer  $z_0=B(x_0, y_0)$ , de modo que esté sobre la superficie terrestre.

Se han hecho varios intentos de ajustar el relieve a un proceso estacionario. Se recubre el plano  $z=0$  con una cuadrícula regular y se toman las alturas en las distintas celdas de la cuadrícula como variables aleatorias independientes. Tales modelos no pueden explicar ninguna de las leyes de cambio de escala examinadas en este capítulo.

El relieve browniano sobre una Tierra esférica satisface el principio cosmográfico en su versión fuerte, que es la más útil para tratar con grandes áreas de la Tierra. La versión condicional es forzosamente válida y es preferible cuando uno trata con efectos locales.

### *El horizonte*

El horizonte de un observador situado a una distancia finita sobre la superficie terrestre lo constituyen los puntos no ocultos de mayor altura aparente, en cualquier dirección que se mire.

Si el relieve es una perturbación sobre una Tierra esférica, el horizonte estará obviamente a una distancia finita del observador.

Si el relieve es una perturbación browniana o una perturbación browniana fraccionaria sobre un plano horizontal, la existencia del horizonte no es evidente: tras cada montaña y a una cierta distancia puede haber otra más alta, y así sucesiva e indefinidamente. De hecho, una montaña situada a una distancia  $R$  del observador tiene una altura relativa del orden de  $R^H$ , de modo que la tangente de su ángulo aparente sobre el plano horizontal es aproximadamente  $R^{H-1}$ , que tiende a 0 para  $R \rightarrow \infty$ . Así pues, el horizonte está también definido.

Para hacernos una idea más clara, dividamos la distancia del observador al horizonte por su valor medio. En una Tierra plana esta función es estadísticamente independiente de la altura del observador. En una Tierra esférica, por el contrario, el horizonte tiende a hacerse circular a medida que el observador asciende. Además, el horizonte de una Tierra plana está *por encima de* un plano que pasa por el observador, independiente de la altura del mismo. En cambio, el horizonte de una Tierra esférica cae *por debajo* de dicho plano si el observador está a suficiente altura. Resumiendo, las propiedades observadas del horizonte confirman que la Tierra es esférica. La conclusión contraria habría sido un desastre.

### *El modelo browniano fraccionario del relieve terrestre, «motivado»*

Como de costumbre, uno se pregunta por qué unos modelos escogidos por su simplicidad resultan ser tan atractivamente aplicables. Tengo algunas ideas al respecto, aunque no puedo pretender que sean convincentes (capítulo 42).

□ En primer lugar, se puede construir  $B_H(P)$ , igual que se hizo con  $B(P)$ , mediante superposición de fallas rectilíneas (Mandelbrot, 1975f). Sin embargo, el perfil de las fallas ya no debe ser un precipicio nítido, sino que su pendiente tiene que aumentar a medida que uno se va acercando a la falla. Por desgracia, el perfil apropiado es artificioso, de manera que ésta no es una buena aproximación al problema.

□ Parece preferible empezar con un modelo browniano y luego intentar disminuir la dimensión como hacíamos en el capítulo 27 con los ríos. Un alisado exclusivamente local transforma una superficie de área infinita en otra de área finita. Y además no afecta en nada a los rasgos a mayor escala. Por tanto, el alisado local convierte un objeto con una misma dimensión bien definida a todas las escalas en otro que presenta una dimensión efectiva global de  $5/2$  y una dimensión efectiva local de 2.

□ Más generalmente,  $K$  alisados distintos con distintas escalas fundamentales producen  $K+1$  zonas con dimensiones distintas, unidas por zonas de transición. Sin embargo, el objeto considerado globalmente puede acabar siendo indistinguible de una fractal de dimensión intermedia. En otras palabras, una superposición de fenómenos con escalas bien definidas puede imitar la invariancia por cambio de escala.

□ Por otra parte, a menudo y de modo espontáneo, un fenómeno escalante se divide mentalmente en una jerarquía en la que cada nivel tiene una escala definida. Así, por ejemplo, los cúmulos de galaxias del capítulo 9 no tienen por qué ser reales, como se verá en los capítulos 32 a 35. Por tanto, no hay que empeñarse en seguir al pie de la letra la recomendación de Descartes y empezar a subdividir cada dificultad. Aunque nuestra mente descomponga espontáneamente las configuraciones geomorfológicas en una superposición de rasgos con escalas claramente separadas, dichos rasgos no tienen por qué ser reales.

□ Por suerte, el relieve terrestre tiene un corte superior finito, pues su superficie de base es esférica. Por tanto, para mayor seguridad se puede suponer que las distintas transformaciones producidas a lo largo de la historia geológica implican sólo escalas inferiores al orden de magnitud de los continentes. La suposición realista de que  $H$  cambia de un lugar a otro deja abierta la posibilidad de que la intensidad relativa de dichas transformaciones varíe. ■

### *Piedras rotas, pistas de aterrizaje y tribología*

Como se dijo en el capítulo 1, acuñé el término *fractal* a partir del latín *fractus*, que describe el aspecto de una piedra rota: irregular y fragmentada. La etimología no es razón suficiente para que la superficie real de una piedra sea fractal, pero es muy probable que no sea una superficie estándar, y si es escalante debería ser un fractal.

El argumento en favor del carácter escalante se basa en que una piedra está formada por granos cohesionados en dominios organizados jerárquicamente. La cohesión entre los dominios grandes es menor que la cohesión de sus componentes más pequeños. La energía generada cuando se golpea una piedra se disiparía más fácilmente si se separaran sólo pedazos grandes, pero nada implica que tal separación sea geométricamente posible. Por tanto, lo más probable es que la ruptura combine porciones correspondientes a dominios de distintos niveles jerárquicos.

La ciencia que trata de la fricción y el desgaste se llama *tribología*, del griego *τριβω* = frotar. La evidencia aportada por Sayles y Thomas,

1978 (corrigiendo un análisis defectuoso; véase Berry y Hanndy, 1978), respalda la creencia de que las superficies brownianas *fraccionarias* nos proporcionan buenas representaciones en primera aproximación de las pistas de aterrizaje y de muchas superficies rugosas naturales. Los valores empíricos de  $D$  (deducidos de una gráfica de  $7-2D$  de Sayles y Thomas, figura 1) están entre 2 y 3.

### *Distribución espacial del petróleo y otros recursos naturales*

Ahora que mi «principio» del carácter escalante del relieve ha sido corroborado de varias maneras, examinemos un corolario. Como se demuestra en el capítulo 38, podemos esperar que cualquier cantidad asociada al relieve siga una distribución de probabilidad hiperbólica («ley de Zipf», «ley de Pareto»). Y, en efecto, así ocurre en muchas ocasiones. De hecho, mi estudio de las costas (capítulo 5), que sugería que el relieve es escalante, había sido precedido por Mandelbrot (1962n), donde se encontraba que las distribuciones de petróleo y otros recursos naturales eran hiperbólicas. Este hallazgo está en desacuerdo con la idea dominante de que tales cantidades siguen una distribución logarítmica normal. La diferencia es sumamente importante, pues las reservas serían mucho mayores si la distribución fuera hiperbólica en vez de logarítmica normal. Mis conclusiones no despertaron mucha atención en 1962, pero volveré a intentarlo.

Se vuelve a tratar de los minerales en el capítulo 39, en la entrada sobre «fractales no lagunares».

### *Simplificaciones: superficies periódicas y superficies por desplazamiento del punto medio*

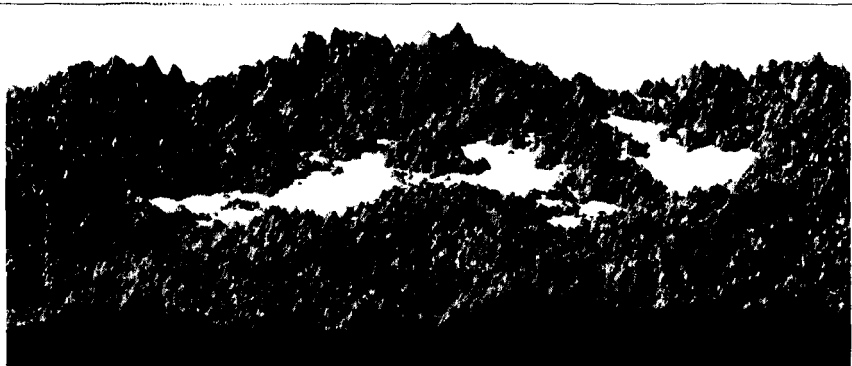
Como mis relieves brownianos, o brownianos fraccionarios, se basan en algoritmos complicados, necesitamos aproximaciones y simplificaciones. Así, en las láminas 378, 371 y 383 se usa una aproximación poissoniana de nuestro proceso gaussiano. En las láminas 374 a 377, y C5 a C13, se cambia una función no periódica de  $x$  e  $y$  por una función periódica calculada por métodos rápidos de Fourier y «recortada» luego para que una parte central no quede afectada por la periodicidad.

Además, usé el método del desplazamiento del punto medio, como en el capítulo 26, para generar superficies fractales, que denoto por  $B^*_H(x, y)$ . El modo más fácil de construir dichas superficies consiste en tomar como

iniciador un triángulo equilátero  $J$ . Prescribiendo los valores de  $B^*_H(x, y)$  en los vértices de  $J$ , el primer paso interpola por separado esta función sobre los tres puntos medios de los lados de  $J$ , siguiendo el mismo proceso que para las funciones coordenadas de  $B^*_H(t)$ . El segundo paso interpola en los 9 puntos medios de segundo orden, y así sucesivamente.

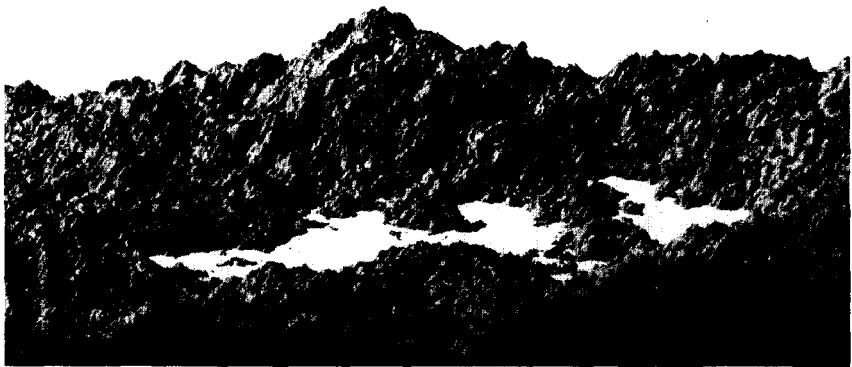
Seguro que el resultado es más realista que cualquier superficie no fractal o que la mayoría de superficies fractales no aleatorias. Pero ¿es estacionario?  $\Delta B^*_H = B^*_H(x, y) - B^*_H(x + \Delta x, y + \Delta y)$  debería depender sólo de la distancia entre los puntos  $(x, y)$  y  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . De hecho, este  $\Delta B^*_H$  depende explícitamente de  $x, y, \Delta x$  y  $\Delta y$ . Por tanto,  $B^*_H$  no es estacionario, ni tan siquiera en el caso  $H = 1/2$ .

También he examinado y comparado una docena de simplificaciones que sí son estacionarias y espero publicar algún día el resultado de dicha comparación.

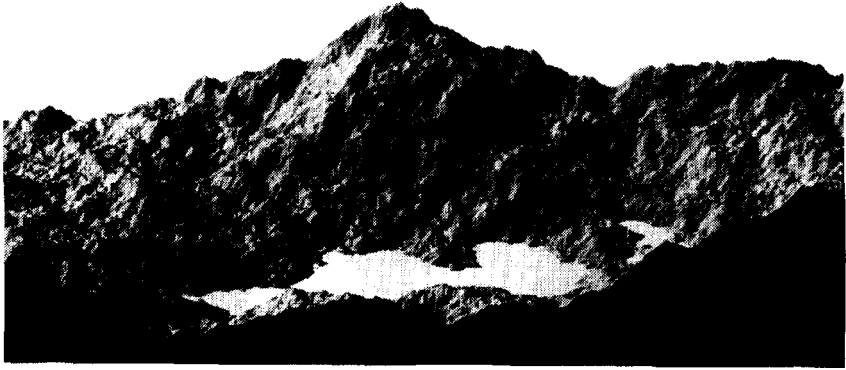


FIGS. 374 y 375. *Paisajes lacustres brownianos, ordinario y fraccionario (dimensiones comprendidas entre  $D \sim 2,1$  y  $D = 5/2$ , en el sentido de las agujas del reloj)*

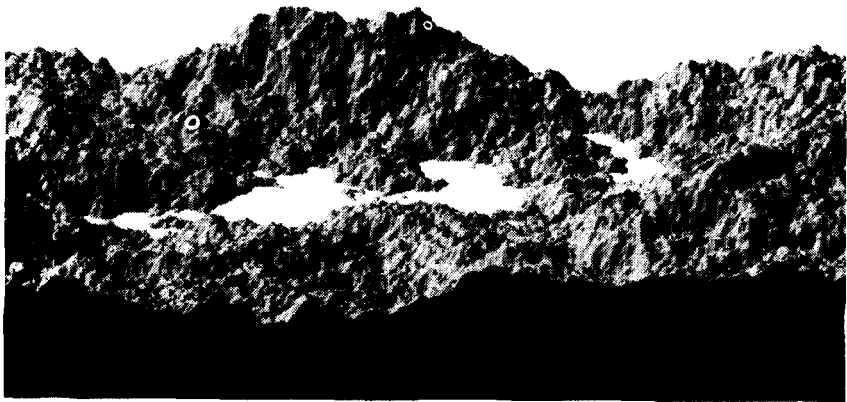
La figura superior de la lámina 375 es un ejemplo de relieve browniano fraccionario de dimensión bastante próxima a 2, y es mi modelo de paisaje terrestre. Las otras figuras extrapolan el mismo modelo a valores de  $D$  mayores, acabando en la parte superior de la lámina 374 con un relieve browniano ordinario sobre el plano. Este tiene la característica específica de que todas sus secciones verticales son funciones brownianas ordinarias de una variable real, como las de la lámina 340. Un relieve browniano es un mal modelo de Tierra, pues es demasiado irregular en los detalles. La mala calidad del modelo se cuantifica por el hecho de que tanto la dimensión de su superficie,  $D = 5/2$ , como la de sus costas,  $D = 3/2$ , son demasiado grandes.

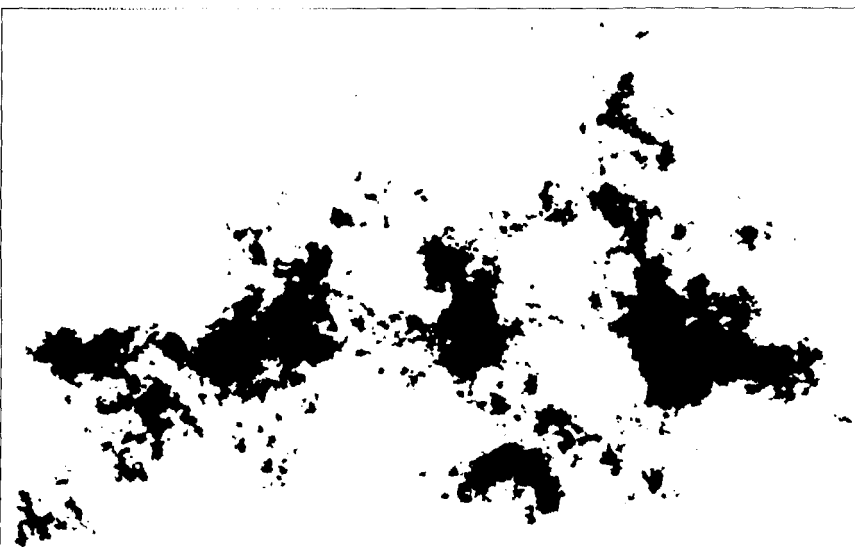






En cada paisaje la altura se calcula según las latitudes y longitudes de una cuadrícula. Se ha programado el ordenador para que simule una iluminación procedente de una fuente situada  $60^\circ$  a la izquierda, mientras que el observador está situado  $25^\circ$  sobre el nivel de la base. Para más detalles, véanse los pies de figura de las ilustraciones en color.





FIGS. 376 y 377. *Costas brownianas y «cadenas» de islas*

La primera intención de estas láminas era subrayar un efecto muy importante descubierto recientemente. Cuando la  $D$  del relieve llega a 2,5 y supera este valor, hay una tendencia cada vez mayor a que el océano se descomponga en «mares» separados. Estos mares están comunicados entre sí, pero cada uno tiene una individualidad bien marcada. Por otra parte, las islas parecen formar «cadenas». El mismo efecto es visible (aunque no tan claramente) en las crestas que se forman en todos los «paisajes»: láminas 374, 375 y 383.

Esta falta de isotropía en las muestras es plenamente compatible con el hecho de que el mecanismo que las genera sea isótropo.

Estas láminas son equivalentes (aparte de la semilla) a las secciones planas de los copos de las láminas 25 y 26 (que se explican al final del capítulo 29). Aquí, como en las láminas 25 y 26, empleamos una versión recortada de un periodo de una variante periódica del proceso que nos interesa. Esto disminuye la dependencia en  $D$  de la forma global. Las formas globales de las costas brownianas verdaderas difieren más de lo que muestran estas láminas.

En los capítulos 34 y 35 se comenta un efecto relacionado con estas cadenas.

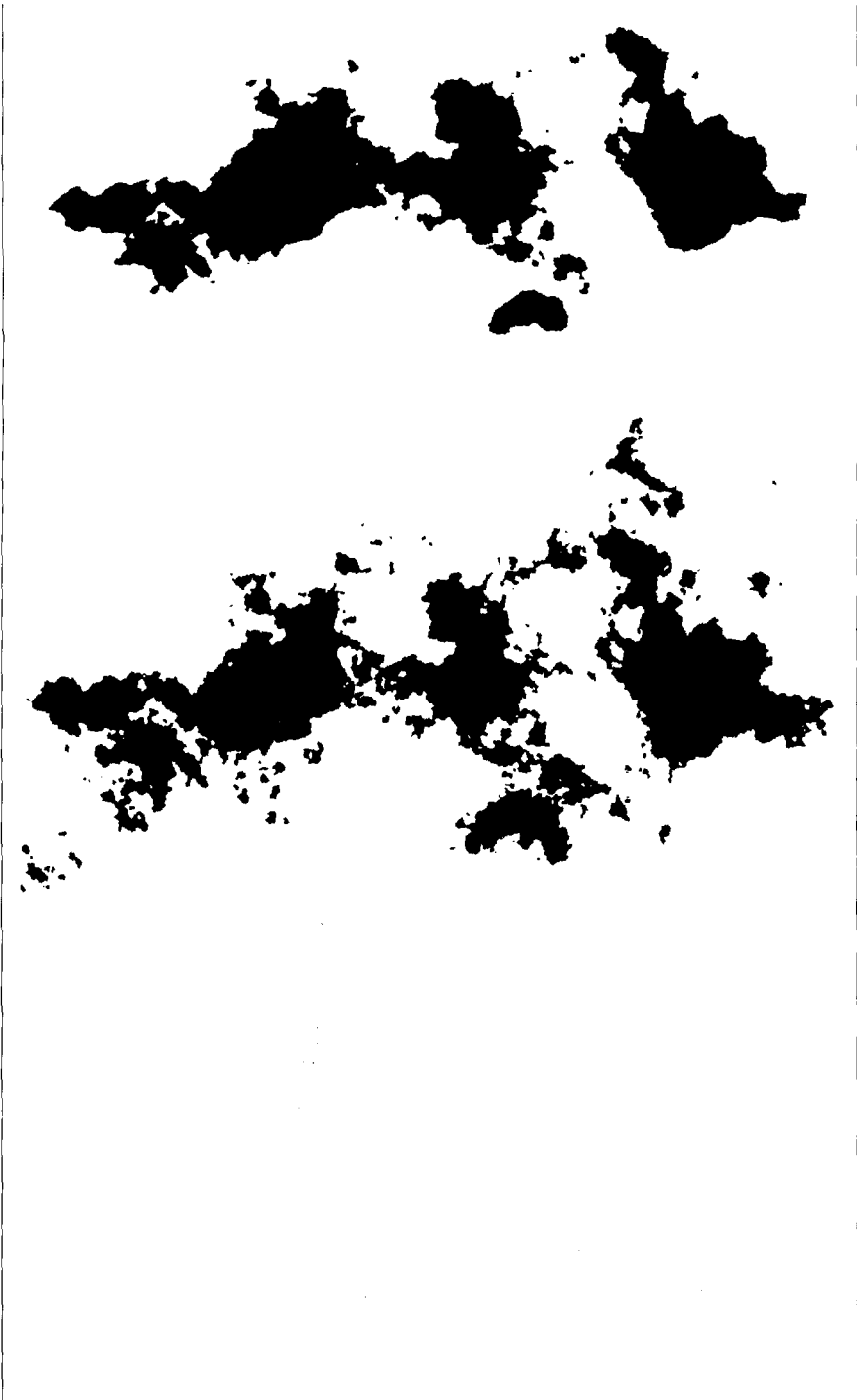


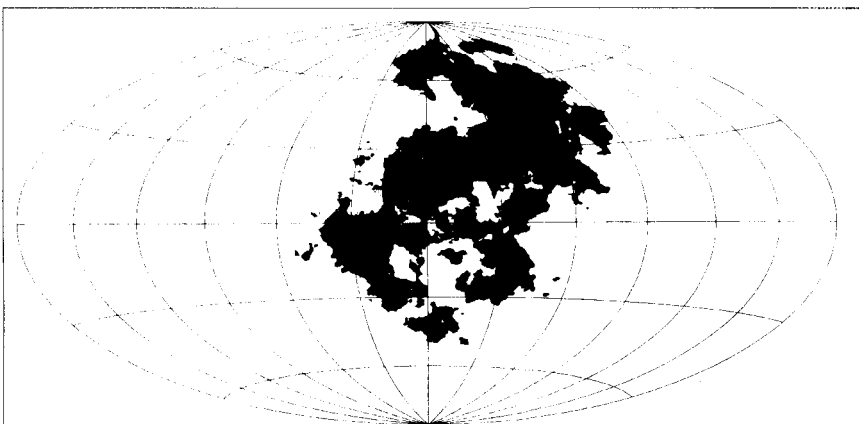


FIG. 378. *Curvas de nivel de paisajes brownianos fraccionarios*

Las dos figuras de esta lámina combinan dos o tres curvas de nivel (las líneas gruesas son las costas) de funciones brownianas fraccionarias. Las figuras corresponden a dimensiones distintas, pero se han realizado con el mismo programa y la misma semilla: para la figura superior  $D \sim 1,333$ , y para la inferior  $D \sim 1,6667$ . A primera vista ambas dimensiones son creíbles por lo que respecta a la geografía, pero una está en la banda superior y la otra en la inferior.

Estas curvas parecen mucho menos «escabrosas» que sus análogas de la lámina 377 con la misma  $D$ . La causa es que en las láminas anteriores cada sección presenta un máximo muy marcado, y no hay una pendiente sistemática. Aquí, por el contrario, vemos la *ladera* de una gran montaña con una pendiente global muy marcada. En su aspecto «genérico» esta lámina se parece a una versión ampliada de un trozo pequeño, especialmente escabroso, de la lámina 377.

Comparando estas diferentes curvas de nivel nos vamos dando cuenta del amplio margen intermedio entre la irregularidad y la fragmentación, incluso para una  $D$  fija.



FIGS. 379 y C9 (superior). *Pangea browniana*  
(dimensión de la costa  $D = 3/2$ )

El «planeta distante» de la lámina C9 representa una *Pangea* fractal imaginaria vista desde lejos en el espacio. El relieve se generó simulando con un ordenador (y por lo que yo sé, por primera vez) una superficie aleatoria debida a Paul Lévy: una función browniana real (la altura) de los puntos de la esfera (la latitud y la longitud). El nivel del mar se ajustó de modo que tres cuartas partes del área total estuvieran cubiertas por las aguas. La costa se obtuvo por interpolación.

Esta lámina muestra un mapa de Hammer de la misma *Pangea*, la proyección preferida por los estudiosos de la teoría de Wegener de la deriva de los continentes.

¿Hasta qué punto este modelo de *Pangea* se parece al «real»? No es de esperar que los detalles locales concretos sean correctos, sino sólo el grado de ondulación, tanto local como global. El parecido es imperfecto, como era de esperar. En efecto, la costa de este modelo de *Pangea* tiene  $D = 3/2$ , mientras que los grabados imaginarios de los libros de geología atribuyen a la *Pangea* real la misma  $D$  que se observa en los continentes actuales,  $D \sim 1,2$ . Si nuevos datos resultaran compatibles con  $D = 3/2$ , se podría explicar la geometría de la *Pangea* mediante hipótesis tectónicas bastante elementales.

FRACTALES EN UN ESPACIO NO EUCLÍDEO. En la geometría no euclídea de Riemann, la esfera interpreta el papel del plano. Así, las geometrías no euclídeas están a mitad de camino: estudian figuras euclídeas en un sustrato no euclídeo. El grueso de este ensayo también está a mitad de camino, al estudiar figuras no euclídeas en un sustrato euclídeo. En la *Pangea* que hemos considerado aquí confluyen ambas generalizaciones: es un ejemplo de figura no euclídea en un sustrato no euclídeo.

FIG. 371. *Los primeros ejemplos que se conocen de costas brownianas (ordinarias y fraccionarias).*

Mi pretensión de que las funciones brownianas fraccionarias convenientemente elegidas sirven como modelos razonables del relieve terrestre se basó originariamente en estos cuatro modelos de costas. Al igual que la lámina 379, son un saldo sentimental de mi ensayo en francés de 1975, excepto porque las zonas en negro estaban rellenas allí con más cuidado, con lo que representaban mejor los detalles del original.

Cuando  $D$  es próxima a 1 (figura superior) la costa es demasiado recta para ser realista.

Por otra parte, la costa correspondiente a  $D = 1,3000$  (segunda figura empezando por arriba) nos recuerda mucho un atlas real. Encontramos una reminiscencia inequívoca de África (en la isla grande de la izquierda), de Sudamérica (también en la isla de la izquierda, aunque en imagen especular) y de Groenlandia (isla grande de la derecha si giramos la parte superior de la página, de las doce a las nueve). Finalmente, si giramos la página hasta las tres, ambas islas parecen una Nueva Zelanda desnutrida con una isla Bounty doble.

Cuando  $D$  aumenta hasta  $3/2$  (tercera figura) este juego del atlas resulta más difícil de jugar.

Cuando  $D$  aumenta acercándose más a 2 (figura inferior) el juego geográfico se hace aún más difícil, o por lo menos más especializado (¿Minnesota? ¿Finlandia?). Y al final se hace imposible.

Otras semillas dan el mismo resultado. Aunque los mismos tests basados en gráficos más afinados abogan por  $D \sim 1,2000$ .

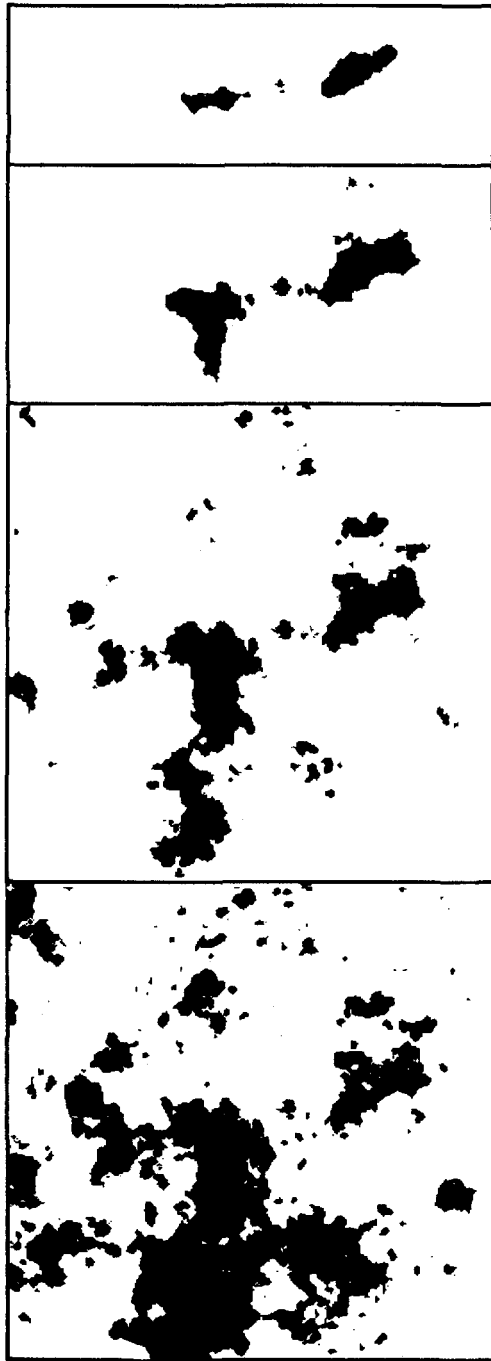


FIG. 383. *Los primeros ejemplos que se conocen de islas brownianas fraccionarias (dimensión  $D = 2,3000$ ).*

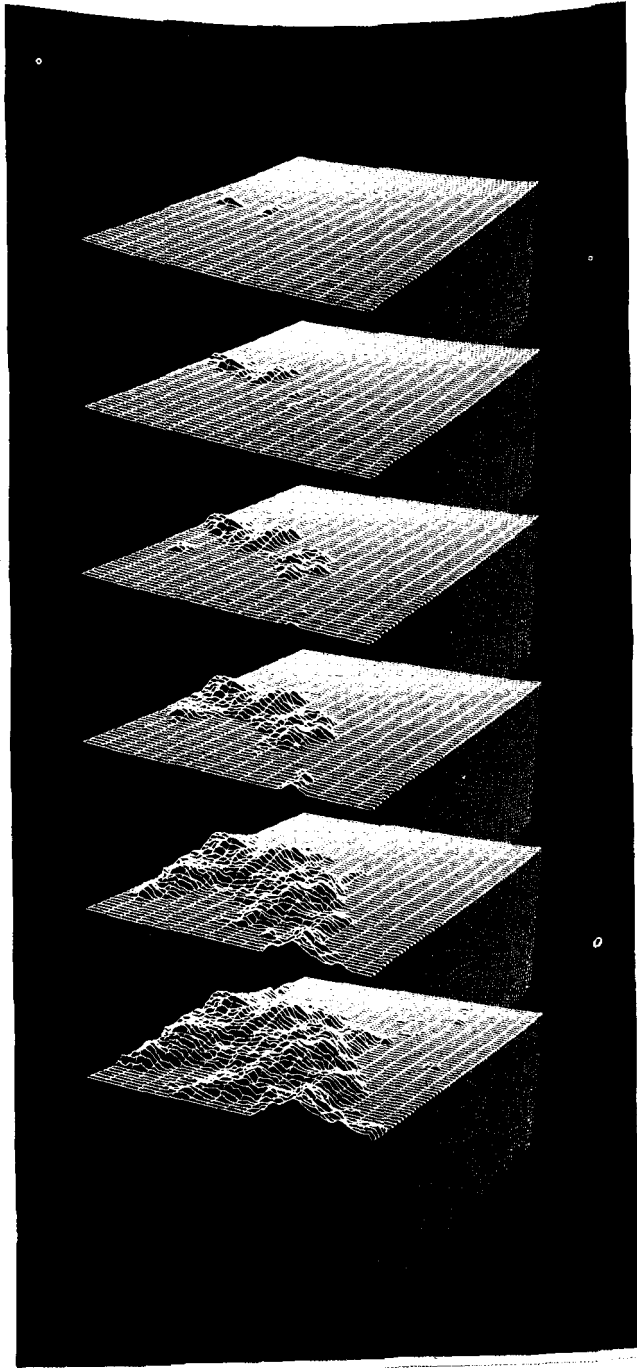
El hecho de incluir esta lámina puede que se deba a un ataque de sentimentalismo, pues no dice nada que no se haya expresado mejor en otras láminas. Pero estas vistas de una isla con un nivel del mar variable fueron presentadas en Mandelbrot (1975w) y en mi ensayo de 1975, y me gustan. Formaban parte de una secuencia completa de islas brownianas fraccionarias con distintos valores de  $D$  y niveles del mar variables. Fue la primera vez que se dibujaban islas como estas. (En 1976 realizamos una película de esta isla concreta emergiendo del mar; en 1981 la película parece ya de un primitivismo ridículo, aunque pudiera tener valor museístico.)

En muchas ocasiones me pongo a pensar en qué viaje he visto efectivamente la vista de la figura inferior, con sus pequeñas islas dispersas como semillas en el extremo de una península estrecha.

La ilustración original era una fotografía de un tubo de rayos catódicos al que le faltaba nitidez; por tanto los datos han tenido que volverse a procesar. Aquí (a diferencia de las láminas 374 y 375, y de la C9 a la C15) no hace falta simular una iluminación determinada. Por suerte o por desgracia, el mismo proceso gráfico antiguo crea la impresión de que el mar brilla en la profundidad del horizonte.

El lector observará que, en comparación con los paisajes más recientes, esta lámina presenta una dimensión sorprendentemente grande. Ello es debido a que las técnicas gráficas primitivas no eran capaces de representar los pequeños detalles, por lo que la dimensión de los paisajes primitivos parecía menor que la  $D$  introducida en los programas que los generaban. Para compensar, aumentábamos la  $D$  por encima de la gama que nos sugerían los datos. Al mejorar los gráficos, no obstante, el sesgo se hacía notorio y resultaba contraproducente. En la actualidad hemos llegado a un punto en que las dimensiones sugeridas por los datos de Richardson dan unos paisajes perfectamente aceptables.





Como ya avanzamos en el capítulo anterior, seguiremos profundizando en mi modelo browniano del relieve. Por lo que respecta a las áreas de las islas, las consecuencias resultan bastante aceptables, pero *no* lo son en lo que se refiere a lagos y hondonadas. Avanzaremos un modelo mejorado con objeto de corregir esta discrepancia.

#### *Las áreas proyectivas de las islas*

Como señalábamos en el capítulo 13, la variabilidad de las áreas proyectivas  $A$  de las islas oceánicas es una característica obvia de los mapas, que a menudo es más chocante que la forma de las costas. Allí explicábamos que Korčak (1938) propone una distribución hiperbólica:  $Pr(A > a) = Fa^{-B}$ . (En el presente contexto reemplazaremos  $Nr$  por  $Pr$ .) Finalmente demostrábamos que este resultado empírico vale siempre que la costa sea autosemejante. Ahora estamos en condiciones de añadir que basta con suponer que el relieve es autosemejante.

No cabe duda de que la relación  $2B=D$  en las costas de Koch no aleatorias del capítulo 13 se puede generalizar a los conjuntos de ceros de las funciones brownianas fraccionarias. Pero los argumentos son, por ahora, parcialmente heurísticos. La distribución correspondiente al relieve browniano fraccionario con  $H=0,800$  se ajusta realmente bien a los datos empíricos referidos a toda la Tierra.

#### *Áreas proyectivas de los lagos*

Se afirma que las áreas de los lagos siguen también la distribución hiperbólica, lo que podría llevar a despacharlos sin más, como si no introdujeran ningún elemento nuevo. Sin embargo, si se piensa un poco más,

uno se da cuenta que las definiciones de isla y lago no son ni mucho menos simétricas.

El análisis específico que se esboza en este capítulo aclara muchas cuestiones referentes a dos sustitutivos de los lagos: las «depresiones» y las «hondonadas». Y nos enfrenta al hecho de que, en la naturaleza, los árboles fluviales y las cuencas son asimétricos, pero no ocurre lo mismo con ninguno de mis modelos brownianos. Por tanto, este análisis sugiere la necesidad de mejorar estos últimos.

Pero la distribución de las áreas lacustres sigue siendo un misterio. Quizá el hecho de ser hiperbólica se deba simplemente a la «resistencia» de la distribución hiperbólica a diversas formas de tortura (Mandelbrot 1963e y capítulo 38). Así, por ejemplo, el producto de un multiplicando aleatorio hiperbólico por un multiplicador bastante arbitrario es, generalmente, hiperbólico. El multiplicando puede deberse a un estado primitivo en que el relieve y casi todo lo relativo al mismo es hiperbólico. Y el multiplicador puede deberse a mil factores geológicos y tectónicos que afectan a la forma de los lagos. Sin embargo, esta «explicación» es puramente especulativa.

### *El concepto de depresión*

El concepto simétrico al de una isla marina es el de una región, rodeada por un continente, por debajo del nivel del mar. Tales regiones se denominan *depresiones*. Algunas de ellas contienen agua, normalmente sin alcanzar el nivel del mar, como, por ejemplo, los mares Muerto (con agua hasta -430 m), Caspio (-30 m) y Salton (-80 m). Otras depresiones son secas, como el Valle de la Muerte (con un desnivel máximo de -90 m) o la depresión de Qattara (-145 m). Tenemos también el caso intermedio de los Países Bajos.

No dispongo de información acerca de las áreas proyectivas encerradas por las curvas de nivel cero de las depresiones, y tampoco sé como obtenerla. Pero echando una ojeada a los mapas se tiene la impresión de que las depresiones son menos numerosas que las islas. En el contexto del modelo de una Tierra plana con un relieve browniano de dos variables, esta asimetría es de esperar. El hecho de que las distribuciones de islas y depresiones tengan el mismo exponente significa que, ordenando las áreas de mayor a menor, el área de la décima isla y el área del décimo lago guardan aproximadamente la misma proporción que el área de la vigésima isla y el vigésimo lago. Pero en la ley de Korčak interviene también un factor  $F$  que fija el valor *absoluto* de las áreas de la décima isla y

el décimo lago. Una inspección comparativa de las diversas láminas revela claramente que en el caso de un continente rodeado por el océano el factor  $F$  es mayor para las islas que para las depresiones (y viceversa). Y en el modelo browniano sobre la esfera, el área menor (*Pangea*) está más disgregada que la mayor (*Pantalasia*).

Pero el razonamiento anterior no nos aclara nada sobre los lagos; salvo raras excepciones carentes de interés (como las zonas de marisma, las depresiones y los lagos son cosas distintas. La altitud del lecho de un lago no tiene por qué ser  $z < 0$ , así como tampoco tiene por qué ser  $z = 0$  el nivel de su superficie. Y aún hay más complicaciones: la mayoría de los lagos se llenan hasta el borde, que es un punto de silla, pero esta regla también admite excepciones (por ejemplo, el Gran Lago Salado y los lagos que suele haber en los fondos de las depresiones citadas al principio de esta sección).

### *El concepto de hondonada*

Pasemos ahora a estudiar un segundo sustitutivo de los lagos, que designaremos con el término geométrico neutro de *hondonada*.

Para definir este concepto, pensemos en un paisaje impermeable en el que todos los hoyos estén llenos exactamente hasta el borde. Para salir de un hoyo, una gota de agua tiene que subir primero y luego bajar. Pero si añadimos una gota de agua a este paisaje, se escapará siguiendo un camino nunca ascendente, sino descendente u horizontal. Cada hoyo tiene un área no nula, por tanto el número de hoyos es finito o infinito numerable. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que los distintos desagües tienen altitudes distintas. La línea de nivel correspondiente a la altitud de un cierto desagüe estará formada por un cierto número de bucles que no se tocan, más otro bucle con un punto de autocontacto. A una altitud ligeramente inferior dicho bucle se divide en dos, con el menor encajado en el mayor.

Cuando los hoyos de la construcción anterior están llenos los llamaremos hondonadas.

### *Las terrazas del diablo*

Supongamos ahora que estamos considerando un relieve browniano con  $0 < H < 1$ . Debido a la autosemejanza, las áreas de las hondonadas siguen sin duda una distribución hiperbólica. Si  $D$  no es demasiado mayor que 2, el exponente de la distribución de las áreas es próximo a 1.

Concretando más, mi conjetura es que una gota de agua que caiga al azar es casi seguro que caerá en una hondonada. Si esta conjetura es correcta, las superficies de las hondonadas constituyen una extrapolación agreste de las terrazas de los campos del sudeste asiático. Las llamaré *terrazas del diablo*. Los puntos que no caen dentro de las hondonadas forman líneas de costa acumulada y en conjunto constituyen una red ramificada, una variante aleatoria del tamiz de Sierpinski. Si me equivoco, y el área total de la costa es positiva en vez de nula (capítulo 15), mi conjetura alternativa es que hay una hondonada arbitrariamente cerca de cualquier punto que no pertenezca a ninguna hondonada.

### *Modelo browniano erosionado: mezcla de cerros y llanuras planas*

No puedo resistirme ahora a modificar mis modelos brownianos imaginando que todas las hondonadas de un terreno browniano  $B_H$  se llenan de barro y se convierten en llanuras planas. No hace falta que ilustremos gráficamente la función  $B^*_H$  resultante, pues en los casos interesantes, en que  $D$  no es demasiado mayor que 2, el relleno de las pequeñas hondonadas no produce demasiados cambios visibles. Para conseguir barro con el que llenar las hondonadas, la erosión tiene que desgastar los cerros; aunque, como veremos, (si  $D$  no es mucho mayor que 2) no hace falta una cantidad muy grande de barro, y por tanto se puede suponer que la forma de los cerros cambiará poco. El hecho de que la erosión desgaste los puntos de silla por los que desaguan las hondonadas no es tratable en este contexto.

Desde el punto de vista de esta obra, una de las principales virtudes de la modificación que proponemos es que, si se escoge convenientemente el nivel del mar, el relieve browniano erosionado sobre una Tierra plana sigue siendo escalante. Pero ¿qué efecto tiene esa erosión sobre la dimensión? Hay evidencias de que la dimensión de  $B^*_H$  se sitúa entre 2 y la dimensión  $3-H$  de  $B_H$ .

Razonemos ahora por qué la cantidad relativa de material necesaria para llenar todas las hondonadas no es grande en el caso  $D=2+\varepsilon$ . El volumen del terreno tiene un orden de magnitud de (longitud típica de la proyección de la tierra firme) $^{2+H} \propto$  (tierra firme) $^{1+H/2}$ . Como el área relativa sigue una distribución hiperbólica de exponente próximo a 1 y  $\Sigma(\text{área relativa})=1$ , se deduce que  $\Sigma(\text{área relativa})^{1+H/2}$  es bastante pequeña. Las excepciones corresponden a casos en los que la hondonada mayor es sumamente grande; y no hace falta llenar tales hondonadas, como en el caso del Gran Lago Salado.

## Ríos y cuencas fluviales

En una primera aproximación, que tuvo un papel central en el capítulo 7, he sugerido que los ríos y las cuencas fluviales forman árboles conjugados que llenan el plano. De hecho, esta caracterización sólo es aplicable a los mapas; si se tiene en cuenta la altitud, esa bella simetría entre los árboles fluviales y las cuencas queda automáticamente destruida. En efecto, si no tenemos en cuenta los lagos, los puntos de una cuenca son *siempre* o bien máximos locales (colinas) o bien puntos de silla (pasos), mientras que los puntos de un árbol fluvial *nunca* son mínimos locales ni puntos de silla. El hecho de que los modelos browniano y browniano fraccionario *sí* tengan mínimos locales implica que *no* tienen árboles fluviales. Este es un buen golpe contra mis modelos brownianos.

Una vez se han llenado las hondonadas, no hay ríos propiamente dichos, sólo cadenas ramificadas de lagos poco profundos, que nos recuerdan cactus con ramas en forma de disco. Las cuencas forman un árbol, que en mi opinión es una curva ramificada con  $D < 2$ , aunque bien podría ser una curva de área positiva, y por tanto de dimensión  $D = 2$ . Se imponen diversas variantes más elaboradas, pero es mejor guardarlas para mejor ocasión.

### Propiedades de las hondonadas

Para situar en la perspectiva adecuada las afirmaciones hechas en una sección anterior, estudiaremos primero la reducción unidimensional del problema, a saber, una función browniana fraccionaria real de una variable real  $B_H(x)$ . En este caso, una isla es simplemente un intervalo  $[x', x'']$  en el que  $B_H(x) > 0$  cuando  $x' < x < x''$ , mientras que  $B_H(x') = B_H(x'') = 0$ . Designemos por  $x = x_0$  el punto en el que  $B_H(x)$  alcanza el valor máximo (los casos en que hay varios máximos  $x_0$  tienen probabilidad nula), y definamos  $B_H^*(x)$  de manera que:

$$\begin{aligned} \text{para } x \text{ en } [x', x_0], B_H^*(x) &= \max_{x' \leq u \leq x} B_H(u) \\ \text{para } x \text{ en } [x_0, x''], B_H^*(x) &= \max_{x \leq u \leq x''} B_H(u). \end{aligned}$$

Resulta claro que  $z \geq B_H^*(x)$  es una condición necesaria y suficiente para que una gota que parte del punto  $(x, z)$  pueda llegar al mar siguiendo un camino nunca ascendente. Las gotas para las que  $B_H(x) < z < B_H^*(x)$  quedarán atrapadas, y  $z = B_H^*(x)$  es el nivel de agua que se alcanza cuando se han llenado todas las hondonadas. Esta función  $B^*$  es simple-

mente una escalera del diablo de Lévy (láminas 405 y 406) que sube de  $x'$  a  $x_0$ , empalmada con otra escalera que baja de  $x_0$  a  $x''$ . Es continua y no diferenciable, y varía sobre un conjunto de longitud nula. Cualquier gota de agua en la proximidad del punto más elevado de la tierra firme bajará hasta el mar siguiendo un camino que alterna regiones planas con regiones cuesta abajo.

Las gotas que no pueden escapar llenan el dominio  $B_H(x) \leq z \leq B_H^*(x)$ . Se trata de un dominio inconexo, pues no hay puntos en los que  $B_H^*(x) = B_H$ , y sus partes conexas son las hondonadas del terreno. La longitud de una hondonada es la distancia entre dos ceros consecutivos de  $B_H^* - B_H$ . Su distribución es hiperbólica, debido a la propiedad escalante; se sabe que el exponente es  $1/2$  cuando  $H = 1/2$ , y yo estoy convencido de que siempre es  $H$ . La longitud de la hondonada más larga, dividida por  $|t' - t''|$ , es mayor cuanto más próxima a 0 está  $H$  y menor cuanto más próxima a 1.

Volvamos ahora al terreno browniano  $B_H(x, y)$ , sobre una Tierra plana. La función  $B_H^*(x, y)$  se define también con la condición de que una gota de agua que parta de una altura  $z > B_H^*(x, y)$  pueda escapar al mar siguiendo un camino no ascendente que discurra por encima de nuestro terreno. Como antes, el dominio espacial en que  $B_H(x, y) < z \leq B_H^*(x, y)$  se descompone en dominios abiertos conexos que definen las hondonadas.

Comparemos ahora estas hondonadas con las de una rebanada muy fina de nuestro terreno, comprendida entre dos paredes verticales paralelas en  $y=0$  y  $y=\varepsilon$ . Apliquémosle la notación anterior  $B_H(x)$  y  $B_H^*(x)$ . La definición de  $B_H^*(x)$  obliga al agua a escapar por un camino comprendido entre las paredes citadas, pero la definición de  $B_H^*(x, 0)$  permite elegir entre una gama más amplia de caminos de escape. De ahí se deduce que, casi para todo  $x$ ,  $B_H^*(x, 0) < B_H^*(x)$ . Por tanto, la función  $B_H^*(x, 0)$ , o cualquier otra sección vertical de  $B_H^*(x, y)$ , es mucho más interesante que  $B_H^*(x)$ . Se trata de una función singular endiabladamente «atterrazada» con (una infinidad de) máximos locales muy pronunciados y mínimos locales planos. Si mi conjetura fuerte es válida, éstos cubren casi todos los puntos del terreno.

Como la suma de las áreas de las hondonadas es, como mucho, igual al área del terreno, se pueden ordenar según áreas decrecientes y, por tanto, son numerables. Como consecuencia de ello, la costa de  $B_H$  correspondiente a un valor aleatorio de  $z_0$  carece, casi con toda seguridad, de puntos dobles.

El contorno acumulado de todas las hondonadas puede obtenerse, pues, del modo siguiente. Tómese un conjunto numerable de valores  $z_m$

(que casi seguramente no incluirán valores cuya costa tenga un bucle). Corríjanse las costas borrando los contornos de las depresiones de todos los  $z_0 = z_m$ . Tómese la reunión de las costas corregidas y añádanse los puntos límite.

La generalización a funciones brownianas de  $M$  variables  $x = \{x_1, \dots, x_M\}$  con  $M > 2$ , es inmediata. Dado  $B_H(x)$ , el mismo argumento empleado para  $M=2$  prueba que la diferencia entre  $B^*_H$  y  $B_H$  disminuye al aumentar  $M$ . En el caso límite en que  $M = \infty$  y  $B_H$  es una función browniana sobre un espacio de Hilbert, se deduce a partir de resultados clásicos de Paul Lévy que  $B^*_H - B_H \equiv 0$ . ¿Vale esta identidad para todos los  $M > M_{\text{crit}}$  con  $M_{\text{crit}} < \infty$ ?



Este capítulo culmina con una explicación de las láminas 25 y 26. El texto se dedica en primer lugar a las funciones brownianas fraccionarias de 3 variables, con un exponente antipersistente  $H < 1/2$ . El caso  $H = 1/3$  recibe especial atención, mientras que  $H = 1/2$  sirve como otras veces de punto de partida.

#### *Isosuperficies de un escalar en un fluido turbulento*

En un fluido turbulento, la superficie isoterma en la que la temperatura vale exactamente  $7^{\circ}\text{C}$  es, topológicamente hablando, una colección de esferas. Sin embargo, resulta obvio que esta superficie es, con mucho, más irregular que una esfera o que el contorno de cualquier sólido descrito por la geometría euclídea.

Nos recuerda la cita de Perrin del capítulo 2, donde se describe la forma de un copo coloidal obtenido echando sal en una solución jabonosa. El parecido puede ir más allá de la simple analogía geométrica. Podría ser que cada copo llenara la zona donde la concentración de jabón superara determinado umbral, y que además esta concentración hiciera las veces de marcador inerte de una turbulencia muy madura.

Sea como fuere, la analogía con los copos coloidales nos sugiere que las superficies isoterma son fractales aproximadas. Queremos saber si esto es efectivamente así y, en tal caso, evaluar su dimensión fractal. Para ello tenemos que conocer la distribución de cambios de temperatura en un fluido. Corrsin (1959d), entre otros, reduce la cuestión a un problema clásico, que fue tratado por Kolmogorov y otros en los años cuarenta. En parte, estos autores pioneros llegaron extraordinariamente lejos, y en parte fracasaron. En atención a los no especialistas en el tema, introducimos aquí una visión general de estos resultados clásicos.

### *La delta variancia de Burgers*

La delta variancia de  $X$  se ha definido en el capítulo 21 como variancia de un incremento de  $X$ . J. M. Burgers supuso que la delta variancia de la velocidad entre dos puntos dados  $P$  y  $P_0 = P + \Delta P$  es proporcional a  $|\Delta P|$ . Este postulado, tosco pero simple, define la *turbulencia de Burgers*.

Un modelo matemático preciso de función de Burgers es la función de Poisson resultante de una colección infinita de pasos con direcciones, posiciones e intensidades dadas por tres sucesiones infinitas de variables aleatorias mutuamente independientes. Esta descripción debería sonarnos a algo. Aparte de la adición de la variable  $z$  a las  $x$  e  $y$ , y la sustitución de la altura (unidimensional) por la velocidad (tridimensional), ya he empleado una función de Burgers gaussiana en mi modelo browniano de superficie terrestre del capítulo 28.

### *La delta variancia de Kolmogorov*

Como modelo de turbulencia, la delta variancia de Burgers presenta defectos mortales. El peor de ellos es que es incorrecta desde el punto de vista del análisis dimensional. Un argumento dimensional correcto, adelantado por Kolmogorov y desarrollado simultáneamente por Oboukhov, Onsager y von Weiszacker, prueba que sólo hay dos posibilidades para la delta variancia. O bien es universal, esto es, la misma con independencia de las condiciones experimentales, o es un lío tremendo. En el primer caso, la delta variancia debe ser proporcional a  $|\Delta p|^{2/3}$ . Hay deducciones de este resultado en muchos libros, y su naturaleza geométrica se pone especialmente de manifiesto en Birkhoff (1960).

Después de algunos titubeos, quedó claro que la delta variancia de Kolmogorov describe sorprendentemente bien la turbulencia del mar, la atmósfera y de cualquier recipiente grande (véase Grant, Stewart y Moillet, 1959). Esta constatación representa un triunfo sorprendente del pensamiento abstracto a priori sobre la confusión de los datos experimentales. Y, a pesar de sus muchas restricciones (a las que el capítulo 10 añade otras nuevas), merece ser conocida fuera del círculo de los especialistas.

La función gaussiana con la delta variancia de Kolmogorov también nos suena a algo. En el contexto que nos ocupa, relacionado con una temperatura escalar (unidimensional), esta función gaussiana es una función browniana fraccionaria real de tres variables con  $H = 1/3$ . Así pues, el campo de Kolmogorov presenta antipersistencia, mientras que el relieve terrestre tiene persistencia. Otra diferencia más fundamental es que,

mientras la  $H$  necesaria para representar los datos del relieve es puramente fenomenológica, el valor  $H=1/3$  de Kolmogorov tiene su origen en la geometría del espacio.

*Las isosuperficies de la turbulencia homogénea son fractales*  
(Mandelbrot, 1975f)

A pesar de su éxito en la predicción de  $H=1/3$ , el método de Kolmogorov tiene un defecto importante: no dice nada de la distribución de velocidades o temperaturas en un fluido, aparte de que no puede ser gaussiana.

Un resultado negativo como este es lamentable, pero rara vez es razón suficiente para abandonar una hipótesis que por lo demás es buena. Como mucho, los que estudian la turbulencia tienen que tomar algunas precauciones al investigar un modelo gaussiano. Si el resultado de un cálculo es lógicamente imposible hay que abandonar dicho modelo; si no, se puede seguir adelante.

En particular —y volviendo a la temperatura— Mandelbrot (1975f) combina la hipótesis gaussiana con las delta varianzas de Burgers y de Kolmogorov. Se puede suponer que las conclusiones seguirán siendo válidas sin la hipótesis gaussiana, pues para obtenerlas se ha supuesto poco más que la continuidad y la autosemejanza.

En el espacio cuadridimensional de coordenadas  $x, y, z, T$ , la temperatura  $T$  define una función  $T(x, y, z)$ . El grafo de una función browniana fraccionaria es un fractal de dimensión  $4 - H$ , y muchas de sus secciones fractales ya las conocemos bien.

SECCIONES LINEALES. La isoterma correspondiente a  $T_0$ , con  $y_0$  y  $Z_0$  fijas, está formada por los puntos de un eje espacial en los que se observa un determinado valor de  $T$ . Forman un conjunto de ceros de una función browniana fraccionaria de dimensión  $1 - H$ .

SECCIONES PLANAS. Con  $x_0$  y  $z_0$  fijas, la curva que representa la variación de temperatura a lo largo del eje  $x$  es una función browniana fraccionaria real de una variable, y su dimensión es  $2 - H$ . Con  $z_0$  y  $T_0$  fijas, la ecuación implícita  $T(x, y, z_0) = T_0$  define una isoterma en un plano. Su dimensión es  $2 - H$  y, aparte del valor de  $D$ , son idénticas a las costas que estudiábamos en el capítulo 28.

SECCIONES ESPACIALES. Con  $z_0$  fija, la sección es el grafo de  $T(x, y, z_0)$ , un fractal de dimensión  $3 - H$ . Para  $H=1/2$  su definición es idéntica a la del relieve browniano de las láminas del capítulo 28. Para  $H=1/3$  es un relieve browniano fraccionario como los que aparecen en esas mismas láminas.

### *Explicación de las láminas 25-26*

Para  $T_0$  fijo, la isosuperficie definida por la ecuación implícita  $T(x, y, z) = T_0$  es una generalización tridimensional de las costas, e introduce un nuevo tipo de fractal de dimensión  $D = 3 - H$ . Por tanto, en la turbulencia gaussiana no persistente de Burgers tenemos  $D = 3 - 1/2$ , y en la turbulencia gaussiana antipersistente de Kolmogorov,  $D = 3 - 1/3$ .

En la lámina 26 se ilustran estas superficies, cuyo origen hemos podido explicar al fin. Para poder compararlas, en la lámina 25 presentamos la isosuperficie de una función  $T(x, y, z)$  persistente, con  $H = 0,75$ . Debido a la enorme dificultad de este cálculo, ha sido necesario alisar en exceso las superficies. El hecho de que las diferencias debidas a  $D$  afecten la forma global menos drásticamente de lo esperado se explica en la página 376.

X  
Tremas aleatorias; textura



La estructura de este grupo de capítulos es un tanto complicada. Los temas *tremas aleatorias* y *textura* no confluyen hasta el capítulo 35, donde se muestra cómo se puede controlar la textura. En el capítulo 34 se introduce la textura sin demasiada relación con las tremas, describiendo una serie de hechos que podrían haberse repartido entre capítulos anteriores, pero que es mejor presentar juntos para darles un tratamiento unificado.

Por lo que respecta a los capítulos 31 a 33, no tratan de la textura sino que, con el concepto de trema como base, se construyen fractales aleatorios, muchos de los cuales son nuevos. Y, al igual que los de capítulos (brownianos) anteriores, los nuevos fractales no están sujetos a ninguna trama espacial ni temporal.

En este capítulo se describen polvos aleatorios contenidos en la recta y se aplican al problema del ruido que comenzamos a tratar en el capítulo 8. En los capítulos 32 y 33, se los adereza para servir de base a dos generalizaciones: al plano y al espacio, respectivamente. El primer objetivo concreto de los capítulos 32, 33 y 35 es la preparación de un modelo de los cúmulos de galaxias, un reto que nos planteamos por primera vez en el capítulo 9.

#### *Errores condicionalmente estacionarios (Berger y Mandelbrot, 1963)*

En el capítulo 8 resultó interesante descubrir que un polvo de Cantor podía ser un modelo razonable de las principales características de ciertos ruidos excedentes. Pero ni siquiera intentamos ver hasta qué punto el modelo se ajustaba o no a los datos. La razón obvia es que esperábamos que el ajuste fuera terriblemente malo. Los polvos de Cantor son demasiado regulares para servir como modelos precisos de ningún fenómeno natural irregular que pueda venirme a la mente. En particular, sus razones

de autosemejanza están limitadas a los valores  $r^k$ . Además, en el polvo de Cantor el origen tiene un papel privilegiado que no se puede justificar y que tiene unas consecuencias de lo más desafortunado: el conjunto no es superponible a sí mismo por traslación o, en un lenguaje más técnico, no es invariante por traslaciones.

Es fácil inyectarle la irregularidad, por medios estocásticos. En lo que respecta a la invariancia por traslación, el sustituto que buscamos para el polvo de Cantor sólo deberá coincidir con su imagen por traslación en sentido estadístico. En términos probabilísticos, esto significa que el conjunto debe ser estacionario, o por lo menos satisfacer una condición de estacionariedad convenientemente relajada.

En el capítulo 23 se propone un camino simple para conseguir parte de este objetivo, pero aquí se avanzan tres pasos en dicho camino.

El primer paso está relacionado con el primer modelo aleatorio realista de la intermitencia. Berger y Mandelbrot (1963) parten de una aproximación finita del polvo de Cantor, con escalas comprendidas entre  $\varepsilon > 0$  y  $\Omega < \infty$ , y baraja los huecos al azar haciéndolos estadísticamente independientes. Los intervalos de longitud  $\varepsilon$  comprendidos entre dos huecos sucesivos no se tocan. En el capítulo 8 se demuestra que en un polvo de Cantor el número relativo de huecos de longitud mayor que  $u$  viene dado por una función escalonada cuasihiperbólica. La aleatorización reinterpreta dicha función como una distribución de probabilidad  $Pr(U > u)$ .

Esto nos da un polvo de Cantor aleatorizado con  $\varepsilon > 0$ . Por desgracia, la escalera de  $Pr(U > u)$  conserva aún la traza del valor original de  $N$  y de  $r$ . Este es el motivo por el cual Berger y Mandelbrot (1963) alisan esta escalera: para los distintos huecos, medidos en unidades de  $\varepsilon$ , se toman valores enteros positivos estadísticamente independientes, con la distribución de longitudes

$$Pr(U > u) = u^{-D}.$$

El modelo se ajusta sorprendentemente bien a los datos. Para los teléfonos de Alemania Federal se tiene  $D \sim 0,3$ , y estudios posteriores de otros autores para distintas líneas encuentran valores de  $D$  que van desde 0,2 hasta casi 1.

En el modelo de Berger y Mandelbrot, las duraciones de los sucesivos huecos son independientes, y por tanto los errores constituyen lo que los probabilistas llaman un proceso «recurrente» (Feller, 1950). Cada error es un punto de recurrencia cuyos pasado y futuro son estadísticamente independientes y siguen las mismas reglas en lo que respecta a los errores.



## *Polvos de Lévy lineales*

Desafortunadamente, el conjunto obtenido barajando los huecos del polvo de Cantor truncado (y alisando su distribución) aún tiene unos cuantos defectos: (a) el ajuste de la fórmula a los datos sobre ruidos excedentes es aún imperfecto en ciertos detalles, (b) la restricción a  $\varepsilon > 0$  puede ser aceptable para el físico pero, desde un punto de vista estético, es desagradable, (c) la construcción es incómoda y arbitraria, y (d) está muy lejos del espíritu de la construcción original de Cantor.

Mandelbrot (1965c) emplea un conjunto debido a Paul Lévy para construir un modelo más afinado en el que se evitan los defectos (a) y (b). Llamemos *polvo de Lévy* a este conjunto. Para una  $D$  dada, el polvo de Lévy es el único conjunto en el que se dan dos propiedades deseables. Como en el caso del polvo de Cantor truncado y aleatorizado, el pasado y el futuro de cualquier punto de dicho polvo son independientes. Como el polvo de Cantor, se trata de un fractal autosemejante. Y, mejor aún que el polvo de Cantor, este polvo de Lévy es estadísticamente idéntico a sí mismo contraído en un factor  $r$  arbitrario entre 0 y 1.

El conjunto de ceros de la función browniana (capítulo 25) resulta ser un polvo de Lévy con  $D = 1/2$ .

Desafortunadamente, el método seguido por Lévy para introducir este conjunto conserva los defectos (c) y (d) de la lista anterior. Técnicamente es una cuestión delicada: en vez de hacer que  $u$  se limite a valores enteros positivos, hay que dejar que tome cualquier valor real positivo, prolongando  $Pr(U > u) = u^{-D}$  para cualquier  $u > 0$ . Como  $0^{-D} = \infty$ , la «probabilidad» total es infinita. El método seguido para eliminar esta secuela, aparentemente ridícula, es importante e interesante, pero carece de otras aplicaciones para los objetivos de esta obra.

Por suerte estas dificultades desaparecen si se adopta una construcción por «tremas», más natural, propuesta en Mandelbrot (1972z).

## *Tremas activas y tremas virtuales*

Como cuestión previa, es útil describir el polvo de Cantor original por medio de una combinación de tremas «activas» y tremas «virtuales». Como antes, se parte de  $[0,1]$  y se le quita el tercio central  $]1/3, 2/3[$ . A partir de ahí la construcción es esencialmente la misma, aunque su descripción es formalmente distinta. En el segundo paso se quita el tercio central de cada tercio de  $[0,1]$ . Dado que quitar el tercio central del tercio central que ya hemos eliminado no tendrá ningún efecto visible, las tre-

mas virtuales proporcionan también un método conveniente. Del mismo modo, el proceso continúa por eliminación del tercio central de *cada* noveno de  $[0,1]$ , de *cada* veintisieteavo, etc. Nótese que ahora la distribución del número de tremas de longitud mayor que  $u$  viene dada por una función escalonada que globalmente se comporta como  $u^{-1}$  en vez de  $u^{-D}$ . La misma dependencia en  $u$  vale para las distintas reglas de la coagulación, excepto que tanto las posiciones de los escalones como el factor de proporcionalidad dependen del método de construcción.

### *Tremas en un intervalo y huecos resultantes (Mandelbrot, 1972z)*

Después, Mandelbrot (1972z) aleatoriza la construcción de Cantor eligiendo los escalones de la distribución y eligiendo al azar las longitudes y posiciones de las tremas, de manera que éstas sean mutuamente independientes. Por fin, para implementar la proporcionalidad a  $u^{-1}$ , se supone que el número esperado de tremas centradas en un intervalo de longitud  $\Delta t$  y con una longitud superior a  $u$  es igual a  $(1 - D_*) \Delta t/u$  y obedece a una distribución de Poisson. Dentro de poco se aclarará el porqué de la notación  $1 - D_*$ .

Al ser independientes, las tremas pueden intersectarse, y lo hacen con entusiasmo: la probabilidad de que una trema dada no tenga intersección con ninguna otra es nula. Dicho de otro modo, los conceptos de *trema* y *hueco* dejan de coincidir; el término *hueco* se reservará para los intervalos producidos por la superposición de tremas solapantes. Inmediatamente se plantea la pregunta de si todas las tremas acaban por reunirse en un enorme hueco o si, por el contrario, dejan algunos puntos por cubrir. Enseguida daremos la respuesta, que justificaremos en la sección siguiente mediante un razonamiento intuitivo sobre el proceso de nacimiento, y demostraremos que los puntos no recubiertos forman racimos espontáneamente.

Consideremos un intervalo que no esté completamente recubierto por tremas de longitud mayor que  $\epsilon_0$ , e introduzcamos luego tremas más pequeñas por encima de un umbral  $\epsilon$  variable que disminuye de  $\epsilon_0$  hasta 0. Si  $D_* \leq 0$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ , es casi seguro (la probabilidad tiende a 1) que no queda ningún punto por cubrir. Si  $0 < D_* < 1$ , puede darse también el mismo resultado, pero deja de ser seguro. Hay una probabilidad no nula de que quede por cubrir un «fractal por tremas», incluso en el límite. Mandelbrot (1972z) demuestra que se trata de un polvo de Lévy de dimensión  $D = D_*$ .

Resumiendo,  $D = \max(D_*, 0)$ .

*Un proceso de nacimiento y agregación espontánea  
en los polvos de Lévy*

Según la construcción del capítulo 8, los errores cantorianos se producen en una jerarquía de ráfagas o «agregados». La intensidad de la agregación se mide por el exponente  $D$ . Esta propiedad sigue siendo válida si los huecos se barajan al azar, pero la demostración no es ni brillante ni aclaratoria.

Por el contrario, la demostración del mismo resultado mediante el polvo de tremas aleatorias es simple e interesante por sí misma.

De nuevo la clave está en empezar con tremas de longitud mayor que un cierto umbral  $\varepsilon$ , y luego ir multiplicando  $\varepsilon$  por una  $r < 1$ , pongamos  $r = 1/3$ , haciendo que su valor tienda a 0. Empezamos con un intervalo sin tremas comprendido entre dos  $\varepsilon$ -huecos. La adición de tremas con longitudes comprendidas entre  $\varepsilon/3$  y  $\varepsilon$  tiene a veces el efecto devastador de eliminarlo todo. Pero hay una probabilidad bastante grande de obtener un efecto más suave: (a) los  $\varepsilon$ -huecos limítrofes se amplían para dar  $(\varepsilon/3)$ -huecos más largos, y (b) dentro del intervalo aparecen nuevos  $(\varepsilon/3)$ -huecos más pequeños. Los nuevos intervalos entre huecos se perciben inevitablemente arracimados. De modo análogo se generan subagregados sustituyendo  $\varepsilon/3$  por  $\varepsilon/9, \dots, 3^{-n} \varepsilon, \dots$

La evolución de estos agregados cuando  $n \rightarrow \infty$  se rige por un nuevo proceso de nacimiento y muerte. Como en la teoría clásica empleada en el capítulo 23, los agregados mueren o se multiplican con independencia de otros agregados del mismo  $n$  y de sus historias familiares. Un intervalo largo tiene menor probabilidad de ser eliminado que uno corto y, en promedio, acaba generando más hijos. Cuando  $1 - D_*$  aumenta, los intervalos entre  $\varepsilon$ -huecos se acortan. Además, algunos intervalos entre  $(\varepsilon/3)$ -huecos desaparecen por completo. Hay pues dos razones que hacen disminuir el número esperado de hijos. El valor  $D_* = 0$  es crítico, por cuanto para  $D_* < 0$  la línea familiar casi seguramente acaba por desaparecer, mientras que para  $D_* > 0$  hay una probabilidad positiva de que el linaje se mantenga por siempre jamás.

*Números medios de errores en el modelo de Berger y Mandelbrot*

□ El propósito de esta digresión técnica es demostrar que los principales resultados relativos al número de errores en el modelo del polvo de Cantor siguen siendo válidos después de la aleatorización. De hecho, los argumentos y las conclusiones son considerablemente simples, en parti-

cular cuando  $\Omega = \infty$ . Nos servirá también como ejemplo del uso de la esperanza condicionada en los procesos autosemejantes.

□ Supongamos que en el intervalo  $[0, R]$  hay al menos un error, siendo  $R$  tal que  $R \gg \eta$  y  $R \ll \Omega$ . Esta condición se expresa como  $M(R) > 0$ . La razón por la que el modelo de Berger y Mandelbrot se denomina *condicionalmente estacionario* es la siguiente: si  $[t, t + d]$  está totalmente contenido en  $[0, R]$ , el número condicionado de errores, que expresaremos como  $\{M(t+d) - M(t) \mid M(R) > 0\}$ , tiene una distribución independiente de  $t$ . Basta pues estudiarla para  $t = 0$ . Además, como los valores esperados son aditivos, la estacionariedad condicional implica que

$$\langle M(d) \mid M(R) > 0 \rangle = (d/R) \langle M(R) \mid M(R) > 0 \rangle.$$

A su vez la autosemejanza implica que

$$Pr\{M(d) > 0 \mid M(R) > 0\} = (d/R)^{1-D^*},$$

donde  $D^*$  es una constante que dependerá del proceso considerado. Para demostrarlo basta con introducir un  $d'$  intermedio tal que  $d < d' < R$  y descomponer nuestra  $Pr$  condicional como

$$Pr\{M(d) > 0 \mid M(d') > 0\} Pr\{M(d') > 0 \mid M(R) > 0\}$$

Combinando las dos últimas igualdades, llegamos a

$$\langle M(d) \mid M(d) > 0 \rangle = (d/R)^{D^*} \langle M(R) \mid M(R) > 0 \rangle.$$

Por tanto, basta con combinar la estacionariedad condicional y la autosemejanza para demostrar que

$$\langle M(d) \mid M(d) > 0 \rangle d^{-D^*} = \text{constante}.$$

El modelo concreto considerado determina el exponente  $D^* = D$ . Además, la autosemejanza sola implica que las razones

$$\frac{\{\text{instante del primer error} \mid M(R) > 0\} / R, y}{\{M(R) \mid M(R) > 0\} / \langle M(R) \mid M(R) > 0 \rangle}$$

son variables aleatorias que dependen de  $D$ , pero no de  $R$  ni de  $\Omega$ .

□ Contrariamente a lo que ocurre con las probabilidades condicionales, la probabilidad absoluta del suceso condicionante  $M(R) > 0$  depende

fuertemente de  $n$ . Sin embargo, si el truncamiento para  $\Omega < \infty$  se hace de forma conveniente, se encuentra que

$$Pr\{M(R) > 0\} = (R/\Omega)^{1-D}$$

Como esta última expresión se puede deducir de una expresión del párrafo anterior sustituyendo  $R$  por  $L$  y  $d$  por  $R$ , el suceso « $M(R) > 0$  sabiendo que  $L < \infty$ » se puede tratar como el suceso « $M(R) > 0$  sabiendo que  $M(L) > 0$ ». En el límite  $\Omega \rightarrow \infty$ , la probabilidad de que  $[0, R]$  esté totalmente contenido en un hueco muy grande tiende a 1, con lo que la probabilidad de observar un error se hace infinitamente pequeña. Pero la probabilidad condicional del número de errores obtenida anteriormente no resulta afectada.

□ El razonamiento anterior se suma a la discusión del principio cosmográfico condicional del capítulo 22. ■

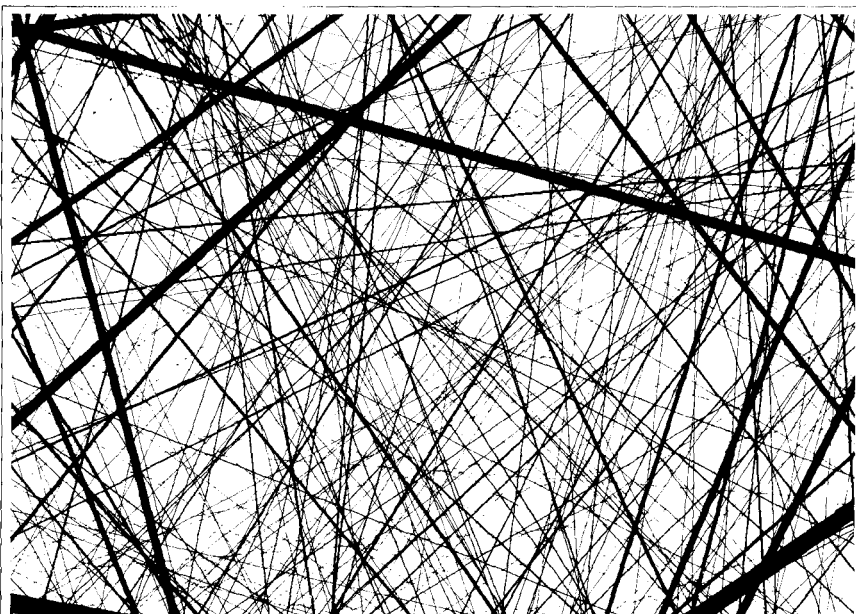


FIG. 404. *Entramado de calles aleatorio.*

Como ya hemos comentado en el capítulo 8, es una pena que el polvo de Cantor sea tan difícil de representar directamente. Sin embargo, se puede representar indirectamente como la intersección de la curva triádica de Koch con su base. De modo parecido, el polvo de Lévy puede imaginarse indirectamente. En esta lámina, las bandas negras en forma de calles se han dispuesto al azar y, en particular, sus direcciones son isótropas. Las anchuras siguen una distribución hiperbólica, y enseguida se hacen tan delgadas que no pueden dibujarse. Asintóticamente, el conjunto blanco restante (las «manzanas de casas») tiene área nula y una dimensión  $D$  menor que 2.

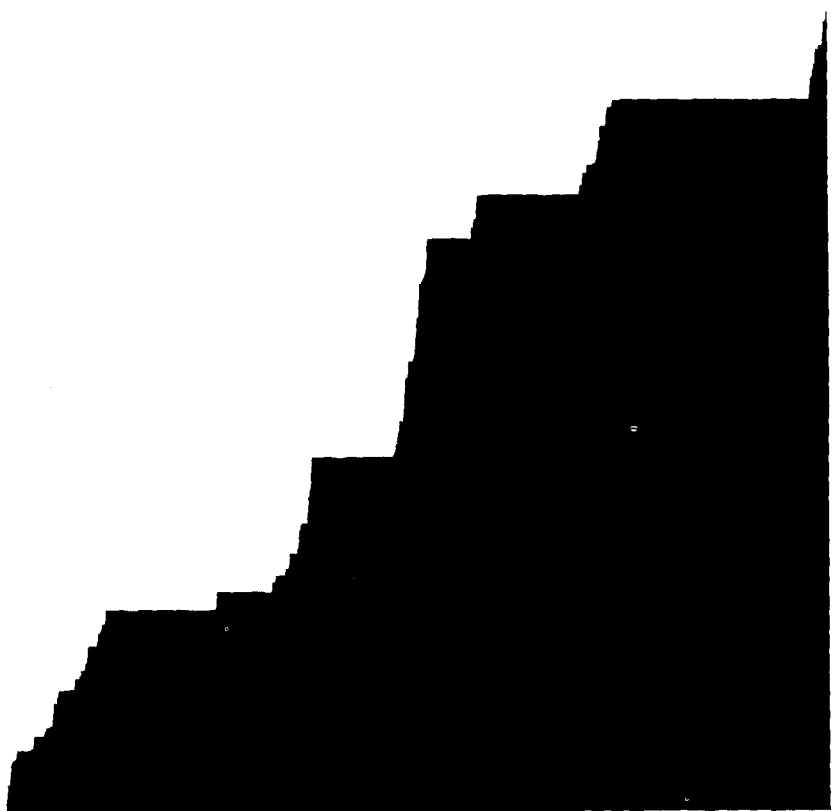
Mientras las manzanas resultantes tengan una dimensión  $D > 1$ , su intersección con una línea arbitraria es un polvo de Lévy de dimensión  $D - 1$ . Por otra parte, si  $D < 1$ , la intersección es, casi con seguridad, vacía. Sin embargo, este resultado no es del todo claro aquí, por cuanto la construcción no se ha llevado tan lejos como sería necesario.

En el capítulo 33 se presenta una ilustración mejor. Cuando las tremas extraídas del plano son discos aleatorios, como en las láminas 429 a 430, las intersecciones de los fractales por tremas con líneas rectas dan polvos de Lévy.



FIGS. 405 y 406. *Escaleras diabólicas de Paul Lévy (dimensión 1; las abscisas de los peldaños tienen dimensiones  $D = 9/10$ ,  $D = 3/10$ , y  $D = 0,6309$ , respectivamente)*

Estas gráficas son parientes aleatorizados de la función de Cantor, o escalera del diablo, de la lámina 121. La mayor de estas escaleras de Lévy tiene la



misma  $D$  que la original de Cantor y, de las dos pequeñas, una tiene una  $D$  mucho mayor y la otra mucho menor.

Para dibujar una escalera de Lévy, se evalúa la abscisa en función de la ordenada. En una primera etapa, siempre que la ordenada aumenta en  $\Delta y$  (en estos ejemplos,  $\Delta y = 0,002$ ), la abscisa experimenta un aumento aleatorio con una distribución  $Pr(\Delta x > u) = u^{-D}$ . En una segunda etapa, se cambia de escala la abscisa para que la escalera acabe en el punto de coordenadas (1,1). La escalera pequeña correspondiente a  $D = 0,3$  parece reducirse a un pequeño número de escalones debido al intensísimo agrupamiento de las abscisas de los peldaños.



## Subordinación: polvos de Lévy espaciales; galaxias ordenadas

Este capítulo y el siguiente tratan principalmente de los cúmulos de galaxias, tema que ya ha sido considerado en los capítulos 9, 22 y 23. Las técnicas empleadas son una generalización al plano y al espacio de los polvos del capítulo anterior. En este capítulo nos ocuparemos en primer lugar de los polvos de Lévy espaciales. Siguiendo a Bochner, introduciremos estas fractales «tratando» el movimiento browniano por el método de la «subordinación». Bajo el polvo de Lévy se encuentra el vuelo de Lévy, una variante no estándar de paseo aleatorio. El capítulo empieza con un anticipo informal sobre los cúmulos asociados al paseo aleatorio. Luego se explica y justifica la subordinación, extendiéndola a un contexto no aleatorio. En la sección final se justifican las afirmaciones y conjeturas de la sección preliminar.

### *Anticipo: cúmulos asociados al paseo aleatorio*

El objeto de mi modelo primitivo de los cúmulos de galaxias era presentar una distribución de masa con las siguientes propiedades: (a) la masa  $M(R)$  contenida en una esfera con centro en la distribución cumple que  $M(R) \propto R^D$ , con  $D < 2$ ; (b) la distribución cumple el principio cosmo-gráfico condicional en su forma estadística.

PARADAS DEL VUELO DE RAYLEIGH. Consideremos ahora una construcción preliminar que no tiene las mismas dimensiones, ni topológica ni fractal, que los cúmulos de galaxias. Partiendo de un punto del espacio  $\Pi(0)$ , un cohete en vuelo de Rayleigh salta en una dirección isotrópicamente aleatoria. La duración de cada vuelo es  $\Delta t = 1$  y la distancia  $U$  a la siguiente parada  $\Pi(1)$  es una variable aleatoria gaussiana con  $\langle [\Pi(1) - \Pi(0)]^2 \rangle = 1$ . A continuación, el cohete vuela hasta un  $\Pi(2)$  tal que

$$U_1 = \Pi(1) - \Pi(0) \text{ y } U_2 = \Pi(2) - \Pi(1)$$

son dos variables aleatorias vectoriales independientes y regidas por la misma distribución.

A fin de poder considerar que el viaje del cohete ha durado eternamente, le añadiremos las paradas anteriores  $\Pi(-1), \Pi(-2), \dots$ . Para ello, y dado que el paseo aleatorio no cambia por inversión del tiempo, nos bastará con tomar dos trayectorias independientes a partir de  $\Pi(0)$ .

La trayectoria de nuestro cohete (incluyendo el «rastros» que deja al ir saltando) es un conjunto aleatorio. Y también lo es el conjunto de las paradas consideradas sin tener en cuenta el orden en el que son visitadas. Ambos conjuntos obedecen a la misma distribución si se examinan desde cualquiera de sus puntos  $\Pi(t)$ . Usando la expresión introducida en el capítulo 22, ambos conjuntos cumplen el principio cosmográfico condicional en su formulación estadística.

CARGA. Si a las paradas de un vuelo de Rayleigh les asignamos al azar unas masas estadísticamente independientes y con distribuciones idénticas, la estacionariedad condicional es extensiva a la masa.

LA DIMENSIÓN  $D=2$ . Como es bien sabido, la distancia recorrida en  $K$  saltos es proporcional a  $\sqrt{K}$ . En consecuencia, una bola de radio  $R$  y centro  $\Pi(t)$  contiene un número de paradas  $M(R) \propto R^2$ . El exponente de esta fórmula concuerda con la idea de que la dimensión del conjunto de paradas  $\Pi(t)$  es  $D=2$ . Por otra parte, la densidad global es nula.

MOVIMIENTO BROWNIANO. Interpolando el vuelo de Rayleigh para un tiempo continuo, se obtiene una trayectoria browniana, que es (capítulo 25) una curva continua con  $D=2$ . Así pues, el modelo del vuelo de Rayleigh es, en esencia, una curva fractal ( $D_f=1$  y  $D=2$ ) que cumple el principio cosmográfico condicional, pero no en su versión fuerte. Esta última conclusión es satisfactoria, pero los valores de  $D_f$  y  $D$  son inaceptables.

DENSIDAD GENERALIZADA. Si cargamos una trayectoria browniana entre los puntos  $\Pi(t_0)$  y  $\Pi(t)$  con la masa  $\delta t_0 - t$ , la masa  $M(R)$  se convierte en el tiempo que el punto pasa en la bola de radio  $R$  multiplicado por la densidad generalizada uniforme  $\delta$ .

EXPANSIÓN DEL UNIVERSO. En las discusiones estándar, la distribución inicial tiene una densidad uniforme  $\delta$ . A medida que el universo se expande uniformemente,  $\delta$  disminuye, manteniéndose uniforme la distribución. Por otra parte, es una creencia general que cualquier otra distribución cambia con la expansión. La trayectoria browniana con carga uniforme prueba de manera constructiva que tal conclusión es *incorrecta*: como antes,  $\delta$  cambia con la expansión, pero permanece constante y uniforme.

Por tanto, las paradas del vuelo de Rayleigh son neutras en lo que res-

pecta a la cuestión de si nuestro Universo está o no en expansión. Esta propiedad no se pierde si se hace disminuir  $D$  empleando un vuelo de Lévy, como consideramos a continuación.

PARADAS DEL VUELO DE LEVY: DIMENSIONES NO ENTERAS  $< 2$ . Mi modelo de paseo aleatorio para la distribución de galaxias implementa cualquier dimensión fractal  $D < 2$  empleando un polvo, esto es, un conjunto con la dimensión topológica correcta  $D_T = 0$ . Con este objeto, usaré un paseo aleatorio en el que el valor esperado  $\langle U^2(t) \rangle$  es infinito, pues  $U$  es una variable aleatoria hiperbólica, con un corte inferior en  $u = 1$ . Así pues, para  $u \leq 1$ ,  $Pr(U > u) = 1$ , mientras que para  $u > 1$ ,  $Pr(U > u) \propto u^{-D}$ , con  $0 < D < 2$ .

Una de las principales consecuencias es que  $\langle M(R) \rangle \propto R^D$  para  $R \gg 1$ . Esta es la relación que queríamos obtener, y permite cualquier dimensión que puedan sugerir la observación o la teoría.

▣ APARTE SOBRE LA ESTABILIDAD DE LEVY. Para  $t \rightarrow \infty$ , la masa contenida en un intervalo de tiempo  $t$  (tomado a una escala conveniente) converge hacia una variable aleatoria independiente de  $t$ , investigada por primera vez por Paul Lévy, y de la que diremos que es «estable según Lévy» (capítulo 39). De ahí la expresión «vuelo de Lévy» propuesta para el proceso subyacente al modelo.

▣ Como  $\langle U^2 \rangle = \infty$ , el teorema del límite central estándar no es válido y hay que reemplazarlo por un teorema del límite central especial. Esta sustitución tiene consecuencias notables. El teorema estándar es «universal», en el sentido de que el límite sólo depende de las cantidades  $\langle U \rangle$  y  $\langle U^2 \rangle$ . El teorema no estándar no es universal. La distribución de  $M(R)$  depende explícitamente, a través de  $D$ , de la distribución de los saltos. ■

En lo que resta de capítulo construiremos un polvo que es al vuelo de Lévy lo que el movimiento browniano al vuelo de Rayleigh. Una interpolación directa sería tediosamente técnica, pues habría de dar un significado a la distribución  $Pr(U > u) = u^{-D}$  hasta en la proximidad de  $u = 0$ , donde diverge. Por el contrario, hay ataques indirectos del problema que son a la vez sencillos y precisos, gracias al proceso de subordinación. Este proceso es interesante en sí mismo y tiene un gran número de generalizaciones obvias.

### *El vuelo de Cauchy y $D = 1$*

Introduciremos la subordinación por medio de un ejemplo. Para generar una dimensión  $D = 1$  partiendo de la trayectoria browniana de dimensión  $D = 2$ , tenemos que intentar que  $D$  disminuya en 1. En el caso de las

figuras euclídeas clásicas, esta disminución se consigue fácilmente. En el plano basta con tomar la intersección con una línea, en el espacio tridimensional basta con tomar la intersección con un plano, y en el espacio tetradimensional la intersección con un espacio de dimensión 3. Vimos también en el capítulo 23 que la misma regla es aplicable a las coagulaciones fractales aleatorias, y en el capítulo 25 que la función browniana real de variable real tiene dimensión  $3/2$ , y que su conjunto de ceros, así como cualquier sección no ortogonal al eje  $t$ , tiene dimensión  $1/2$ .

Por analogía formal, este método de disminuir  $D$  en 1 nos lleva a pensar que, si elegimos convenientemente la sección de una trayectoria browniana, obtendremos normalmente una dimensión  $2 - 1 = 1$ . Esta sospecha ha sido efectivamente comprobada (Felle, 1971, pág. 348). Además, tendría que hacerse extensiva también a las secciones planas de una trayectoria en el espacio tridimensional, y a las secciones tridimensionales de una trayectoria en el espacio tetradimensional, en donde las coordenadas son  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y humor.

Empezando con una trayectoria browniana en el espacio tetradimensional, consideremos aquellos puntos en los que *humor* = 0. Estos vértices «sin humor» se pueden ordenar según el orden de llegada del movimiento browniano de partida. Las distancias entre estas visitas son independientes e isótropas. En consecuencia, los vértices sin humor se pueden considerar paradas de un vuelo aleatorio cuyos pasos siguen unas reglas muy distintas de las del movimiento browniano. Este paseo se llamará movimiento o vuelo de Cauchy. Dados dos instantes de tiempo 0 y  $t$ , se encuentra que la densidad de probabilidad del vector que va de  $\Pi(0)$  a  $\Pi(t)$  es un múltiplo de

$$t^{-E} [1 + |\Pi(t) - \Pi(0)|^2 t^{-2}]^{-E/2}$$

La sospecha formal de que  $D = 1$  se encuentra confirmada en S. J. Taylor (1966, 1967). Una de las figuras de la lámina 298 es una ilustración del vuelo de Cauchy.

### *La idea de subordinación*

Meditemos por un momento acerca de la construcción anterior. Un movimiento browniano en el  $E$ -espacio, dependiente de una variable real, pasa por los puntos sin humor en los instantes de tiempo en que una de sus funciones coordenadas se anula. Pero recordemos que cada función coordenada es un movimiento browniano unidimensional. Aparte de que

los ceros de esta función (capítulo 25) forman un conjunto de dimensión  $D=1/2$ , como los intervalos entre cada dos ceros son independientes, se tiene que forman un polvo de Lévy. Resumiendo, el movimiento de Cauchy es la imagen de un polvo de Lévy lineal sobre un movimiento browniano. Recordemos que la decimación era el curioso método que empleaban los romanos para castigar a un grupo hostil, consistente en matar cada décimo componente. Así, el movimiento de Cauchy se obtiene como una variante fractal de la decimación. Esta fue introducida por Bochner (1955), que la llamó *subordinación* (Feller, 1951, contiene comentarios dispersos no elementales sobre este concepto).

Para referirnos a ello más adelante, notemos que

$$D_{\text{trayectoria de Cauchy}} = D_{\text{trayectoria browniana}} \times D_{\text{conjunto de ceros browniano}}$$

*La subordinación se puede generalizar a los fractales no aleatorios*

Con objeto de comprender mejor la naturaleza de la subordinación fractal, la aplicaremos a algunas curvas fractales de Koch y de Peano. (Por raro que parezca, posiblemente sea aquí donde por primera vez se habla de subordinación en un contexto *no aleatorio*).

La idea es que uno puede modificar estas curvas manteniendo el mismo iniciador y sustituyendo el generador por una parte del original. Esto cambia el conjunto fractal límite original, que llamaremos *subordinando*, por un subconjunto *subordinado* del mismo. Primero describiremos algunos ejemplos y luego introduciremos la importante *regla del producto de las dimensiones*.

EJEMPLO CON  $D < 2$ . Tómese el generador formado por cuatro segmentos de la curva triádica de Koch, como se hace en la lámina 70. Si se eliminan los segmentos segundo y tercero se tiene el generador clásico del polvo triádico de Cantor. Por tanto, el polvo de Cantor es un subordinado de un tercio del copo de nieve. Se obtiene otro polvo subordinado distinto, no restringido a la recta, si se eliminan el primero y el tercero de los  $N=4$  lados del generador de Koch. En ambos casos la subordinación modifica la dimensión de  $\log 4 / \log 3$  a  $\log 2 / \log 3$ . Si sólo se borra uno de los segmentos del generador, el polvo subordinado no está contenido en una recta, aunque su dimensión es  $\log 3 / \log 3 = 1$ .

EJEMPLO CON  $D = 2$ . Tómese la segunda fase, formada por cuatro segmentos, de la curva de Peano-Cesàro de la lámina 234 y bórrense los segmentos segundo y tercero. El nuevo generador es ¡el propio intervalo  $[0, 1]$ ! Así pues, el segmento de recta es un subordinado (¡el más trivial!) de la

curva de Peano-Cesàro. Si se borra cualquier otro par de segmentos componentes del generador se obtiene un polvo fractal con  $D=1$ . Si se borra sólo uno de los segmentos se obtiene un conjunto de dimensión  $\log 3/\log 2$ .

### *Producto de dimensiones*

Recuérdese que en los capítulos 6 y 7 decíamos que las curvas de Koch y de Peano se podían considerar trayectorias de «movimientos» con un parámetro de tiempo  $t$  que varía entre 0 y 1. Dicho tiempo se define de modo que, por poner un ejemplo, los cuatro elementos del generador del copo de nieve son recorridos durante los instantes cuya expresión en base cuatro empieza por 0,0; 0,1; 0,2 y 0,3. Siguiendo con el mismo ejemplo, el segundo cuarto del tercer cuarto es recorrido durante los instantes cuya expresión en base cuatro empieza por 0,21. Consideradas como movimientos, nuestras curvas de Koch o de Peano son «aplicaciones fractales» definidas en el intervalo  $[0,1]$ . En este contexto, el efecto de la primera decimación de los elementos del generador, citada en la sección anterior, es eliminar los valores de  $t$  cuya expresión en base 4 incluya las cifras 1 o 2 (o 0 y 3), de modo que  $t$  se reduzca a un cierto polvo de Cantor de  $[0,1]$ .

Podemos, pues, describir esos conjuntos subordinados de las curvas de Koch o de Peano como imágenes *fractales* de un subconjunto *fractal* del tiempo. Dicho subconjunto es obviamente un polvo de Cantor y se llama *subordinador*. Su dimensión es  $\log N/\log N' = \log 2/\log 4 = 1/2$ . Y, en general, se obtiene la siguiente expresión, que no necesita de más explicaciones

$$D_{\text{subordinado}} = D_{\text{subordinando}} \times D_{\text{subordinador}}$$

Esto generaliza la relación que, como hemos visto, caracteriza el movimiento de Cauchy. Como ya sabemos, las sumas de dimensiones aparecen en el estudio de secciones e intersecciones. Acabamos de descubrir un «cálculo» precioso que asigna un significado a los productos de dimensiones y no sólo a las sumas.

Esta regla tiene excepciones, naturalmente, parecidas a las que encontrábamos para la regla de la suma de codimensiones en una intersección.

### *Un polvo de Lévy lineal como subordinador*

El primer subordinado usado por Bochner fue el polvo de Lévy lineal del capítulo 31, y su uso como subordinador por parte de los matemáticos

puros está tan extendido que la escalera de Lévy correspondiente se conoce a menudo como función subordinadora estable. Para obtener conjuntos subordinados autosemejantes, se usa un subordinando autosemejante como, por ejemplo, un movimiento browniano estándar o fraccionario.

Nótese que, mientras la dimensión intrínseca del movimiento browniano es 2, la del movimiento browniano restringido a la recta es 1. Por tanto, habría que sustituir la regla de la sección anterior por

$$D_{\text{subordinado}} = \min\{E, 2 \times D_{\text{subordinador}}\}$$

Y en general, la dimensión intrínseca de un movimiento browniano fraccionario es  $1/H$ , pero

$$D_{\text{subordinado}} = \min\{E, D_{\text{subordinador}}/H\}.$$

Por tanto, el mayor espacio que puede ser llenado hasta el tope por el conjunto subordinado corresponde a  $E$ =parte entera de  $1/H$ .

EL MOVIMIENTO BROWNIANO COMO SUBORDINADO. El subordinando más importante es la trayectoria browniana. La imagen browniana de un polvo de Lévy de instantes de tiempo, con dimensión  $D/2$  comprendida entre 0 y 1 es un polvo en el espacio con una dimensión  $D$  arbitraria comprendida entre 0 y 2. Merece el nombre de polvo espacial de Lévy.

En el supuesto de que tanto los huecos del polvo subordinador como los incrementos del subordinando sean estadísticamente independientes, los incrementos del proceso subordinado también lo serán. Y en el supuesto de que las longitudes de los huecos del subordinador cumplan  $Pr(W > w) = w^{-D/2}$ , y que durante un hueco de duración  $w$  el movimiento browniano se desplace una distancia del orden de  $u = \sqrt{w}$ , parece que los huecos del polvo espacial deban cumplir  $Pr(U > u) = Pr(W > u^2) = u^{-D}$ . Y se puede demostrar que en efecto es así.

### *Cúmulos de galaxias ordenadas*

La fórmula  $Pr(U > u) = u^{-D}$  nos demuestra que el polvo subordinado es una implementación del proceso contemplado al principio del capítulo.

DIMENSIONES. La dimensión del polvo es  $D$ . Si unimos por medio de segmentos rectilíneos las imágenes de los extremos de cada hueco se obtiene una trayectoria de Lévy, de dimensión  $\max(1, D)$  —como en el estudio de los árboles del capítulo 16.

**CORRELACIONES.** Una trayectoria de Lévy introduce una ordenación total entre las galaxias que genera. Esto implica que cada galaxia sólo interactúa con sus vecinas inmediatas, y que la interacción entre cada par de vecinas es independiente de los otros pares. En este sentido, un vuelo de Lévy es equivalente a la sustitución injustificada de un problema irresoluble de  $N$  cuerpos por una combinación manejable de muchos problemas de dos cuerpos. El resultado podría haber sido terriblemente poco realista, pero no lo es. Mandelbrot (1975u; totalmente descrito en Peebles 1980, págs. 243-249) demuestra que el vuelo de Lévy da unas correlaciones a dos y tres puntos en la esfera celeste idénticas a las obtenidas en 1975 por P. J. E. Peebles y Groth por el método de ajuste de curvas; véase Peebles (1980).





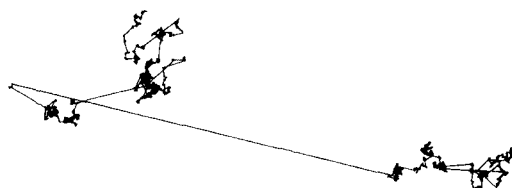
FIG. 415. *El «gazapo» informático como artista, Opus 2*

Esta lámina debe atribuirse en parte a una mala programación. El «gazapo» fue identificado y corregido enseguida (aunque esto ocurrió cuando el resultado ya se había registrado, naturalmente), y el resultado final fue la lámina 103.

El cambio producido por un solo gazapo en un lugar crítico había ido mucho más allá de lo que uno habría podido esperar.

Está claro que la lámina 103 ha sido diseñada con un orden muy estricto. Aquí, dicho orden está oculto, y no se manifiesta ningún otro tipo de orden.

El hecho de que, a primera vista, esta lámina pueda pasar por una obra de arte, quizá no sea casual. Mis ideas al respecto están esbozadas en Mandelbrot (1981) y pienso presentarlas con más detalle en un futuro no lejano.



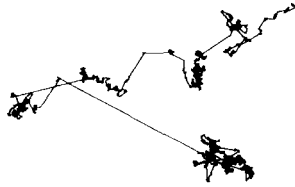
FIGS. 416 y 417. *Cúmulos del modelo primitivo de Mandelbrot.*  
*Dimensión  $D = 1,2600$ . El vuelo de Lévy y sus paradas*

Un vuelo de Lévy es una sucesión de saltos separados por paradas. En este capítulo sólo nos interesan estas últimas, pero los saltos son una parte necesaria de la construcción.

Por tanto, las figuras superiores (en negro sobre fondo blanco) de estas láminas contienen, como parte de la trayectoria del movimiento, los rastros dejados durante el vuelo real. La trayectoria en el espacio tridimensional se muestra por medio de sus proyecciones sobre dos planos perpendiculares. El original puede visualizarse manteniendo el libro semiabierto.

Pasemos ahora a las figuras inferiores (en blanco sobre fondo negro). Se borran los intervalos que representan los saltos y se toma el negativo fotográfico. Cada parada es una estrella, una galaxia o un agregado material más general.

Concretando más, los segmentos rectilíneos de las figuras superiores en negro sobre blanco tienen las características siguientes. Su dirección en el espacio es aleatoria e isotrópica (esto es, paralela al vector que une el origen del espacio con un punto escogido al azar sobre una esfera). Los distintos segmentos son estadísticamente independientes y sus longitudes siguen la distribución de probabilidad  $Pr(U > u) = u^{-D}$ , excepto para  $u < 1$ , que es  $Pr(U > u) = 1$ . El va-



lor  $D=1,2600$  es próximo al valor  $D\sim 1,23$  que se ha encontrado para las galaxias reales.

La gran mayoría de los segmentos son demasiado cortos para ser visibles. De hecho, recubrimos el plano con una trama uniforme y marcamos las celdillas que contenían una o más paradas. Dicho de otro modo, cada punto representa todo un minicúmulo.

Además, y con independencia de  $D$ , los minicúmulos están a su vez agregados. Presentan unos niveles tan claros de jerarquización que es increíble que el modelo no tenga una jerarquía explícita y que todo sea fruto únicamente de la autosemejanza.

Precisando un poco más, todas las láminas de este grupo representan el principio de dos vuelos distintos, uno hacia adelante y otro hacia atrás, los cuales no son más que dos réplicas estadísticamente independientes del mismo proceso. Está claro que, si se desplaza el origen a alguna otra parada, las dos mitades siguen siendo independientes. Por tanto, todas las paradas tienen exactamente el mismo derecho a ser consideradas el Centro del Universo. Esta propiedad es la esencia del *principio cosmográfico condicional* que propongo en esta obra.

El método presentado aquí no pretende explicar cómo se han generado efectivamente las galaxias, pero deja claro que el principio cosmográfico condicional es compatible con una agregación ostensible a muchos niveles. Podría haber presentado una gran variedad de tales configuraciones.

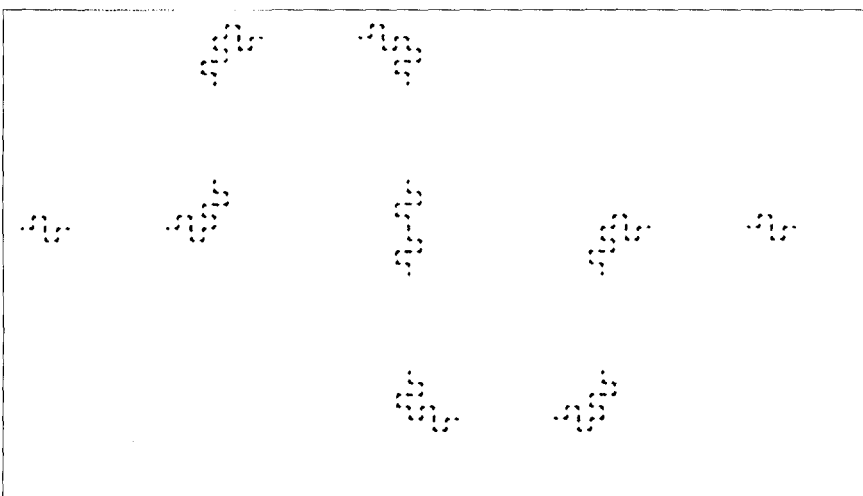


FIG. 418. *Subordinación no aleatoria: polvo fractal agregado, de dimensión  $D = 1$ , subordinado a una curva de Koch de dimensión  $D = 1,5$*

Se puede modificar el método recurrente de la construcción de Koch para que rompa la recta sistemáticamente y nos dé un polvo con la misma dimensión  $D = 1$ , pero con una topología y un aspecto completamente distintos.

Imaginemos que una banda de goma, que inicialmente se extiende entre 0 y 1, se estira para darle la forma del generador de Koch de la lámina 76, que daba una curva fractal de dimensión  $3/2$ . A continuación se fijan las esquinas con alfileres y se corta por la mitad cada uno de los 8 segmentos rectilíneos de la banda, quedando 16 trozos que se contraen hasta recuperar su longitud inicial  $1/16$ . Los extremos libres de estos trozos se fijan también con alfileres y se vuelve a repetir el proceso con cada uno de ellos. El resultado es un polvo autosemejante jerárquicamente agragado con  $r = 1/16$  y  $N = 16$ , y por tanto  $D = 1$ .

Esta construcción equivale a dejarnos marcar un lado del generador para eliminarlo en el estadio siguiente de la construcción de Koch. En el texto llamamos subordinación a este proceso. Los únicos puntos con los que nos quedamos son las posiciones de un movimiento de Koch correspondientes a los instantes de tiempo de un subconjunto de dimensión fractal  $\log 16 / \log 64 = 4/6$ . Se tiene que  $(4/6) \times (3/2) = 1$ , lo cual es un caso particular de la regla del producto de dimensiones que hemos comentado en el texto.

Nótese que todos los puntos de esta lámina están intrínsecamente ordenados por la curva de Koch de la que forma parte el generador. Además, se puede obtener fácilmente la distribución de frecuencias de las longitudes encogidas entre dos alfileres sucesivos. Aproximadamente, el número de longitudes  $\geq u$  es proporcional a  $u^{-D}$  con  $D = 1$ . Las láminas 416 y 417 hacen uso de la misma distribución, aunque de un modo distinto.

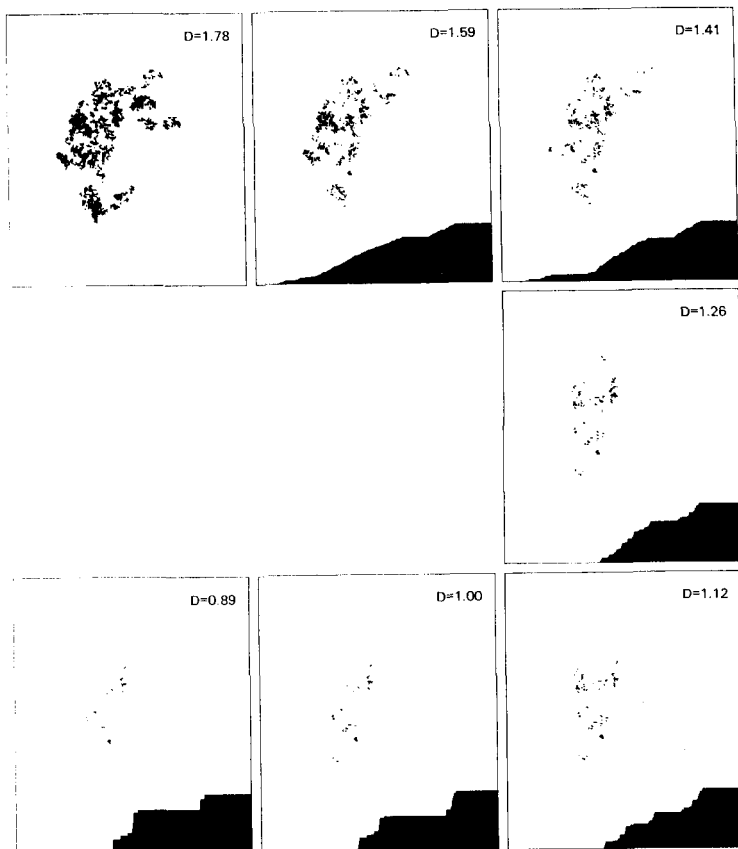


FIG. 419. *Disminución de D por subordinación. Cómo hacer que los cúmulos de Lévy estén más y más espaciados*

El grado de agregación de un polvo de Lévy plano depende de su dimensión. Este efecto se ilustra aquí por medio de una trayectoria browniana plana, con  $D + 2$ , y sucesivas subordinaciones lineales de Lévy, superpuestas cada una a la anterior. En todas las figuras,  $D_{\text{subordinador}} = 0,89$ , y por tanto los sucesivos polvos subordinados tienen dimensiones:  $1,78 (= 2 \times 0,89)$ ;  $1,59$ ;  $1,41$ ;  $1,26$ ;  $1,12$ ;  $1$  y  $0,89$ . La escalera de Lévy que acompaña a casi cada polvo muestra la decimación del tiempo que dio lugar al mismo a partir del polvo de  $D = 1,78$ . Para la  $D$  próxima a 2 se percibe claramente un «espectro» del subordinando, que se va haciendo cada vez más tenue a medida que  $D$  disminuye (véase el capítulo 35). El aumento de la agregación no se debe a que todos los puntos se concentren en torno a unos pocos, sino a la desaparición de la mayoría de puntos, lo que da lugar a un número cada vez mayor de niveles jerárquicos aparentes.

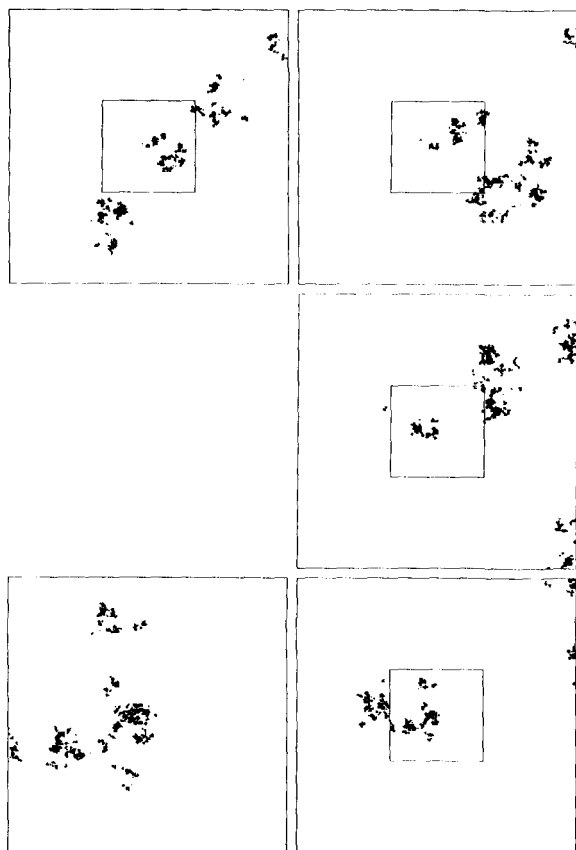


FIG. 420. *Viaje de aproximación hacia un polvo de Lévy con  $D = 1,2600$*

La primera figura, en la parte superior izquierda, representa un cúmulo de 12.500.000 posiciones de un movimiento de Lévy, visto desde la ventanilla cuadrada de una nave espacial lejana. Entre cada visita y la siguiente, en el sentido de las agujas del reloj, la distancia de la nave al centro del cúmulo y el campo de visión se dividen por  $b = 3$ . La estructura que se ve por la ventanilla cambia en cuanto a los detalles, pero en líneas generales es la misma. Esto era de esperar, pues el conjunto es autosemejante.

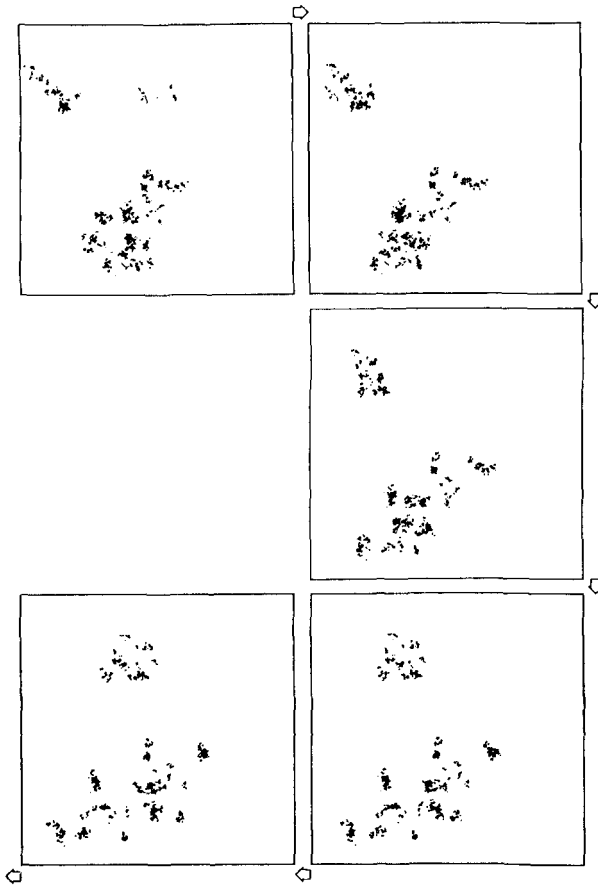


FIG. 421. *Circunnavegación de cúmulos de Lévy de dimensión  $D = 1,3000$*

La forma de los cúmulos generados como vértices de un vuelo de Lévy en el plano depende en gran manera de la muestra, en el sentido de que si uno simula varios cúmulos con la misma dimensión, es de esperar una gran variedad de formas.

Lo mismo vale para un pequeño cúmulo aislado de Lévy en el espacio visto desde distintos ángulos —sígase la «banda» de esta lámina en el sentido de las agujas del reloj empezando por arriba.

Después de introducir el polvo de Lévy lineal como un fractal por tremas, mediante tremas aleatorios en forma de segmento (capítulo 31), nos hemos apartado del tema en el capítulo 32, donde generalizamos dicho polvo al plano y al espacio mediante el proceso de subordinación. En este capítulo y el siguiente generalizamos directamente las tremas aleatorias.

En este capítulo las tremas planas son discos, y las espaciales, bolas. La generalización nos lleva pues directamente a las formas de los cráteres de la Luna y de los meteoritos. Pero la aplicación más importante de las tremas espaciales es distinta y menos evidente. Si  $D$  es próxima a 1, el fractal por tremas es un polvo, y por tanto un candidato para sustituir las paradas del vuelo de Lévy en la modelización de los cúmulos de galaxias. La principal novedad con relación a los modelos basados en paseos aleatorios es que aquí las galaxias *no* están ordenadas sobre una trayectoria. De ahí que se gane algo en cuanto a la verosimilitud a priori, aunque también se pierda en lo que se refiere a las conveniencias del cálculo, y finalmente se salga ganando en la calidad del ajuste de los datos; las propiedades de covariancia predichas se aproximan aún más a la evidencia empírica. Y las tremas no esféricas del capítulo 35 mejorarán todavía más el ajuste a los datos.

### *Tremas planas y espaciales*

Como preliminar a las tremas aleatorias y solapantes, reformularemos la construcción de la coagulación plana en una trama (capítulo 13 y 14) en términos de tremas virtuales. El primer paso de la cascada consiste en marcar  $N$  de los  $b^2$  cuadrados y conservarlos como grumos. Se podría decir también que se eliminan  $b^2 - N$  tremas cuadradas. En el siguiente paso se quitan  $b^2(b^2 - N)$  tremas cuadradas de segundo orden, de las que



$N(b^2 - N)$  son reales y los restantes  $(b^2 - N)^2$  son «virtuales»: eliminan algo que había sido eliminado en el primer paso. Y así sucesivamente.

Si contamos todas las tremas, sean virtuales o auténticas, encontramos que el número de ellas con un *área* superior a  $s$  es proporcional a  $1/s$ . El resultado correspondiente a la coagulación en el espacio tridimensional es que el número de tremas de *volumen* superior a  $v$  es proporcional a  $1/v$ .

Análogamente, el grueso de este capítulo y del capítulo 35 se ocupa del caso en que el número de tremas independientes con centro en una celda de lados  $dx$  y  $dy$ , o  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ , es una variable aleatoria de Poisson de valor esperado

$$\begin{aligned} \langle \text{Nr}(\text{área} > a) \rangle &= (c/2a) dx dy, \\ \langle \text{Nr}(\text{volumen} > v) \rangle &= (c/3v) dx dy dz, \end{aligned}$$

o en general, para  $R^E$

$$(c/Ev) dx_1 \dots dx_E$$

Las propiedades fractales del conjunto residual son tan simples como en el caso lineal considerado en el capítulo 31. Si  $C < 1$ , dichas propiedades pueden obtenerse de las del caso lineal, y en los ensayos anteriores a éste se conjeturaba su validez para cualquier  $C$ , cosa que fue confirmada por El Hérou (1978).

Si  $C > E$ , el conjunto residual es casi seguramente vacío, y si  $C < E$ , es un fractal de dimensión  $D = E - C$ .

Por lo que respecta a la topología del fractal residual, se tiene a partir de principios generales que, si  $D < 1$ , entonces se trata de un polvo con  $D_T = 0$ . Por el contrario, si  $D > 1$  los principios generales no bastan para determinar la topología del fractal, que dependerá de la forma de las tremas. Aparece aquí el problema de la percolación, aunque en otro contexto.

### *Cráteres lunares y tremas circulares*

Empezaremos por un tema colateral que, además de servirnos como aperitivo bidimensional, es divertido: la naturaleza geométrica de la parte de la Luna no cubierta por cráteres. En tanto que el griego κρατήρ significa tazón o recipiente para beber, casi todos los cráteres terrestres son de origen volcánico. Pero parece ser que los cráteres que se observan en la

Luna, Marte, el satélite joviano Calisto, y otros planetas y sus satélites, se deben en su gran mayoría al impacto de meteoritos.

Cuanto mayor es el meteorito, mayor y más profundo es el cráter dejado por su impacto. Además, un gran cráter debido al impacto reciente de un meteorito pesado puede borrar del mapa varios cráteres menores, mientras que un cráter pequeño producido por el impacto reciente de un meteorito ligero puede «mellar» el borde de un cráter grande preexistente. Por lo que respecta a los tamaños, hay una evidencia empírica sólida de que, en el momento del impacto del meteorito, las áreas de los cráteres siguen una distribución hiperbólica: el número de cráteres con un área superior a  $s$  km<sup>2</sup> y cuyo centro está localizado en un cuadrado de  $l$  km de lado se puede expresar como  $C/s$ , siendo  $C$  una constante. La concordancia de esta ley con los datos está comentada en Marcus (1964), Arthur (1954), y Hartmann (1977).

Con objeto de simplificar los razonamientos (sin cambios en el resultado principal), aproximaremos la superficie lunar por un plano, y los cráteres lunares por tremas discoïdales. Si la Luna fuera interceptando meteoritos eternamente, de un entorno estadísticamente invariante, resulta obvio que cualquier punto de su superficie sería cubierto una y otra vez por algún cráter. Sin embargo, podría ser que los cráteres fueran borrados del mapa con una cierta frecuencia, por lava volcánica por ejemplo, y en tal caso el conjunto no recubierto por cráteres en un momento dado sería no trivial. O podría ser también que el sistema solar evolucionara de modo que nuestra Luna sólo fuera bombardeada por meteoritos durante un período de tiempo finito. El parámetro  $C$  podría medir el tiempo transcurrido desde el último borrado de cráteres, o bien la duración total del bombardeo.

Con objeto de apreciar el efecto sobre la forma del fractal residual, tomemos siempre la misma semilla y variemos  $C$ . Mientras  $C$  aumenta de 0 a 2, la superficie de la Luna va quedando más y más saturada, y el resultado enunciado en la sección anterior indica que  $D$  disminuye hasta hacerse 0 para  $C > 2$ . Las láminas 429 a 432 ilustran el modo en que el fractal residual depende de  $D$ .

APPENZELL Y EMMENTHAL. Si  $C$  es muy pequeño, los aficionados al queso suizo compartirán conmigo la idea de que la figura que estamos tratando parece una loncha de queso casi totalmente tachonada de pequeños agujeros. Es como una extrapolación desenfrenada de la estructura del queso Appenzell. Si aumentamos  $C$ , la estructura acaba por parecer una extrapolación desenfrenada de una loncha de queso Emmenthal, con grandes agujeros solapados. (Así pues, la vieja poesía inglesa infantil según la cual la Luna estaría hecha de queso verde

ha demostrado ser correcta, siempre y cuando se prescinda del color.)

TOPOLOGÍA. DIMENSIONES CRÍTICAS. Hemos calificado de «desenfrenadas» las dos extrapolaciones anteriores del queso porque el área de las «lonchas» fractales es nula. Mi conjetura al respecto es la siguiente: mientras  $C$  sea suficientemente pequeño el fractal residual será un  $\sigma$ -racimo, siendo cada racimo por contacto una malla de filamentos conexos, de dimensión topológica  $D_T=1$ . Cuando  $D$  alcanza un cierto valor crítico,  $D_{crit}$ , el valor de  $D_T$  se hace 0 y la  $\sigma$ -malla colapsa en un polvo.

La siguiente dimensión crítica es  $D=0$ . Si  $C \geq 2$ , la superficie de la Luna está supersaturada, y cada punto es cubierto con casi toda seguridad por uno o más cráteres. Esto ocurriría, en particular, si la superficie de la Luna no se limpiara nunca de cráteres y recibiera el impacto de meteoritos por siempre jamás.

CRÁTERES NO ESCALANTES. Algunos planetas distintos de la Luna se caracterizan por una densidad de cráteres de la forma  $Ws^{-\gamma}$  con  $\gamma \neq 1$ . El problema que plantean estos cráteres se trata en el apéndice de este capítulo.

### *Galaxias y espacios intergalácticos generados mediante tremas esféricas*

En tanto que a las tremas de la Luna se les puede reconocer una existencia independiente como cráteres, las tremas esféricas con una distribución escalante aparecieron como la generalización natural del mismo método geométrico al espacio. Pensé que podían proporcionar un modelo alternativo al modelo de galaxias del capítulo 32. Por tanto, postulé la existencia de vacíos intergalácticos que resultan de la combinación de muchas tremas y pueden llegar a tener un tamaño enorme. Fue una sorpresa muy agradable que el modelo resultante concordara tan bien con los datos, cosa que hace necesario profundizar más en la teoría (capítulo 35) y en la experimentación.

COVARIANCIAS. Como los estadísticos y los físicos se fían tanto de las correlaciones y los espectros, la primera prueba a que se somete el fractal por tremas como modelo de los cúmulos de galaxias se basa en sus propiedades de correlación. La covariancia entre dos puntos del espacio es la misma que en mi modelo de paseo aleatorio, como debe ser, pues éste se ajustaba bien a los datos. Lo mismo vale, como debe ser, para la covariancia entre dos direcciones del cielo. Las covariancias entre tres y cuatro direcciones predichas por el modelo concuerdan mejor que las predichas por el modelo de paseo aleatorio, pero las mejoras son puramente técnicas y es mejor discutir las en otra parte. Básicamente, una vez se tiene  $D$ , los distintos modelos dan la misma correlación.

Recordemos ahora que los fenómenos gaussianos, incluidos los fractales brownianos ordinarios y fraccionarios, están caracterizados completamente por las propiedades de covarianza. Si son escalantes, la  $D$  los caracteriza completamente. Dada la influencia de los fenómenos gaussianos en el modo de razonar de los estadísticos, uno podría estar tentado de detenerse en las covarianzas. Pero los polvos fractales no son fenómenos gaussianos, y no basta con la  $D$  para especificar muchos de sus detalles significativos.

**DIMENSIONES CRÍTICAS.** Más importante que la correlación es saber si los fractales por tremas tienen o no la topología correcta. Para comprobarlo, lo mejor es hacer como en la sección anterior, tomar una semilla fija y hacer que  $C$  varíe entre 0 y 3. Mientras  $C$  sea pequeña,  $D_T=2$ , y nuestro fractal está formado por membranas ramificadas. Cuando  $D$  pasa de un cierto valor  $D_{2crit}$ , que se llama dimensión crítica superior, las membranas se descomponen en filamentos, con  $D_T=1$ . Y cuando  $D$  disminuye más allá de otro valor  $D_{crit}$ , denominado dimensión crítica inferior, los filamentos se reducen a polvo, con  $D_T=0$ . Como para modelizar los cúmulos de galaxias necesitamos un polvo, es importante comprobar que la  $D_{crit}$  es mayor que la  $D \sim 1,23$  observada. Mis simulaciones en el ordenador han confirmado esta desigualdad.

**PERCOLACIÓN.** La esperanza de que el mundo no sea más complicado de lo necesario me inclina a pensar que  $D > D_{crit}$  es la condición necesaria y suficiente para que el fractal construido por tremas presente percolación, en el sentido descrito en el capítulo 13.

### *Meteoritos*

La distribución de masas de los meteoritos que chocan con la Tierra ha sido estudiada a fondo, por ejemplo en Hawkins (1964). Los meteoritos de tamaño mediano son pétreos, y  $1 \text{ km}^3$  de espacio contiene aproximadamente  $P(v) = 10^{-25}/v$  meteoritos de volumen superior a  $v \text{ km}^3$ .

Normalmente esta afirmación se expresa de un modo distinto, usando la siguiente mezcla de unidades. Cada año, la superficie terrestre recibe en promedio por  $\text{km}^2$   $0,186/m$  meteoritos de masa superior a  $m$  gramos. Como su densidad media es de  $3,4 \text{ g cm}^{-3}$ , esta relación se convierte en  $5,4 \times 10^{-17}/v$  meteoritos de volumen superior a  $v \text{ km}^3$ . Como además la Tierra avanza aproximadamente  $1 \text{ km}$  en  $10^{-9}$  años (la inversa del orden de magnitud del perímetro de la órbita terrestre alrededor del Sol expresado en  $\text{km}$ ), tenemos que mientras la Tierra avanza  $1 \text{ km}$  en el espacio cada  $\text{km}^2$  terrestre se encuentra con  $10^{-25}/v$  meteoritos de volumen superior a  $v \text{ km}^3$  (aquí sólo hemos atendido a los órdenes de magnitud, de

modo que el factor 5,4 lo hemos convertido en 10). Suponiendo que los meteoritos que chocan con la Tierra en su movimiento por el espacio sean una muestra representativa de la distribución espacial de meteoritos, obtenemos el resultado anunciado anteriormente.

Esta ley del  $10^{-25}/v$  es formalmente idéntica a la ley del  $C/s$  de los cráteres lunares, aunque con una diferencia: mientras los cráteres pueden solaparse, los meteoritos no.

No obstante, es divertido ver que ocurriría si  $P(r) = 10^{-25}/v$  fuese válido para cualquier valor de  $v$ , por pequeño que fuera, y si además — ¡idea descabellada! — los meteoritos pudieran solaparse. Añadiendo la suposición inocua de que los meteoritos son esféricos, el conjunto de tremas puede ser estudiado directamente (sin necesidad de recurrir a los resultados de El Hérou, 1978).

Las secciones rectilíneas de los meteoritos con rectas trazadas al azar en el espacio son tremas rectilíneas, y se puede demostrar que el número de estas con centro en un intervalo de 1 km y de longitud mayor que  $u$  Km es  $C' 10^{-25}/u$ . ( $C'$  es un factor numérico cuyo orden de magnitud es 1 y no tiene mayor importancia en este contexto). Por tanto, según un resultado del capítulo 32, se tiene que la dimensión de las secciones rectilíneas del conjunto de tremas vale  $1 - 10^{-25}$ . Si les sumamos 2 para pasar de las secciones rectilíneas a la figura total, obtenemos  $3 - D = 10^{-25}$ .

Este resultado es una sandez, pues en particular implica que los meteoritos casi llenan el espacio, aun permitiendo que se solapen. No obstante, vale la pena echar una segunda mirada a esta codimensión  $3 - D = 10^{-25}$ . Supongamos que, en primera aproximación, la relación  $10^{-25}/v$  vale para todos los valores de  $v$  mayores que un corte positivo  $\eta > 0$  y que no hay meteoritos de un tamaño menor. El razonamiento que hemos esbozado afirma que, si se pudiera pasar efectivamente al límite  $\eta \rightarrow 0$ , el conjunto complementario de los meteoritos convergería a un fractal por tremas de dimensión  $D = 3 - 10^{-25}$ . Por suerte, este límite se alcanzaría tan lentamente que, en las escalas observables, el solapamiento de meteoritos no puede plantear ningún problema. Por desgracia, el valor de  $D$  no puede tener ninguna importancia práctica, sea cual sea.

#### *Apéndice: cráteres no escalantes*

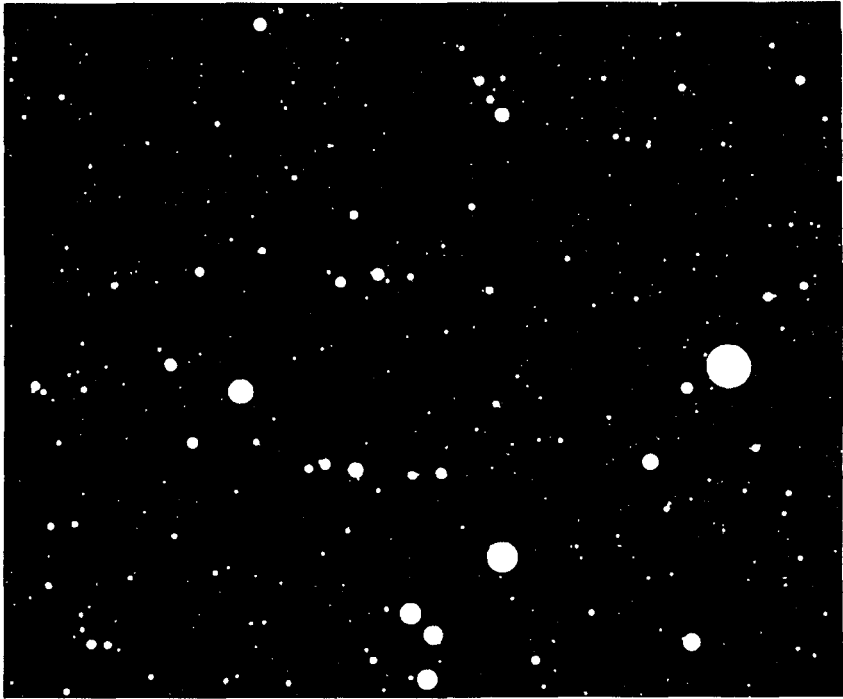
Para lo que nos interesa ahora, expresaremos la distribución de cráteres de la Luna como  $Pr(A > a) = Fa^{-\gamma}$ , con  $\gamma = 1$ . Parece que para Marte vale el mismo  $\gamma$ , pero en los satélites de Júpiter se encuentran otros valores de  $\gamma$  distintos (Soderblom, 1980). Análogamente, para los meteoritos de pequeño

volumen se tiene  $\gamma < 1$ . Los conjuntos residuales por tremas no son escalantes.

EL CASO  $\gamma > 1$ . En este primer caso no escalante, cualquier punto dado de la superficie del planeta, con independencia del valor de  $W$ , cae casi con toda certeza dentro de una infinidad de cráteres. La textura de la superficie está abrumadoramente dominada por los cráteres pequeños. El satélite joviano Calisto tiene esa estructura y se caracteriza, en efecto, por  $\gamma > 1$ . Cuando en los antecesores de este ensayo, antes de la misión Voyager, se discutía el caso  $\gamma > 1$ , éste no era más que una posibilidad teórica.

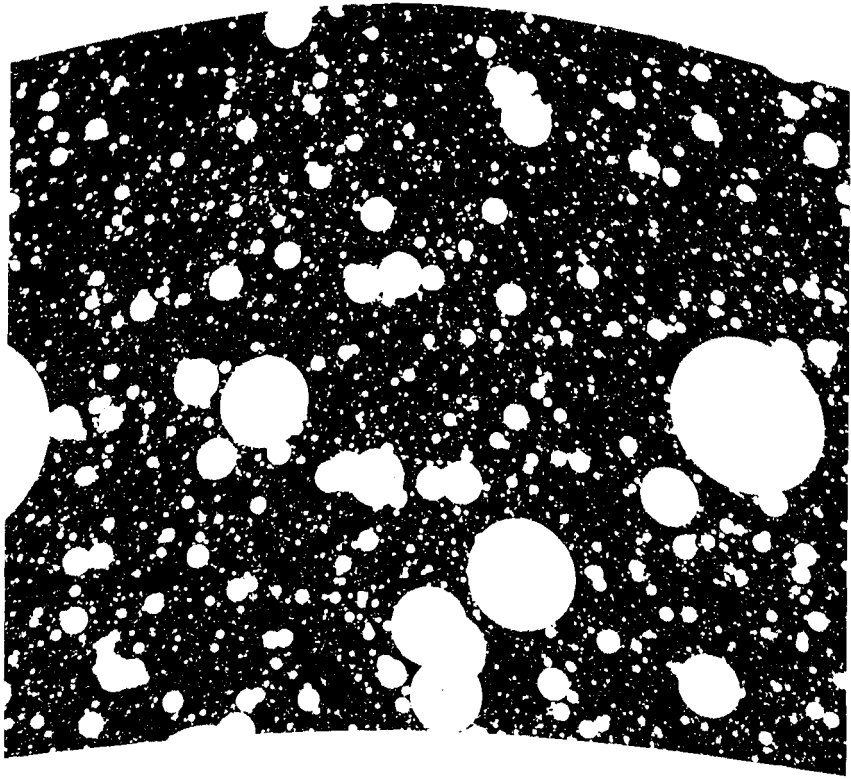
EL CASO  $\gamma < 1$  CON LAS ÁREAS DE LOS CRÁTERES ACOTADAS. Denotemos por  $l$  esta cota. La probabilidad de que un punto no caiga en el interior de ningún cráter es positiva  $\square$  pues la integral  $\int_0^l Pr(A > a) da$  converge  $\blacksquare$ , pero disminuye al aumentar  $W$ . La superficie agujereada resultante nos recuerda una loncha de queso suizo (mejor aún que en el caso escalante). Cuanto mayor es el valor de  $\gamma$ , menor es el número de agujeros pequeños y más «macizo» es el queso resultante. Sin embargo, y con independencia del valor de  $\gamma$ , la loncha tiene un área positiva, y es por tanto un conjunto (no autosemejante) de dimensión 2. Por otra parte, no me cabe la menor duda de que su dimensión topológica es 1, con lo que es un fractal.

En el espacio (meteoritos) las dimensiones de este fractal por tremas son  $D=3$  y  $D_T=2$ .

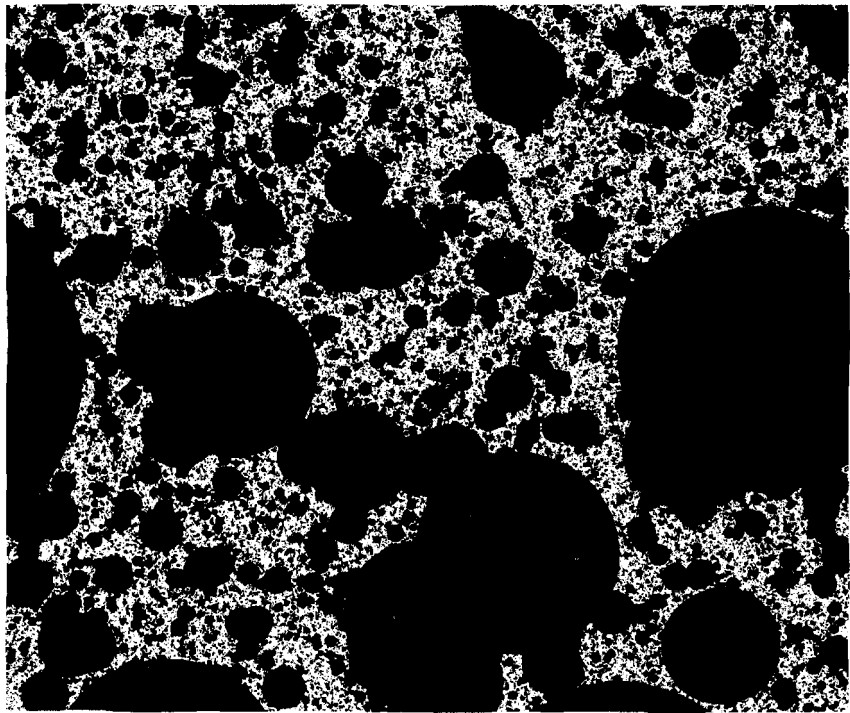


FIGS. 429 y 430. *Tremas redondas y más bien pequeñas, en blanco, y lonchas aleatorias de «queso suizo» (dimensiones  $D = 1,9900$  y  $D = 1,9000$ )*

Las tremas son discos circulares blancos. Sus centros están distribuidos al azar en el plano. El área del disco de rango  $\rho$  es  $K(2-D)/\rho$ , donde la constante numérica se escoge convenientemente para reproducir el modelo de tremas descrito en el texto. En la lámina 429 se muestra una especie de Appenzell cuya parte en negro tiene una dimensión  $D = 1,9900$ , y en la lámina 430 una especie de Emmenthal con una parte en negro de dimensión  $D = 1,9000$ .







FIGS. 431 y 432. *Tremas redondas más grandes, en negro, e hilos blancos ahorquillados al azar (dimensiones  $D = 1,7500$  y  $D = 1,500$ )*

La construcción sigue el mismo método que en las láminas 429 y 430, aunque las tremas son mayores y se representan en negro. Así apenas queda nada por arrancar. Los valores de  $D$  son las dimensiones de los fractales residuales, en blanco.



La *textura* es un concepto escurridizo que tanto los matemáticos como los demás científicos tienden a evitar, pues no saben como dominarlo. Los ingenieros y los artistas, por contra, no pueden desentenderse de él, pero en general no consiguen manejarlo a su entera satisfacción. Hay muchos indicios, no obstante, de que varios aspectos concretos de la textura están cerca de una descripción cuantitativa.

De hecho, buena parte de la geometría fractal podría pasar por un estudio *implícito* de la textura. En este capítulo y el siguiente abordaremos *explícitamente* dos aspectos concretos, insistiendo sobre todo en los cúmulos de galaxias. Algunas discusiones sobre la textura se hubieran podido presentar de manera dispersa en capítulos anteriores, empezando por los capítulos 8 y 9, pero me pareció preferible (¡al precio de interrumpir la discusión sobre las tremas!) reunir todos mis comentarios sobre la textura en un solo lugar.

Como ya he dicho varias veces, mi búsqueda de modelos de cúmulos de galaxias procedió por aproximaciones sucesivas. Los primeros, descritos en los capítulos 32 y 33, concordaban con la  $D$  deseada a la vez que respetaban el principio cosmográfico condicional. Los que siguieron, descritos en el capítulo 35, también concuerdan con la textura.

Las secciones introductorias de este capítulo presentan las observaciones básicas relativas a las galaxias que me llevaron a distinguir dos aspectos de la textura, a los que llamo *lagunaridad* y *subcolaridad*. *Lacuna* (afín a *lago*) es el equivalente latino de *hueco*, por lo que diremos que un fractal es *lagunar* si sus huecos tienden a ser grandes, en el sentido de contener grandes intervalos (discos o bolas). Y un fractal *subcolante* es aquél que «casi» contiene los filamentos que habrían permitido la percolación; como en latín *percolare* significa «fluir a través de» (capítulo 13), *subcolare* parece el neolatínismo adecuado para «casi fluir a través de».

En el resto de este capítulo se introducen varias medidas de lagunaridad, pero las medidas de subcolaridad desbordan el tono elemental de una discusión como la que nos ocupa.

En el capítulo 35 se demuestra cómo se pueden controlar la lagunari-  
dad y la subcolaridad por medio de tremas.

Hasta ahora se ha asignado un papel fundamental a las dimensiones  
fractal y topológica en la medición de los fractales. El capítulo 14 fue  
una excepción (incompleta), pues el orden de ramificación introduce dis-  
tinciones más refinadas entre fractales con las mismas  $D_T$  y  $D$ . Nos he-  
mos encontrado con muchas expresiones de la forma

$$\text{prefactor} \times (\text{cantidad})^{\text{exponente}}$$

pero hasta ahora sólo hemos considerado el exponente. El estudio de la  
textura nos obliga a prestar atención también al prefactor. Como no podí-  
amos despreciarlo siempre, no puede sorprendernos que ni la naturaleza  
(la ciencia) ni el pensamiento humano (la matemática) sean simples.

### *Los filamentos «cirriformes» de las galaxias*

En París, en 1974, después de mi primera conferencia sobre el mo-  
delo presentado en el capítulo 32, alguien me llamó la atención sobre un  
misterioso descubrimiento empírico. Mi única intención había sido con-  
seguir el valor deseado de  $D$  para un fractal (de hecho, todavía no había  
inventado el término *fractal*). Pero, durante la discusión, un astrónomo  
que no se identificó señaló que se daba además otro elemento inesperado  
de verosimilitud: a menudo, los puntos de las muestras generadas por mi  
modelo parecen caer sobre líneas casi rectas, y en general parecen distri-  
buidos sobre unos «cuasi-ríos» estrechos o «cuasi-filamentos». El astró-  
nomo desconocido me dijo también que las galaxias presentaban esta  
propiedad de forma más manifiesta aún, y que un «cuasi-río» de galaxias  
visto más de cerca se descompone en «cuasi-ríos» más delgados. Tam-  
bién recalcó que *río* es un término poco adecuado, pues las estructuras en  
cuestión son disconexas.

Para evitar que la terminología nos confundiera, recordé que los me-  
teorólogos llaman *cirros* a las nubes lanudas y diáfnas, y archivé en mi  
mente la idea de que las galaxias tienen una *estructura cirriforme*, y de  
que convendría mejorar el modelo para que los cirros fueran aun más pa-  
tentes.

Encontré las referencias pertinentes mucho más tarde: Tombaugh ha-  
bía observado los «cirros» en 1937, en la «supergalaxia» Perseo, y de  
Vaucouleurs había confirmado su existencia en la década de los cin-  
cuenta, en las supergalaxias Local y del Sur. Nuevas confirmaciones se

encuentran en Peterson, 1974 (relativas al catálogo de Zwicky), en Joëveer, Einasto y Tago, 1978, y en Soneira y Peebles, 1978 (relativas al catálogo de Shane y Wirtanen, del Lick Observatory; véase Peebles 1980).

### *Fractales cirriformes*

Está claro que en un polvo fractal aleatorio *puede* presentarse una estructura cirriforme, aunque *no tiene por qué* ser así. No se da en el modelo de Fournier del capítulo 9, que genera un conjunto de «grumos». Por el contrario, aparecen inmediatamente los cirros si se toma la alfombra de Sierpinski del capítulo 14 y se desconecta el generador sin brusquedad. Como la dimensión fractal resultante puede tomar cualquier valor, queda claro que el hecho de ser cirriforme no es una cuestión de dimensión. Sin embargo, los cirros no aleatorios construidos expresamente son demasiado artificiales para que esté justificado prestarles mucha atención.

Por esta razón era digno de destacar que, en un modelo aleatorio con una  $D$  suficientemente próxima a 2, debiera presentarse una estructura cirriforme incuestionable, aunque no intencionada.

Ello me llevó a examinar cuidadosamente otras familias de fractales aleatorios. En las láminas del capítulo 28 y en la lámina C15 se encuentran configuraciones particularmente inmediatas e interesantes, donde los archipiélagos, en los que parecen reunirse muchas de las islas, tienen más a menudo forma de atolón que de macizo.

### *Los cirros son de esperar en los fractales «cuasi» percolantes*

Las láminas 431 y 432 indican que los fractales construidos por el procedimiento indicado en el capítulo 33, extrayendo al azar tremas discoloidales, presentan una estructura marcadamente cirriforme. Basta con que la dimensión sea próxima a la dimensión crítica de percolación,  $D_{crit}$ , aunque ligeramente inferior. Las razones de la estructura cirriforme están claras en este caso. Hagamos disminuir  $D$  por debajo de  $D_{crit}$ , pasando por una sucesión de fractales, contenidas cada una en las anteriores. Ya sabemos que la dimensión topológica cambia discontinuamente de 1 a 0, pero esta discontinuidad es algo excepcional: la mayoría de las facetas de la forma varían continuamente. Así por ejemplo, la fotografía desenfocada que se obtiene sustituyendo cada punto por una bola de radio  $r_0$  varía continuamente. Dicha fotografía desenfocada tiene forma de arroyo,

no sólo cuando  $D > D_{\text{crit}}$ , sino también cuando  $D_{\text{crit}} - D$  es positivo pero pequeño.

Nótese que también se hubiera podido definir una  $D_{\text{crit}}$  para los fractales del capítulo 32, pero en tal caso su valor es degenerado, igual a su valor máximo  $D=2$ .

### *La lagunaridad observada de las galaxias*

Un segundo fantasma ronda por los armarios de la mayoría de modelos de la distribución de galaxias. Para evitar críticas odiosas de otros (aun cuando puedan estar justificadas), consideremos cualquiera de mis modelos primitivos, que he analizado en los capítulos 32 y 33. Si se ajusta la  $D$  a los datos experimentales ( $D \sim 1,23$ ), las regiones limitadas de espacio que muestran mis láminas parecen razonables a primera vista. Pero los mapas generales del cielo no concuerdan con lo observado. En sus huecos hay dominios inmensos (de una décima parte del cielo o más) totalmente vacíos de galaxias a cualquier distancia prescrita. Por contra, en los mapas reales (por ejemplo, el del observatorio Lick, Peebles 1980) parece bastante homogéneo e isótropo, excepto a escalas bastante finas. Usando mi terminología, el cielo tiene poca *lagunaridad*, mientras que los modelos tienen mucha.

UNA IMPLICACIÓN COSMOLÓGICA APARENTE. Esta última circunstancia me inclinó, hacia 1970, a atribuir erróneamente la apariencia del cielo a una  $D$  mucho mayor que el valor 1,2 sugerido por de Vaucouleurs (1970). Y por lo que respecta a los cosmólogos, ya sabemos que suspiran por un universo homogéneo, y esperan que a partir de cierto corte superior prevalezca la homogeneidad, con  $D=3$ . No dudarían en interpretar la discrepancia anterior como un argumento más a favor de que los fractales con  $D \sim 1,23$  (y en general con  $D < 3$ ) sólo sirven para describir una pequeña región del universo.

LA LAGUNARIDAD ES UN PARÁMETRO DISTINTO DE  $D$ . De hecho, demostraré enseguida que a menudo se puede mantener la  $D$  de un fractal modificando su lagunaridad. La idea principal se ilustra en la lámina 444, mediante dos alfombras de Sierpinski de la misma  $D$  que tienen un aspecto muy distinto. La de la izquierda tiene huecos más grandes y es más lagunar, tanto intuitivamente como de acuerdo con las medidas que propondré.

IMPLICACIÓN COSMOLÓGICA. La inferencia usual de que la baja lagunaridad que se percibe implica una cota superior  $\Omega$  «pequeña» puede ser muy precipitada. El abogado del diablo podría argumentar inmediata-

mente que las evidencias en favor de  $D \sim 1,23$  a pequeña escala y una casi isotropía a gran escala *no* son incompatibles con un modelo fractal con  $\Omega = \infty$  convenientemente diseñado. Y vencer en esta discusión no significa refutar que  $\Omega < \infty$ , sino solamente demostrar que la determinación de  $\Omega$  precisa de más datos y de mayor cuidado.

### *La lagunaridad de la turbulencia*

La cuestión de si la cota superior  $n$  es pequeña o grande también es aplicable al estudio de la turbulencia. Como ya se dijo en el capítulo 10, Richardson (1926) proclama que, en la atmósfera,  $\Omega$  es sumamente grande, mientras que muchos meteorólogos creen que es pequeña. Así pues, la mayoría de comentarios de la sección anterior tienen su homólogo turbulento.

Como quedan pocos defensores vivos de que  $\Omega = \infty$ , la discusión es menos intensa en el caso de la turbulencia que en el de las galaxias, y es mejor plantearla en este último contexto.

### *La lagunaridad de un polvo de Cantor*

El concepto de lagunaridad (contrariamente a lo que sucede con el de subcolaridad) tiene sentido ya en la recta, por lo que las afirmaciones de las secciones anteriores se justifican más fácilmente para los polvos lineales. Recordemos (capítulo 8) que un polvo de Cantor  $C$  en  $[0,1]$  puede tener cualquier  $D$  comprendida entre 0 y 1 (exceptuando los límites) de muchas maneras distintas, y que los resultados no tienen por qué parecerse.

Y esto ocurre aun en el caso de que  $C$  se descomponga en un número prescrito  $N$  de partes iguales. En efecto,  $D$  y  $N$  determinan la longitud de dichas partes,  $r = N^{-1/D}$ , pero *no* sus posiciones en  $[0,1]$ . En consecuencia, los mismos valores de  $D$  y  $N$  (y por tanto de  $r$ ) son compatibles con distribuciones marcadamente diferentes de las partes.

En un caso extremo, se pueden distribuir las partes en dos grupos en las proximidades de 0 y 1. Ello deja un gran hueco en el centro, cuya longitud relativa  $1 - Nr = 1 - N^{1-1/D}$  es muy próxima a 1. Tenemos un ejemplo en la sección horizontal media de la alfombra de Sierpinski de la lámina 444, izquierda. El mismo efecto se consigue colocando un único grupo grande en cualquier lugar entre 0 y 1.

En el otro extremo, se pueden separar las  $N$  partes mediante  $N - 1$

huecos de la misma longitud  $(1 - Nr) / (N - 1)$ . Tenemos un ejemplo en la sección horizontal media de la alfombra de Sierpinski de la lámina 318, derecha. Cuando la coagulación es aleatoria, como en el capítulo 23, los huecos tienen aproximadamente la misma longitud.

Cuando  $N > 1$ , el resultado de la construcción en el primer caso extremo tiene el aspecto de un conjunto de puntos dispersos, «imitando» así la dimensión  $D = 0$ , mientras que en el segundo caso extremo el resultado de la construcción parece un intervalo «entero», con lo que «imita» la dimensión  $D = 1$ . Y naturalmente se puede imitar cualquier  $D$  entre 0 y 1 escogiendo adecuadamente los lugares ocupados por los  $N - 1$  huecos, cuyas longitudes relativas suman  $1 - Nr$ .

El contraste entre ambos casos extremos aumenta con  $N$ ,  $1/r$  y  $b$ . Resulta difícil adivinar la dimensión fractal a partir de la apariencia de un fractal de lagunaridad escasa con  $N$  grande. Sin embargo, para  $N$  pequeño está clara. Por tanto, el juego de adivinar  $D$  con sólo mirar un fractal tiene sus limitaciones. No es ninguna tontería (y estábamos haciendo lo correcto al entregarnos a él en capítulos anteriores), pero en el caso de las galaxias es engañoso.

□ Es clarificador para esta discusión un tema que la necesidad ha «exilado» al capítulo 39. El examen ocular de un *fractal no lagunar* revela su dimensión de semejanza, que como veremos es 1, y no su dimensión de Hausdorff. En este caso ambas dimensiones son distintas, y la segunda es la expresión más apropiada de la dimensión fractal. ■

### *Huecos frente a cirros para $N \gg 1$ y $D > 1$*

Cuando  $N \gg 1$  y  $D > 1$ , una elección adecuada del generador puede dar cualquiera de las cuatro combinaciones siguientes: lagunaridad alta o baja, y cirros arbitrariamente próximos a la percolación o ausencia de cirros. Así pues, nuestros dos aspectos de la textura pueden variar, en principio, de forma independiente.

### *Medidas alternativas de la lagunaridad*

En el corto espacio de tiempo transcurrido desde que empecé a investigar la lagunaridad, varios enfoques distintos han demostrado ser dignos de estudio. Desgraciadamente, no se debe esperar que las medidas alternativas resultantes estén relacionadas por funciones monótonas. Son números reales escogidos para cuantificar la forma de una curva, y partici-



pan por tanto de los conceptos de «individuo medio» y de «valor típico de una variable aleatoria». Y aunque sea triste, no se puede alterar la realidad de que los valores típicos son, por su propia naturaleza, indeterminados (a pesar de la determinación de muchos estadísticos a apostararlo todo en defensa de su medida favorita).

### *El prefactor de la distribución de huecos*

Uno se siente tentado a medir el grado de lagunaridad de un polvo de Cantor por la longitud relativa del mayor hueco. Por otra parte, en figuras planas como las de la lámina 444, la lagunaridad tiende a variar de modo inversamente proporcional a la razón entre el periodo de la trema y la raíz cuadrada de su área. Aunque se obtiene una medida más prometedora a partir de la distribución de tamaños de los huecos.

Véamos en el capítulo 8 que las longitudes de los huecos de un polvo de Cantor satisfacían la ley  $Nr(U > u) \propto Fu^{-D}$ , en el sentido de que  $\log Nr(U > u)$ , representado en función de  $\log u$ , tiene una gráfica en forma de escalera regular. La discusión que nos ocupa ahora no cambia nada del resultado anterior, pero el prefactor  $F$ , que hasta ahora no tenía ninguna importancia, pasa al primer plano.

Debemos enfrentarnos al hecho de que la definición de  $F$  es un tanto arbitraria. Por ejemplo,  $F$  puede tomarse con respecto a la línea que une los extremos izquierdos de los escalones, los extremos derechos o los puntos medios. Por suerte, esos detalles carecen de importancia. Se observa que, a medida que *aumenta* la lagunaridad, cualquier prefactor definido con un poco de sentido común *disminuye*. Y lo mismo ocurre con los factores de escala del volumen o el área relativos a las esponjas fractales o a las alfombras de Sierpinski. En todos los casos el aumento de lagunaridad es debido a la fusión de varios huecos en uno mayor. Esto hace que la gráfica de la escalera se deslice hacia las 4:30, una dirección más abrupta que la propia pendiente global,  $-D/E$ , de la escalera, lo que causa la disminución de  $F$  anticipada.

Vemos, pues, que en la familia de fractales, especial pero bastante amplia, que contiene los polvos de Cantor y las alfombras de Sierpinski la lagunaridad se puede medir, y por tanto definir, por medio de  $F$ .

Sin embargo, la validez de esta definición es limitada. Deja ya de ser útil cuando el centro del gran medallón central de la alfombra es ocupado por otra alfombra menor. Necesitamos definiciones alternativas, y la mejor es sustituir  $F$  por el prefactor de la relación  $M(R) \propto R^D$ , cuya validez es más general.

## *La lagunaridad como efecto de segundo orden relativo al prefactor másico*

Cuando un fractal *no* se ha construido iterativamente (como cuando es aleatorio, por ejemplo) hacen falta sustitutos de la lagunaridad. Los descritos en esta sección y las siguientes son promedios estadísticos, incluso en el caso no aleatorio del polvo de Cantor.

Consideremos en primer lugar los polvos de Cantor obtenidos como secciones horizontales medias de las dos figuras de la lámina 444. Tomemos la masa total de cada polvo igual a 1 y consideremos la masa contenida en distintos subintervalos de longitud  $2R=2/7$ . En el ejemplo más lagunar de la izquierda, dicha masa toma valores muy dispersos entre 0 y  $1/2$ , mientras que en el ejemplo menos lagunar de la derecha la dispersión en torno al valor medio es muy pequeña. Desgraciadamente, la distribución de masa correspondiente al polvo de Cantor es complicada, y más vale pasar directamente al caso más simple de un polvo de Cantor totalmente aleatorio,  $P$ .

Supondremos que  $P$  interseca  $[0,1]$ , y denotaremos por  $\langle W \rangle$  la masa esperada contenida en dicho intervalo (las razones de esta notación se aclararán enseguida). Si tomamos un pequeño intervalo  $[t, t+2R]$  contenido en  $[0,1]$ , la masa esperada contenida en él es  $2R\langle W \rangle$ , como era de prever. Pero si se descartan los casos sin interés en que la masa contenida es nula, la masa esperada aumenta a  $(2R)^D\langle W \rangle$ . Su valor depende de  $D$ , y de nada más. (Ello demuestra que la probabilidad de que nuestro polvo interseque el intervalo  $[0,1]$  es  $(2R)^{1-D}$ .) Dicho de otro modo, la misma masa resulta ser  $W(2R)^D$ , donde  $W$  es una variable aleatoria: unas veces grande y otras pequeña, pero en promedio igual a  $\langle W \rangle$ , con independencia de la lagunaridad.

Profundicemos un poco más y busquemos cuánto se apartan de 0 los valores efectivos de  $W/\langle W \rangle - 1$ . La medida convencional de esta discrepancia es el valor esperado de la expresión de segundo orden  $(W/\langle W \rangle - 1)^2$ , que se denota por  $\langle (W/\langle W \rangle - 1)^2 \rangle$ . Esta lagunaridad de segundo orden es pequeña cuando la lagunaridad intuitiva es baja, y es grande cuando también lo es ésta última. Por tanto,  $\langle (W/\langle W \rangle - 1)^2 \rangle$  es un candidato a *definición* de lagunaridad. Otras definiciones alternativas, como  $\langle |W/\langle W \rangle - 1| \rangle$ , son tentadoras, pero son más difíciles de evaluar que la media cuadrática.

Resumiendo, hemos ido más allá de la relación «masa  $\propto R^D$ » para prestar mayor atención al prefactor de proporcionalidad entre la masa y  $R^D$ . Nótese que el concepto de lagunaridad no tiene nada que ver con la topología y se refiere a comparaciones entre figuras con una  $D$  dada; su

posible aplicación a comparaciones entre distintos valores de  $D$  está aún por estudiar.

### *La lagunaridad como efecto de primer orden referido al prefactor másico*

Un enfoque alternativo de la lagunaridad se basa en la distribución de masa en el intervalo  $[t, t+2R]$ , condicionada a que el punto medio  $t+R$  pertenezca a  $P$ . Esta condición implica que  $[t, t+2R]$  interseca  $P$ , aunque la inversa no tenga por qué ser cierta: si  $[t, t+2R]$  corta a  $P$ , el punto medio  $t+R$  no tiene por qué estar necesariamente en  $P$ . La condición más restrictiva que imponemos ahora sobre  $[t, t+2R]$  tiene una mayor tendencia a eliminar los casos en los que la masa está muy por debajo de la media, lo que conduce a una masa esperada mayor. En otras palabras,  $W$  es sustituida por  $W^*$  y se cumple que  $\langle W^* \rangle > \langle W \rangle$ . Además, el cociente  $\langle W^* \rangle / \langle W \rangle$  es grande si  $P$  es muy lagunar y pequeño si lo es poco. Tenemos, pues, otro candidato para definir una medida de la lagunaridad:  $\langle W^* \rangle / \langle W \rangle$ .

### *La transición en el corte y la lagunaridad*

Los enfoques de la lagunaridad discutidos hasta aquí son intrínsecos, es decir, no implican ninguna comparación con nada externo. No obstante, ya sabemos que muchos sistemas físicos comportan una cota superior finita  $\Omega$ . Dichos sistemas permiten abordar la definición de lagunaridad desde un nuevo punto de vista, un poco menos general que los dos anteriores pero muchísimo más útil.

Sustituyamos nuestro conjunto fractal  $P$ , con  $\Omega = \infty$ , por otro conjunto fractal  $P_\Omega$  que «se parezca a  $P$ » a escalas inferiores a  $\Omega$  y sea casi homogéneo a escalas superiores. Un ejemplo de  $\Omega$  lo tenemos en el radio de transición en el que la distribución de galaxias pasa de  $D < E = 3$  a  $D = 3$ . Esta transición, que hasta ahora podíamos mantener un tanto borrosa, hay que precisarla más. La idea es que un observador situado en un punto de  $P$  contempla  $\Omega$  como el tamaño del menor pedazo que debe investigar para hacerse una idea bastante aproximada del todo. Para este observador, el mundo menos lagunar parecería convertirse muy rápidamente en homogéneo, mientras que el mundo más lagunar parecería hacerlo muy lentamente.

El primer impulso es escribir

$$\langle M(R) \rangle = \alpha R^D \text{ para } R \ll \Omega$$

$$\text{y } \langle M(R) \rangle = \beta R^E \text{ para } R \gg \Omega,$$

y razonar que la transición se produce cuando  $\alpha R^D = \beta R^E$ , esto es,  $\Omega^{E-D} = \alpha/\beta$ . Por tanto

$$\langle M(R) \rangle = \alpha \Omega^{D-E} R^E \text{ para } R \gg \Omega.$$

Una variante menor escoge el punto en que las dos fórmulas tienen la misma derivada, con lo que  $\Omega^{*E-D} = D\alpha/E\beta$ . Cuando aumenta la lagunaridad (es decir,  $\alpha$ ) pero  $\beta$  y  $D$  permanecen fijas, tanto  $\Omega$  como  $\Omega^*$  aumentan. Ambas son buenos candidatos para definir y medir la lagunaridad.

### *Invariancia por traslación*

El hecho de que una recta pueda deslizarse sobre sí misma se expresa diciendo que es invariante por traslación. Por contra, en el capítulo 22 se subrayaba que los polvos de Cantor tienen la propiedad *no* deseable de no ser invariantes por traslación. El polvo triádico original,  $C$ , y el que resulta de efectuar una traslación de  $1/3$ , por ejemplo, ni tan siquiera se intersecan. Por contra,  $C$  y el que resulta de trasladarlo  $2/3$  tienen en común la mitad de  $C$ .

En el caso de un polvo de Cantor de lagunaridad máxima y  $N > 1$ , las únicas traslaciones admisibles que dan una intersección significativa son las próximas a 1 o las próximas a 0. En el caso de lagunaridad mínima, la longitud de traslación admisible puede ser (aproximadamente) cualquier múltiplo de  $1/N$ .

En otras palabras, si se quiere aplicar la condición de invariancia por traslación a los polvos de Cantor, entonces hay que rebajar dicha condición, pero menos cuanto menor es la lagunaridad.

En el capítulo 22 llegábamos a la conclusión de que la condición de invariancia por traslación y el principio cosmológico se podían generalizar a los fractales si éstos eran aleatorios y se reformulaban las invariancias en forma «condicional». Esta reformulación nos proporciona una de las principales razones para introducir los fractales aleatorios.

### *De la textura estratificada a la no estratificada*

El proceso empleado en este capítulo para variar la subcolaridad de una alfombra de Sierpinski y la lagunaridad de un polvo de Cantor o una

alfombra de Sierpinski implica una vuelta a los estratos característicos de los fractales no aleatorios y de los fractales aleatorios primitivos. El método, aunque potente, es artificial. En particular, la restricción a cambios de escala con razones del tipo  $r^k$  crea lagunaridad a costa de reducir el alcance de la autosemejanza. Para un valor grande de  $N$  (por ejemplo,  $N=10^{22}$ , véase la leyenda de la lámina 167), y una  $r$  correspondientemente baja, la estratificación es pronunciada y visible.

Este modo de controlar la lagunaridad y la subcolaridad es obviamente indeseable. Por eso es una suerte que yo mismo descubriera que uno se las puede arreglar mucho mejor con una generalización del método de tremas, sustituyendo los segmentos, discos y bolas por las formas más generales que se presentan en el capítulo siguiente.

### *Fractales no lagunares*

Un fractal puede tener lagunaridad nula, como se demuestra en una entrada del capítulo 39.

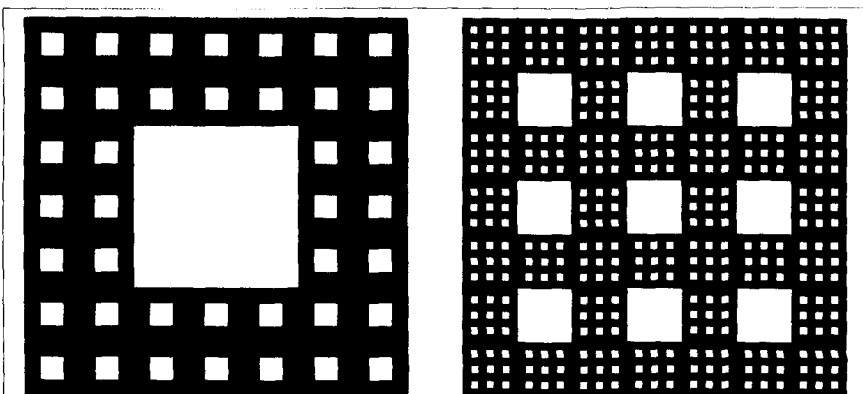


FIG. 444. *La lagunaridad de la alfombra*

Considérense las alfombras de Sierpinski obtenidas a partir de los generadores



Para ambos generadores se tiene que  $b = 1/r = 1/7$  y  $N = 40$ , por tanto  $D \sim 1,8957$ . El hecho de que  $N = 40$  quizá no sea evidente, pero salta a la vista en los estadios siguientes, que se muestran arriba ampliados en un factor 7.

Está claro que el hecho de que ambas tengan la misma  $D$  no resulta obvio. A lo que se suma el hecho de que la alfombra de la izquierda da la impresión de tener unos agujeros claramente mayores, es decir, de ser mucho más lagunar (*lacuna* = agujero, hueco). El capítulo 34 presenta varios métodos alternativos para concretar esta impresión.

La dimensión  $D \sim 1,8957$  es notablemente próxima a la de la percolación de Bernouilli (final del capítulo 13), pero el parecido es engañoso, pues en ambos casos las topologías son muy distintas.

De acuerdo con el método seguido en este ensayo, en los capítulos 31 y 32 se introdujeron los fractales por tremas mediante los ejemplos más simples, basados en segmentos, discos y bolas. Los resultados fueron gratificantes, pero el uso de tremas más generales produce una riqueza de resultados aún mayor.

Es cierto que El Hérou (1978) demuestra que la dimensión de un fractal por tremas queda determinada únicamente por la distribución de longitudes (áreas o volúmenes) de las tremas. Pero los días en que  $D$  era el único parámetro característico de un fractal acabaron en el capítulo 34, cuando introdujimos la subcolaridad y la lagunaridad. En el presente capítulo se muestra cómo estas características dependen de la forma trémica. Y, de nuevo, las exigencias concretas y la oferta geométrica caminan misteriosamente de la mano.

En lo que respecta a la subcolaridad, la forma de las tremas afecta al valor de  $D_{\text{crit}}$  y por tanto, para un valor dado de  $D$ , afecta al signo y la magnitud de  $D - D_{\text{crit}}$ .

En cuanto a la lagunaridad, las mejoras más simples respecto a capítulos anteriores se logran del modo siguiente. En el caso de fractales lineales por tremas (capítulo 31), los polvos de Lévy son los más lagunares, y cualquier grado menor de lagunaridad se puede conseguir del modo más simple y natural tomando como trema la unión de muchos intervalos. En el caso de fractales por tremas en el espacio obtenidas directamente (capítulo 33), lo más simple es tomar tremas que no sean bolas o discos. En el caso de fractales espaciales por tremas subordinados a un movimiento browniano, tanto ordinario como fraccionario (capítulo 32), lo más simple es tomar como subordinador un polvo fractal menos lagunar que el polvo de Lévy.

Desgraciadamente, el espacio se nos está acabando (este es de hecho el último capítulo que he escrito para esta obra), y los razonamientos relativos a los fractales por tremas requerirían mucha elaboración para

adaptarlos al tono de este ensayo. Por tanto, el presente capítulo no pasa de ser un mero esbozo.

### *Generadores de tremas; isotropía*

La expresión *forma trémica* empleada antes está relacionada con el concepto de *generador de tremas*. La expresión *generador* se ha usado ya en varios capítulos anteriores, por supuesto. Recordemos que los generadores de barras de las figuras de Cantor y de Koch, y los generadores de las tremas de las figuras de Sierpinski, determinan *tanto* la forma del fractal como su  $D$ . Aquí, por el contrario, el generador de tremas lo determina *todo excepto*  $D$ .

GENERADOR DE TREMAS NO ALEATORIO. Consiste en un conjunto abierto en el que se escoge un punto arbitrario como *centro* y de longitud (respectivamente, área o volumen) igual a 2 (respectivamente,  $\pi$  o  $4\pi/3$ ). Las tremas son réplicas a escala de este generador, y sus posiciones y tamaños son aleatorios, con la misma distribución que en los capítulos 31 y 33.

Por ejemplo, en el caso  $E = 1$ , el número de tremas con una longitud mayor que  $\tau$  y centrados en un intervalo de longitud  $\Delta t$  sigue siendo una variable aleatoria de Poisson con valor esperado  $(E - D^*)\Delta t/\tau$ . El Hérou (1978) demuestra que la conocida fórmula  $D = \max(D^*, 0)$  sigue siendo válida bajo algunas hipótesis poco restrictivas sobre la forma del generador de tremas. (La cuestión de si estas hipótesis restrictivas son intrínsecas o se deben al propio método de la demostración es algo que merece ser estudiado más a fondo.)

GENERADOR ACOTADO. Como el objetivo filosófico de la construcción por tremas es crear estructuras globales a partir de una interacción local, es razonable mantener la hipótesis de que las tremas son locales, esto es, acotadas. Aunque las tremas no acotadas pueden llevar a sorpresas interesantes. En la lámina 285 se plasma un modelo por tremas más generalizado.

DEFINICIÓN DE LOS HUECOS. Los huecos no son ya reunión de tremas, sino reunión de componentes abiertas maximales de tremas.

ISOTROPÍA NO ALEATORIA. Para que el generador sea isótropo hace falta poder elegir el origen de modo que el generador sea el conjunto de puntos cuya distancia al origen caiga en algún conjunto del lado positivo de la recta real (normalmente es un conjunto de intervalos predeterminados). El caso isótropo es el más simple y el más investigado.

Sin embargo, la anisotropía no está excluida. Se ve, en particular, que



un polvo fractal se puede hacer *asimétrico* con respecto al pasado y al futuro.

GENERADOR DE TREMAS ALEATORIO. Consiste en un conjunto, parcial o totalmente aleatorio, de longitud (área o volumen) igual a 1. Sería útil disponer de una revisión cuidadosa de la validez del teorema de El Hólou (1978) para este caso.

El nivel de azar mínimo consiste en tomar una muestra única de un proceso generador de conjuntos aleatorios, y hacer todas las tremas idénticas a la muestra (aparte de la posición y el tamaño). El siguiente nivel útil añade una rotación al azar, elegida independientemente para cada trema. O, con más generalidad, se pueden tomar como tremas muestras independientes de un proceso generador de conjuntos aleatorios. Los conjuntos muestra no tienen por qué tener todos el mismo volumen, ya que el volumen se fija mediante un ajuste de escala posterior, seguido de una rotación. Se puede pensar en rotaciones y muestras no independientes, pero por el momento no las he empleado.

ISOTROPÍA AL AZAR. En la primera de las alternativas anteriores la isotropía implica que la muestra sea invariante por rotación. En la segunda, la rotación de la muestra debe estar uniformemente distribuida. En la tercera, basta con que el proceso sea invariante por rotación.

ESTRATIFICACIÓN. Las definiciones anteriores permitirían construir tremas de longitud (o área o volumen) estratificada, esto es, restringida a valores de la forma  $r^k$ . Pero esto confundiría los distintos efectos de la estratificación y de las formas generales de las tremas.

### *Control de la subcolaridad mediante la $D_{crit}$ de fractales por tremas generales*

En el capítulo 34 demostrábamos que es de esperar una estructura cirriforme si el fractal «casi» percola, esto es, si pertenece a una familia con una  $D_{crit}$  bien definida, y si su  $D$  es «sólo un poco» inferior a  $D_{crit}$ . En otras palabras,  $D$  y la intensidad de la estructura cirriforme se pueden ajustar simultáneamente si el modelo tiene como parámetros  $D$  y  $D_{crit}$ .

En un fractal por tremas los parámetros son el número real  $D$  y una función que determina el generador de tremas. Voy a demostrar que  $D_{crit}$  es una función de este último parámetro funcional: se puede hacer arbitrariamente próximo a  $E$  y, si  $E > 2$ ,  $D_{crit}$  se puede hacer arbitrariamente próximo a 1.

UN CASO EN EL QUE  $D_{crit}$  ES ARBITRARIAMENTE PRÓXIMO A  $E$ . Basta con tomar como generador una aguja arbitrariamente delgada o una torta ar-

bitrariamente plana de forma fijada pero con los ejes orientados isotrópicamente (lámina 451). Para demostrar esta afirmación en el plano ( $E=2$ ) nótese que, dada una  $D < 2$ , los centros, tamaños y orientaciones de las tremas se pueden escoger con independencia del coeficiente de planitud del generador. Consideremos a continuación un cuadrado de lado  $L$ , y clasifiquemos las tremas en tres tipos: un tipo mediano con áreas mayores que  $\pi L^2/10$  y mayores que  $\pi \eta^2$ , un tipo superior y otro inferior. Cuando  $D$  es mucho mayor que la  $D_{\text{crit}}$  correspondiente a las tremas discoidales, y las tremas son discos ligeramente achatados, la situación es parecida a la del capítulo 33: las tremas de tipo mediano forman principalmente agujeros separados rodeados por un conjunto muy conexo. Pero si las tremas son muy achatadas, casi lineales, es casi seguro que cortarán nuestro cuadrado en pequeños polígonos desconectados entre sí. El efecto adicional de las tremas achatadas de tipo inferior sólo puede consistir en cortar aún más dichos polígonos. El efecto de las tremas de tipo superior puede ser eliminar nuestro cuadrado, cortarlo en pedazos o aislarlo. Cuando ocurre esto último, ya no puede percolar. En otras palabras, el achatado de las tremas puede hacer que  $D_{\text{crit}}$  sea mayor que cualquier  $D < 2$  escogida previamente.

La generalización a  $E > 2$  es trivial

El mismo efecto se consigue para  $E \geq 2$ , y se extiende también a  $E = 1$ , tomando como generador de tremas el dominio contenido entre una bola (o esfera) de radio mucho mayor que 1 y una bola (o esfera) convenientemente menor.

UN CASO EN QUE  $D_{\text{crit}}$  ES ARBITRARIAMENTE PRÓXIMO A 1. Un razonamiento heurístico sugiere que, cuando  $E \geq 3$ , con tremas en forma casi de aguja,  $D_{\text{crit}}$  se puede hacer arbitrariamente próxima a 1.

### *Control de la lagunaridad mediante la $L$ de fractales por tremas generales*

En una sección del capítulo 34 se demuestra que, cuando las longitudes de las tremas están estratificadas, la lagunaridad se puede controlar. Hagamos ahora constar en acta (sin detallar demasiado) el hecho de que se puede conseguir el mismo objetivo con el generador de tremas. Nos centraremos en la medida de la lagunaridad mencionada en último lugar en el capítulo 34, en la que interviene la cota superior  $\Omega$ .

De hecho, iremos un poco más allá, introduciendo una acotación doble y limitando la escala lineal de tremas al intervalo delimitado por  $\epsilon > 0$  y  $\Lambda < \infty$ .

Se ve fácilmente que un punto escogido al azar sigue teniendo una probabilidad  $(\varepsilon/\Lambda)^{E-D}$  de pertenecer al fractal por tremas truncado resultante. A continuación, asignemos masa a este conjunto con una densidad  $\varepsilon^{D-E}$ . Encontramos que el prefactor  $\beta = \alpha\Omega^{D-E}$  del capítulo 34 se convierte en  $\Lambda^{E-D}$ . Pasando al límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , esta expresión sigue siendo válida para  $\varepsilon = 0$ . Y, por tanto,  $\Omega = \Lambda\alpha^{1/(E-D)}$

(Si  $\Omega$  se define por medio de la definición variante,  $\Omega = \Lambda\alpha^{1/(E-D)}(D/E)^{1/(E-D)}$ .)

Nos resta aún evaluar  $\alpha$ . Se encuentra que depende de la forma global del generador de tremas. Es mayor cuando el generador es un intervalo (disco o bola) y puede tomar valores arbitrariamente pequeños. El umbral  $\Omega$  es pequeño en la misma medida.

Cuando la trema está contenida entre esferas concéntricas de radios  $\alpha \gg 1$  y  $B \gg 1$ , el resultado es muy simple:  $\Omega \propto 1/\alpha$ .

Así pues, es posible hacer que  $\langle M(R) \rangle$ , y por ende la covarianza de la distribución de masa, pase de un modo arbitrariamente rápido a su comportamiento asintótico, en el sentido de que las densidades en dos puntos separados por una distancia mayor que  $\Omega$  se hacen efectivamente independientes.

Es extraño que una disminución de la lagunaridad, debida a una disminución de  $\alpha$ , tenga que conseguirse abriendo el generador. Más bien esperaríamos que un generador más abierto produjera un *aumento* en el tamaño de la región preasintótica. Este hecho confirma de nuevo que el comportamiento de  $\langle M(R) \rangle$ , y por tanto de la covarianza relativa de una distribución de masa, sólo nos da una visión parcial de la estructura de un conjunto. Los momentos de orden superior de  $M(R)$  contienen mucha más información adicional, pero no podemos extendernos más sobre el tema.

### *Control de la lagunaridad en polvos subordinados a trayectorias brownianas*

Una vez controlada la lagunaridad de un polvo lineal, podemos aplicar el resultado en el espacio mediante el proceso de subordinación estudiado en el capítulo 32. Trabajando en el plano, y usando como subordinador una red browniana como la de la lámina 343, se puede conseguir un polvo tan parecido como se quiera a una red infinitamente ramificada. Partiendo de  $E=2$ , tomemos como subordinando una red browniana fraccionaria con  $H > 1/2$ , cuyos huecos son menores que para  $H = 1/2$ . Si además la dimensión del subordinador cumple que  $D/H < E=2$ , y su la-

gunaridad es baja, se puede conseguir que el subordinado parezca llenar el plano (tan aproximadamente como se quiera). Cuando  $E=3$  y  $H=1/3$ , el subordinando es una curva que llena el espacio. Y si  $D/H < E$ , y la lagunaridad del subordinador es baja, se puede hacer que el polvo subordinado llene el *espacio* con un grado de lagunaridad tan pequeño como se quiera, con independencia de  $D$ .

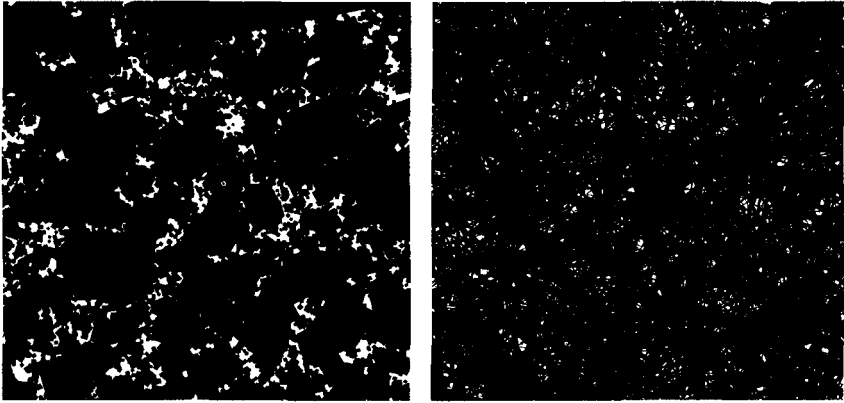


FIG. 451. *Efecto del generador de tremas sobre la lagunaridad de un fractal por tremas*

Estas dos ilustraciones deberían dar una idea del efecto de la forma del generador de tremas sobre la lagunaridad. Ambos generadores tienen forma de diamante, pero uno es casi cuadrado y el otro es una aguja aguda. Contra el fondo blanco se pueden ver pequeños diamantes negros aislados.

En ambas construcciones se ha usado el mismo parámetro  $D$  y las mismas áreas para los diamantes mayor y menor. Se puede probar que las áreas de los residuos en blanco son iguales, aparte de fluctuaciones estadísticas. Sin embargo, resulta obvio a simple vista que uno de los residuos en blanco está muchísimo más disperso que el otro. Las medidas de lagunaridad que he introducido atribuyen un valor mucho menor de los coeficientes de lagunaridad al residuo más disperso.

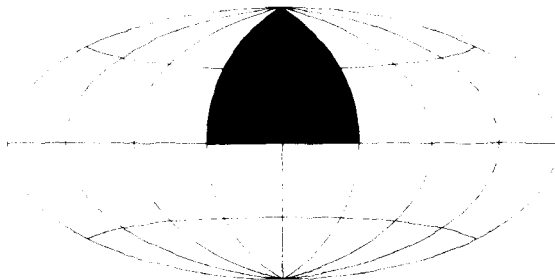
FIG. 453. *Polvo fractal obtenido con tremas no esféricas: Proyección de un octante sobre un cielo esférico.*

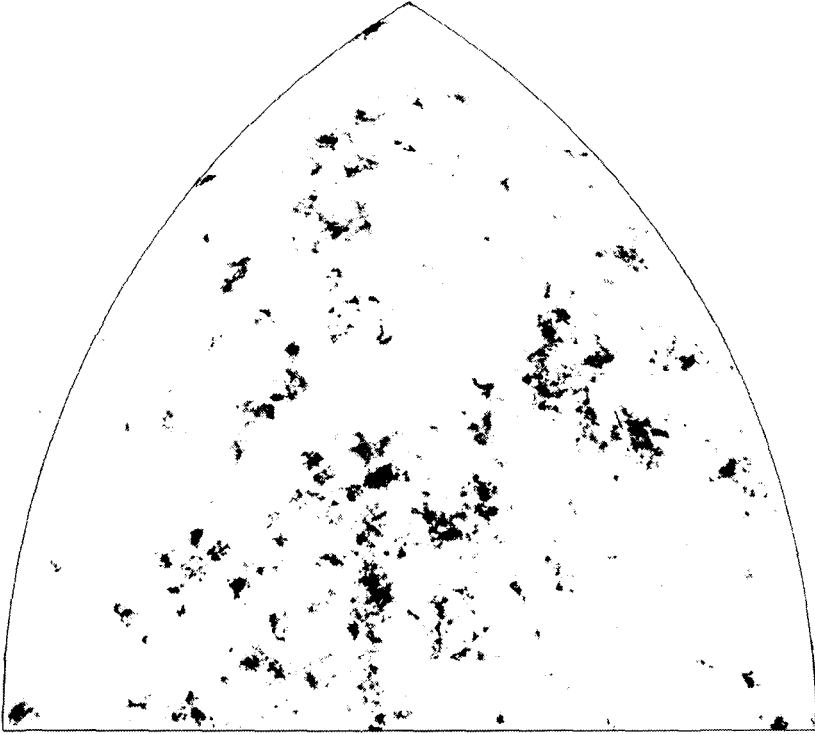
Por razones de lo más embarazoso, esta ilustración no sólo no es la que tenía que ir aquí, sino que, por el momento, no puedo dar las especificaciones precisas de esta lámina. En efecto, hacia enero de 1979 realizamos una gran cantidad de ilustraciones de fractales de dimensión  $D \sim 1,23$  con grados de la-gunaridad y subcolaridad variables y controlados. Pero el archivo que contenía el grueso de los resultados se ha extraviado (o quizá perdido), y los pocos ejemplares que han sobrevivido en otros archivos no llevan las etiquetas adecuadas. A falta de tiempo para reactivar el programa, sólo puedo mostrar lo que tengo a mano.

Hasta donde puedo recordar, el cálculo empieza con un patrón periódico, cuyo periodo es una cuadrícula cúbica de  $600^3$ . En otras palabras, el cálculo se realiza sobre una cuadrícula cúbica de  $600^3$ , cuyas caras opuestas se identifican, creando una especie de toro. La distribución de volúmenes de las tremas es truncada. Después de quitar las tremas, el origen se sitúa en un punto no borrado, que se elige, bien arbitrariamente, bien en una región de alta densidad.

Los puntos cercanos al origen no se representan, y los otros puntos se clasifican en capas definidas por  $R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2$  correspondientes a distintas magnitudes de brillo. Cada capa se proyecta sobre un cielo esférico.

El objeto es procesar los datos disponibles a fin de extraer el máximo de información *independiente*. Para  $R_2$  pequeños se puede proyectar el cielo entero, pero para  $R_2$  mayores no se debe procesar más que una parte conveniente de un periodo del patrón periódico inicial. El valor de  $R_2$  en la capa más externa es mayor cuando el mapa se limita a un solo octante del cielo, por ejemplo el dominio correspondiente a  $x > 0, y > 0, z > 0$ . En coordenadas esféricas se puede definir dicho octante como el correspondiente a latitudes positivas (hemisferio norte) y longitudes comprendidas entre  $-45^\circ$  y  $45^\circ$ . En la proyección de Hammer usada aquí, dicho octante es representado por la «ventana gótica ojival» del diagrama siguiente.





Cuando  $R_2$  llega al valor 600, los datos de las proximidades de los tres vértices se hacen estadísticamente dependientes, y lo mejor es desechar los datos de los vértices inferiores. Así, los datos más allá de  $R_2=600$ , próximos a  $x=z=0$ ,  $y=600$ , o próximos a  $y=z=0$ ,  $x=600$ , se sacrifican para evitar la dependencia estadística inducida por la periodicidad. Por otra parte, para representar la región antipodal  $x < 0$ ,  $y < 0$ ,  $z < 0$ , esto es, las longitudes  $\theta$  del hemisferio sur tales que  $|\theta - 180^\circ| < 45^\circ$ , no hace falta un nuevo cálculo, y el resultado puede parecer suficientemente distinto para considerar que contiene información adicional.

En un estadio final del proceso, cuya finalidad es eliminar las trazas de la red cúbica original, cada punto es desplazado según un vector cuyas coordenadas están uniformemente distribuidas en  $[0,1]$ . Desgraciadamente este proceso da lugar a zonas grises densas con intensidades diversas, que desfiguran el fractal subyacente: lo que vemos son versiones igualadas de zonas muy poco homogéneas.

En esta lámina,  $R_2=600$  y  $R_1=R_2/1,5$ , y por tanto las magnitudes caen en un intervalo estrecho de amplitud  $2,5 \log_{10}(1,5)^2 \sim 0,88$ .

La figura 7 de Mandelbrot (1980b) muestra otro polvo fractal (también sin clasificar) obtenido con otra elección distinta de los  $f$  tremas.





XI  
Miscelánea



Desde el punto de vista fractal, la mayoría de problemas de la física no son específicamente distintos de los que se plantean en otros campos, y esta es la razón por la que diversos casos físicos se encuentran dispersos a lo largo de esta obra, mientras que sólo unos pocos se han reservado para ser discutidos en este capítulo.

Algunos lectores, sin embargo, quizá hayan empezado a leer por este capítulo, pues es el único cuyo título contiene la palabra *física*. Animo a estos lectores a que repasen el índice, pero primero llamaré su atención sobre los siguientes temas propiamente físicos que no aparecen explícitamente en los títulos de los capítulos.

Los capítulos 13 y 14 contienen un estudio de la percolación.

El «jabón» apoloniano del capítulo 18 es un cristal líquido esméctico.

La textura (capítulos 34 y 35) encontrará indudablemente muchas aplicaciones físicas en un futuro muy próximo.

Y, finalmente, unas pocas referencias que serán de interés. La expresión *difractales* fue acuñada en Berry (1979) para denotar las ondas reflejadas por una superficie fractal o las ondas refractadas por un bloque de material transparente con un índice de refracción fractalmente turbulento. Las difractales constituyen un nuevo régimen ondulatorio en el que se exploran niveles de estructura cada vez más finos y en los que la óptica geométrica nunca es aplicable. Berry calcula explícitamente algunas de sus propiedades.

Berry (1978) calcula también la distribución de modos en tambores fractales: resonadores de contorno fractal.

### *Dos tipos de convergencia*

Pasemos ahora a los objetivos de este capítulo. Al dispersar los temas anteriores a lo largo de toda la obra, se dejaba de lado, o se ocultaba bajo la alfombra, un tema muy importante cada vez que éste se planteaba. En

muchos campos de la física, uno de los elementos básicos en la construcción de fractales matemáticas es, por principio, imposible.

Como preludio, recordemos otra vez que el grueso de este ensayo está dedicado a fractales en las que interviene una interpolación recurrente, ya sea en su propia definición o, por lo menos, por efecto de una construcción explícita a posteriori. Cada paso de la construcción parte de una figura geométrica estándar, como por ejemplo un «terágono» poligonal, y la interpola un poco más. El fractal es el límite de tales terágonos, en el sentido de que la distancia entre el terágono y el límite (definida por una generalización conveniente del concepto usual de distancia entre puntos) tiende a cero. Los matemáticos denominan «fuerte» a este límite.

Por contra, otros límites que intervienen en el contexto estadístico se denominan «débiles». En la presentación habitual, la distinción entre los dos tipos de límite parece más todavía una sutileza sin importancia. Pero el tema de la convergencia débil penetra todos los casos, tanto nuevos como antiguos, en que intervienen fractales aleatorios en la «física de redes», que constituye la práctica habitual de la física estadística actual.

La discusión se basará en algunos ejemplos recientes de fractales aplicados a la física y en un problema importante de hidrología de redes que encaja en el mismo molde.

### *El límite fractal del paseo aleatorio*

Como preludio, observemos el papel de la convergencia débil en el contexto del movimiento browniano. Como ya se apuntó en el capítulo 25, un paseo aleatorio sobre una cuadrícula (por ejemplo, por los puntos de coordenadas enteras) se puede «reducir de escala» hasta que los elementos de la cuadrícula se hacen invisibles, y sus efectos sobre los observables son despreciables.

Todo el mundo sabe que este procedimiento genera el movimiento browniano, pero la expresión «genera» tiene aquí un significado nuevo. La secuencia de terágonos empleados en el capítulo 6 para generar una curva de Koch se comporta como una fotografía que va adquiriendo cada vez más detalles mediante un enfoque cada vez más preciso de la cámara. Por contra, una sucesión de paseos aleatorios a escalas reducidas primeramente parece estar a poca distancia de un cierto movimiento browniano, luego más cerca aún de otro movimiento browniano distinto, luego todavía más cerca de otro, etc., sin fijarse nunca en uno determinado. Los matemáticos tienen buenas razones para llamar *débil* a esta clase de convergencia. Y también hay buenas razones para considerar

que un paseo aleatorio a escala reducida es una curva fractal con una cota inferior igual al lado de la cuadrícula. Pero se trata de una nueva clase de corte. En capítulos anteriores, la cota inferior se imponía *a posteriori* a una construcción geométrica definida que en teoría no contiene ningún corte, y que se puede interpolar hasta escalas infinitesimales, generando fractales. Por el contrario, un paseo aleatorio no se puede interpolar de ninguna manera.

### *Los fractales en la «física de redes»*

El alcance del comentario anterior va mucho más allá del movimiento browniano. En efecto, la física estadística tiene razones poderosas para sustituir muchos de los problemas reales que aborda por otros análogos restringidos a una red. Se puede decir, por tanto, que el grueso de la física estadística forma parte de la «física de redes».

Como señalaban mis ensayos anteriores, y muchos otros autores han confirmado, la física de redes está llena de fractales y cuasifractales. Los primeros son figuras en un espacio de parámetros, tales como las «escaleras del diablo» comentadas en la leyenda de la lámina 121. Las segundas son figuras en el espacio real que no son fractales, pues no se las puede interpolar hasta lo infinitesimal, pero parecen fractales en la medida en que sus propiedades, a escalas grandes y medías, son las de los fractales. En los capítulos 13 y 14, al estudiar la percolación de Bernouilli, nos encontramos con un ejemplo paradigmático.

No hace falta decir que estoy plenamente convencido de que las réplicas a escalas cada vez más pequeñas de estas figuras convergen débilmente hacia límites fractales. Y los argumentos de los capítulos 13 y 14 se basan en esta convicción. Los físicos lo encuentran plenamente convincente, a pesar de que el único caso, que yo sepa, en el que se dispone de una demostración matemática completa es el movimiento browniano. Así pues, estas figuras no fractales con límites supuestamente fractales tiendo a considerarlas fractales *en celosía*. Más adelante, en este mismo capítulo, se discuten otros ejemplos importantes.

Otra conclusión relacionada con lo anterior es que los problemas reales, de los que la física de redes no es más que una simplificación manejable, implican las mismas fractales (o casi las mismas). En el caso de los polímeros (que enseguida estudiaremos), Stapleton, Allen, Flynn, Stinson y Kurtz (1980) respaldan esta conclusión.

## Interacción local / orden global

Un descubrimiento fascinante de la física de redes, y que merece ser ampliamente divulgado, es que bajo ciertas condiciones el alcance de las interacciones puramente locales aumenta progresivamente hasta producir efectos globales. Por tomar un ejemplo fundamental, las interacciones entre espines elementales vecinos pueden dar lugar a imanes de tamaño mediano.

Creo que tengo derecho a soñar que llegará un día en que los fenómenos que he representado por fractales brownianos fraccionarios se podrán explicar de esta manera.

### Un ejemplo ficticio

Describiré ahora un ejemplo que, aunque difiere en aspectos fundamentales del mecanismo físico de ordenación, tiene la virtud de ser simple y de recuperar un viejo conocido nuestro, el tamiz de Sierpinski (capítulo 14), como ejemplo de límite débil demostrable. Se colocan los espines en los puntos de coordenadas enteras, de modo que en los tiempos pares (resp., impares) están situados en puntos pares (resp., impares). La regla de cambio consiste en tomar el espín  $S(t, n)$ , en el tiempo  $t$  y la posición  $n$ , igual a  $-1$  si  $S(t-1, n-1)$  y  $S(t-1, n+1)$  son idénticos, y a  $+1$  en caso contrario.

Una línea totalmente ocupada por espines  $-1$  es invariante según esta transformación. Veamos ahora qué efectos tiene introducir una «impureza»  $+1$  en  $n=0$  y  $t=0$ . Los espines  $S(1, n)$  son todos  $-1$  excepto para  $n=-1$  y  $n=+1$ . Las configuraciones para tiempos posteriores son las siguientes:

```

- - - - - + - - - - -
- - - - - + + - - - - -
- - - - - + - + - - - - -
- - - - - + + + + - - - - -
- - - - - + - - - + - - - - -
- - - - - + + - - + + - - - - -
- - - - - + - + - - + - - - - -
- - - + + + + + + + - - - - -
- - - + - - - - - - - + - - - - -
- - + + - - - - - - - + + - - - - -
- + + + + - - - - - + + + + - - - - -
+ - - - - + - - - - - + - - - - -
+ + - - - + + - - - + + - - - + +
```

Muchos lectores reconocerán aquí un triángulo de Pascal, en el que los coeficientes binomiales impares se han sustituido por +1. La  $t$ -ésima línea del triángulo de Pascal completo está formada por los coeficientes de la potencia del binomio  $(a+b)^t$ .

Cualquiera que haya leído el capítulo 14 verá que, si unimos los signos + contiguos, obtenemos una figura claramente emparentada con el tamiz de Sierpinski (Rose, 1981). De hecho, reduciendo la escala de esta figura se la puede hacer converger al tamiz de Sierpinski.

### *Paseo aleatorio autoevitante y geometría de los polímeros lineales*

Volvamos ahora a un problema concreto importante. El paseo aleatorio autoevitante (PAAE) avanza con independencia de las posiciones anteriores, excepto porque tiene prohibido pasar más de una vez por el mismo punto o entrar en un dominio del que no pueda luego salir. Todas las direcciones permitidas son equiprobables.

Sobre la recta, ese movimiento no plantea ningún problema: sigue inevitablemente uno de los dos sentidos sin volver nunca atrás.

En el plano y en el espacio, por el contrario, el problema es interesante y muy difícil. Tanto que hasta la fecha ningún estudio analítico ha conseguido resultados. Sin embargo, su importancia práctica en el estudio de las macromoléculas (polímeros) es tan grande que se ha convertido en objeto de una heurística esmerada y de detalladas simulaciones por ordenador. El resultado que más nos interesa, debido a C. Domb y descrito en Barker y Ninham (1970), es el siguiente:

Después de  $n > 1$  pasos, el desplazamiento cuadrático medio  $R^n$  es del orden de magnitud de  $n$  elevado a una potencia que denotaremos por  $1/D$ .

Este resultado sugiere intensamente que el número de vértices contenidos en un círculo o una esfera de radio  $R$  trazado alrededor de uno dado es aproximadamente  $R^D$ . Esta es una buena razón para comprobar si  $D$  es una dimensión fractal.

Su valor sobre una recta es (trivialmente)  $D=1$ . Un razonamiento teórico debido a Flory, junto con simulaciones por ordenador para  $E=2$  y  $E=3$ , coinciden en que  $D=(E+2)/3$  (de Gennes 1979, sección 1.3, cuyo  $1/\nu$  es nuestra  $D$ , es una buena fuente). La dimensión fractal  $D_B=2$  del movimiento browniano supera este valor para  $E=2$  y  $E=3$ , pero coincide con él para  $E=4$ .

Un argumento límite debido a Kesten establece que, cuando  $E \rightarrow \infty$ ,  $D \rightarrow 2$ . Sin embargo, argumentos físicos sutiles sugieren el valor  $D=2$  para  $E \geq 4$ . El sencillo razonamiento fractal que sigue sugiere también di-

cho valor. Para  $E \geq 4$ , la codimensión del movimiento browniano es  $\geq 2$  y, por tanto, la dimensión de sus puntos dobles es 0, lo que indica que el movimiento browniano no tiene puntos dobles. Lo que quiere decir que es autoevitante sin más.

Los valores de  $D$  resultan ser sensibles a los detalles de las hipótesis subyacentes. Si un polímero en el espacio tridimensional está formado por dos clases de átomos (de modo que el paseo no está confinado a una cuadrícula), Winwer encuentra que  $D = 2/1,29$ , que según el está muy por debajo del valor de Domb  $D = 1,67 \approx 2/1,2$ . En un polímero disuelto en un disolvente reactivo, el espacio continente es aún menos inerte, y en particular  $D$  empieza a depender de la interacción. El punto  $\Theta$  se define como aquél en que  $D$  toma el valor browniano  $D_B = 2$ . En los buenos disolventes  $D < 2$ , y decrece con la calidad del disolvente; en particular, un disolvente perfecto da  $D = 2/1,57$  si  $E = 2$  y  $D = 2/1,37$  si  $E = 3$ . En el espacio bidimensional, ni el peor disolvente puede ir más allá de  $D = 2$ , pero en el espacio tridimensional un mal disolvente da  $D > 2$ . Intervienen la coagulación y la separación de fases, y una cadena sin ramificaciones deja de ser un modelo satisfactorio.

Los párrafos anteriores no son más que una transcripción en terminología fractal de resultados ya conocidos, pero tengo la impresión de que esa transcripción sirve para clarificar el significado de los mismos. No obstante, hay que volver a plantear el hecho de que, al llamar dimensión a esta  $D$ , estamos suponiendo que las sucesivas réplicas reducidas del PAAE convergen débilmente hacia una cierta familia de fractales cuya dimensión es esta  $D$  observada empíricamente. Al físico no le cabe la menor duda de ello, pero un matemático exigente insiste en que, por ahora, esta afirmación no es más que una simple conjetura. En la sección siguiente esbozamos la dirección que podría tomar la demostración.

Nótese que no es de esperar que, al reducir el tamaño, el límite fractal sea autoevitante, pues los puntos en los que el PAAE «rebota» en su pasado lejano se convierten en puntos dobles. Su dimensión es, en efecto,  $(4 - E)/3 > 0$ . Sin embargo, no es de esperar que haya puntos triples, y su dimensión es, en efecto,  $\max(0, 2 - E) = 0$ .

Las sucesiones que convergen fuertemente a un límite fractal son incomparablemente más fáciles de estudiar que las réplicas reducidas de los PAAE, tanto analíticamente como por ordenador. Por tanto, es útil —por así decirlo— «sombrear» el PAAE con una sucesión adornada por aproximaciones convergentes en sentido fuerte. Esto se consigue con mis «garabatos» del capítulo 25. Un resultado sorprendente es que los garabatos menos artificiales y más isótropos tienen una dimensión extraordinariamente próxima al valor  $D = 4/3$ , característico del PAAE plano. Otra



«sombra» es el movimiento browniano autoevitante, definido en la lámina 343 como el contorno del casco de una trayectoria browniana acotada. Recordemos que también da  $D=4/3$ . Esta acumulación de valores difícilmente puede ser una coincidencia, y debe indicar algo profundo relativo a la estructura del plano.

Es interesante desviarse aquí para examinar si un paseo aleatorio autoevitante satisface el principio cosmológico (capítulo 22). Los pasos iniciales no lo satisfacen, pero parece ser que prevalece un régimen estacionario condicionalmente cosmográfico (aunque no sé de ninguna demostración de este resultado).

### *Argumentos de renormalización*

El estudio *analítico* de los cambios de escala en los sistemas de la física de redes (dentro de una tradición distinta de la mía) se basa en buena parte en el potente instrumento conocido (impropiamente) como «técnica del grupo de renormalización» (GR). Wilson (1979) es una referencia fácilmente asequible escrita por su inventor. Cuando una primera versión de esta obra y un artículo antiguo sobre el GR circulaban aún en forma de manuscrito, H. G. Callen me llamó la atención sobre el parentesco conceptual existente entre ambos.

Para investigar este parentesco, meditemos acerca de las siguientes citas de Wilson (1975, pág. 774): (a) «El rasgo crucial del límite al continuo estadístico es la ausencia de longitudes, energías o escalas de tiempo características». (b) «[El GR] es el instrumento que se emplea para estudiar el límite al continuo estadístico del mismo modo que la derivada es el instrumento fundamental para estudiar el límite al continuo ordinario... [La universalidad, una hipótesis adicional] tiene un análogo en el caso de la derivada ordinaria. Normalmente hay muchas aproximaciones distintas por diferencias finitas a una única derivada». (c) «Se está todavía muy lejos de la naturaleza sencilla, y sin embargo explícita, de la derivada». (d) «Una integral divergente es un síntoma típico de un problema que carece de escalas características». (e) «Una teoría de la renormalización [anterior]... elimina las divergencias de la electrodinámica cuántica... [Su] peor característica... es que no es más que una técnica matemática para sustraer las partes divergentes de las integrales». (f) «La idea física fundamental subyacente al método del GR es... que hay un efecto de cascada... [La primera] característica importante de la cascada es la invariancia por cambio de escala». (g) «[La segunda característica importante] es la amplificación o la reducción.»

Y ahora unos cuantos comentarios. La cita (a) afirma que el GR y los fractales se aplican al mismo tipo de problemas concretos, y la cita (d) que se encuentran en primera instancia con la misma dificultad. La cita (b) resulta mucho más aplicable a la teoría de fractales. En el contexto fractal, la queja formulada en la cita (c) no está justificada: existe ya un sustituto simple y explícito de la derivada, cuyo primer elemento es la dimensión fractal. La cita (d) rememora ideas ya familiares para el lector de este ensayo: empezamos en el capítulo 5 comentando que la integral que debería dar la longitud de una costa es divergente y más adelante nos las arreglamos para convivir con varianzas infinitas, valores esperados infinitos o probabilidades infinitas (como cuando tratábamos con la distribución  $Pr(U > u) = u^{-D}$  para  $0 < u < \infty$ , a pesar de que  $0^{-D} = \infty$ ). La cita (e) nos produce una sensación agradable: siempre conseguimos evitar las divergencias sin recurrir a técnicas puramente matemáticas. La cita (f) nos resulta también totalmente familiar.

En suma, no cabe la menor duda de que el GR y los fractales están inspirados en la misma idea, son la cara analítica y la cara geométrica de la misma moneda. Pero no hay un homólogo fractal de (g), por lo que el paralelismo no es completo.

□ Uno de los resultados del GR es un hamiltoniano de punto fijo  $H_0$ . Ser físico significa creer que el hamiltoniano  $H$  de un sistema físico contiene en principio toda la información relativa a la estructura del mismo. En tal caso, se debería poder emplear también los hamiltonianos para obtener las distribuciones de probabilidad conjunta de las distintas figuras aleatorias. La  $H$  finitamente renormalizada debería dar la distribución de las figuras a tamaño reducido, y el punto fijo  $H_0$  la distribución de los límites (y, en particular, debería dar su  $D$ ). El programa de investigación esbozado aquí quizá sea difícil de llevar a cabo, pero estoy plenamente convencido de que dará resultado. ■

### *Polígonos autoevitantes*

Supongamos que se elige un polígono al azar entre todos los polígonos autoevitantes de  $n$  lados, los cuales son enlaces de una red cuadrada plana ( $E = 2$ ). A veces tendrá forma cuadrada, con un área de aproximadamente  $(n/4)^2$ . Otras, ahusada y delgada, con un área aproximada de  $n/2$ . Si se toma la media, asignando el mismo peso a cada polígono, las simulaciones numéricas señalan que el área media es aproximadamente  $n^{2/D}$  con  $D \sim 4/3$  (Hiley y Sykes, 1961). Por lo que, desde el punto de vista fractal, un polígono se comporta como un paseo aleatorio autoevitante que se muerde la cola.

## *Volviendo a los modelos de costas*

El hecho de que su dimensión sea  $D \sim 4/3$  parece indicar que los polígonos autoevitantes son modelos de costas de una irregularidad superior a la media. Podemos alegrarnos por este descubrimiento, pero no por ello queda saldada la cuestión planteada en el capítulo 5, relativa a la forma de las costas.

En primer lugar, está el problema de las islas. El concepto de dimensión debería dar cuenta a la vez de la irregularidad de las costas, de su fragmentación y de la relación entre irregularidad y fragmentación. Pero los polígonos autoevitantes no tienen islas.

En segundo lugar, creo que un único valor de  $D$  no bastaría para todas las costas de la Tierra.

Y finalmente, aunque no por ello menos importante, cuando un gran paseo aleatorio o un polígono autoevitantes se reducen de tamaño, de modo que el lado de la red pase de 1 a un pequeño valor  $\eta$ , dos puntos que distaban 1 convergen hacia el mismo punto límite. El paseo, o polígono, límite de las reducciones de tamaño no es, pues, autoevitante: no se corta a sí mismo, pero presenta autocontactos. No desearía encontrar tales puntos en un modelo de costa. Implican, por ejemplo, la existencia de una interpretación estricta de la etimología de las *penínsulas* (cuasiislas que tocan al continente en un solo punto) y la existencia de cuasilagos.

## *La incapacidad de los ríos para fluir en línea recta*

En el capítulo 12 se menciona el resultado empírico de Hack, según el cual la longitud de un río varía normalmente como la potencia  $D/2$  de su área de drenaje. Si los ríos fluyeran en línea recta a través de áreas de drenaje redondas, la longitud de un río sería proporcional a la raíz cuadrada del área de drenaje, con lo que  $D = 1$ . De hecho,  $D$  está comprendido entre 1,2 y 1,3. En respuesta a ello, el capítulo 12 describe un modelo basado en una red fluvial que recubre el plano, en la que los ríos son curvas fractales.

En un intento estocástico de explicar el efecto Hack por métodos muy distintos, Leopold y Langbein (1962) presentan simulaciones por ordenador del desarrollo de patrones de drenaje en regiones con una litología uniforme. El modelo se basa en una forma original de paseo aleatorio bidimensional en una cuadrícula cuadrada, que debería interesar a los físicos. Se supone que tanto la situación de las fuentes como las direcciones de propagación se escogen al azar. El nacimiento del primer río es un cua-

drado tomado al azar, y el cauce se genera por medio de un PAAE entre cuadrados adyacentes, hasta que sale del contorno. A continuación se escoge al azar otro nacimiento y el segundo río, generado como antes, acaba saliendo del contorno o confluyendo con el primer río. A menudo el segundo río, el «Missouri», es más largo que la parte del Mississippi anterior a la confluencia. O podría ser que la confluencia ocurriera en el nacimiento del primer río. Se continúa igual hasta que se han llenado todos los cuadrados. Aparte de estas reglas generales, otras decisiones un tanto arbitrarias sirven para evitar la formación de lazos, nudos y otras inconsistencias.

La simulación por ordenador indica que, en este modelo de paseo aleatorio, la longitud del río aumenta según la potencia 0,64 del área de drenaje. Por tanto,  $D \sim 1,28$ . La discrepancia entre este valor y el  $D \sim 4/3$  de Domb podría ser una variación estadística debida a que las simulaciones no son lo bastante detalladas. Aunque yo me inclino a pensar que se trata de una discrepancia auténtica: la interferencia acumulada con otros ríos parece mucho más acentuada que la interferencia con las posiciones ocupadas en el pasado por un PAAE, y por tanto habría que esperar una  $D$  menor para el modelo de Leopold y Langbein.

En comparación con los mapas reales, los ríos del modelo de Leopold y Langbein son demasiado erráticos. Para evitar este defecto se han propuesto numerosas alternativas. El modelo de Howard (1971) postula un crecimiento hacia adelante, según varios esquemas perfectamente artificiales, a partir de desembocaduras situadas en el contorno de un cuadrado, dirigido hacia nacimientos localizados en su interior. Este procedimiento da lugar a unos ríos claramente más rectos que los del esquema de Leopold y Langbein, por lo que presumiblemente implican una  $D$  menor.

Por el momento, el estudio de redes aleatorias como las de Leopold y Langbein y las de Howard se limita a unas cuantas simulaciones por ordenador. Los matemáticos deberían avergonzarse, y quiero llamar su atención acerca de este interesantísimo problema. El hecho de que el PAAE se haya mostrado sumamente resistente al análisis debería servir para alejar a quienes buscan problemas fáciles que dan enseguida una gran cantidad de resultados, pero la variante de Leopold y Langbein podría ser más fácil.

Repito: las dificultades matemáticas con que topa el estudio del PAAE se deben a que los cambios locales pueden tener efectos globales. Análogamente, un cambio local en una red de Leopold y Langbein puede causar la irrupción de un río grande en la cuenca vecina. Uno se contentaría con poder medir macroscópicamente la intensidad de la interacción de largo alcance. Yo espero, naturalmente, que este parámetro sea una dimensión fractal.

## Variación de los precios y cambios de escala en economía

Desde que las páginas financieras de los periódicos vienen llenas de anuncios de supuestos «grafistas» que, mediante curvas de tendencias pasadas convenientemente arregladas, pretenden poder predecir el futuro a partir de su geometría, se puede decir, aunque sólo medio en broma, que la variación de los precios de las acciones y mercancías plantea un problema geométrico.

La contrarréplica fundamental, planteada por primera vez por Louis Bachelier en 1900, es que los gráficos no sirven para nada. El enunciado más fuerte es que las variaciones sucesivas de los precios son estadísticamente independientes. Un enunciado más débil es que cada precio sigue un proceso estocástico de «martingala», en el sentido de que el mercado es «perfecto»: todo su pasado ha sido completamente descartado. Un enunciado más débil aún es que las imperfecciones permanecen sólo mientras no superan los costes de transacción; tales mercados se denominan «eficientes». El concepto de eficiencia de Bachelier ha demostrado ser extraordinariamente preciso.

Otro enunciado de Bachelier más concreto es que, en primera aproximación, cualquier precio competitivo sigue un «movimiento browniano unidimensional»  $B(t)$ . Vale la pena señalar el hecho de que un proceso tan fundamental en la física haya sido inventado por un matemático heterodoxo (véase capítulo 40). Es triste decirlo, pero cuando se dispuso de datos reales  $B(t)$  resultó representarlos muy mal. En el presente capítulo se presenta una descripción alternativa, que construí basándome en una hipótesis escalante (una de las primeras que se hizo en *cualquier* campo), la cual ha demostrado ser sorprendentemente precisa.

### *La discontinuidad de los precios*

Mi argumento antibrowniano más simple se basa en una observación experimental tan directa y evidente que es sorprendente que sea tan fun-

damental. Pero los argumentos usados en capítulos anteriores para demostrar que  $D < 2$  para las galaxias y  $D > 2$  para la turbulencia son también sorprendentemente claros y directos. Esta sencilla observación consiste en que un fenómeno caracterizado por discontinuidades *muy* marcadas *no puede* explicarse mediante un proceso continuo. Sabemos que las funciones muestrales del movimiento browniano *son* continuas — casi con toda seguridad y casi por doquier. ■ Pero los precios en los mercados competitivos *no tienen por qué* serlo, y de hecho son notablemente *discontinuos*. La única razón para suponer la continuidad es que, a sabiendas o de forma inconsciente, muchas ciencias tienden a copiar los métodos que han resultado válidos y útiles en la física newtoniana. La continuidad sería una hipótesis razonable para diversas magnitudes y tasas «exógenas» que intervienen en la ciencia económica pero están definidas en términos físicos. Pero los precios son otra cosa: en mecánica no hay nada parecido, y ésta no sirve de guía al respecto.

El mecanismo típico de la formación de los precios implica tanto un conocimiento del presente como una previsión del futuro. Y aunque los determinantes físicos exógenos de un precio varíen de modo continuo, las previsiones cambian drásticamente en un abrir y cerrar de ojos. Cuando una señal física de energía y duración despreciables, «un plumazo», provoca un cambio brutal en las previsiones (y si ninguna institución inyecta inercia para complicar las cosas) un precio determinado de acuerdo con las previsiones puede dispararse, caer a cero o hacer cualquier cosa.

### *Falacias del comercio con filtros (Mandelbrot 1963b)*

La idea de que un precio pueda ser discontinuo apenas tiene, aparentemente, valor predictivo por sí misma. Pero resultó fundamental para la muerte y sepultura del método de comercio con «filtros» de Alexander (1961). En principio, un filtro del  $p\%$  es un instrumento que controla continuamente el precio, registra todos los máximos y mínimos locales, envía una señal de compra cuando el precio supera por primera vez un mínimo local *exactamente* un  $p\%$ , y envía una señal de venta cuando el precio desciende por primera vez por debajo de un máximo local *exactamente* el  $p\%$ . Como el control continuo no es práctico, Alexander controlaba la sucesión de alzas y bajas *diarias*. Daba por supuesto que el registro de un precio se puede manejar como una función continua. El algoritmo busca los días en que el alza *excede por primera vez* la baja de un día anterior más un  $p\%$ . Se asume que en algún momento del día  $d$  el

precio era *exactamente* igual a dicha baja más el  $p\%$ , y entonces el filtro había disparado una señal de compra. Y análogamente para las señales de compra. La conclusión empírica de Alexander es que las señales de compra y venta de un filtro dan mayor rendimiento que «comprar y retener».

En realidad, Mandelbrot (1963b, pág. 417) señala que las sesiones diarias de 24 horas en las que el filtro envía una señal de compra son muy probablemente días con una evolución al alza muy marcada. En muchos de estos días, en realidad, el precio sube por la noche o mientras el mercado está detenido por iniciativa de la Bolsa. Así, en los momentos en que el filtro de Alexander tuviese que emitir una señal de compra, ¡lo más probable es que estuviera desconectado! Emitirá una señal de compra en cuanto lo vuelvan a conectar, pero el precio de compra resultante será a menudo bastante más alto que el previsto por Alexander.

Otra posibilidad: muchos días la variación del precio se hace razonablemente continua por la acción deliberada de un especialista que realiza sus funciones de conectar compradores con vendedores y de «asegurar la continuidad del mercado» comprando o vendiendo valores de su propia cartera. Cuando el especialista no consigue asegurar la continuidad, tiene que presentar una explicación por escrito, y a menudo prefiere eliminar artificialmente la discontinuidad. Obviamente, las gangas se reservan para los amigos, mientras que el grueso de los clientes tiene que comprar a un precio más alto.

Tercera posibilidad: algunas variaciones diarias de precio están sujetas a límites, que pueden desplazarse tras varios días sin operación, impidiendo que se ejecuten las maniobras “stop limit”.

Estudios teóricos y experimentales (que enseguida describiremos) me convencieron de que los sesgos anteriores eran significativos y que la ventaja aparente del mercado con filtros sobre el comprar y retener era falsa. Después de contrastarla, Alexander (1964) encontró correcta mi predicción de que el método de filtros no era mejor que «comprar y retener». Fama y Blume (1966) realizaron un examen «post mortem» completo, sustituyendo los índices de precios de Alexander por series de precios individuales; el método de los filtros está ahora enterrado para bien. Este episodio subraya el riesgo de error inherente en lo que llamo «la falacia de la continuidad de los precios».

Las «martingalas» ganadoras se parecen a los móviles perpetuos. Un mérito de la hipótesis del mercado eficiente de Bachelier es que hubiera predicho que los filtros *no resultarían*, pero también es un demérito del modelo de movimiento browniano de Bachelier que no pudiera explicar por qué *parecía* que los filtros daban buen resultado. Por tanto, corres-

ponde a mis modelos concretos el mérito de permitir un análisis y el señalar los defectos de éste y otros caminos hacia la riqueza segura.

### «Parches» estadísticos

El fracaso del movimiento browniano como modelo de la variación de precios tuvo como respuesta la invención de una plétora de «parches» ad hoc. Ante las pruebas estadísticas que rechazan la hipótesis browniana de un comportamiento gaussianos de los precios, el economista puede intentar una modificación tras otra hasta despearlas.

Un parche corriente es la censura, hipócritamente etiquetada como «desestimación de los extremos estadísticos no representativos». Se distingue entre las variaciones de precio ordinarias, «pequeñas» y las grandes, que derrotan los filtros de Alexander. Las primeras son consideradas aleatorias y gaussianas, y se les dedican montañas de ingenio..., como si eso importara a alguien. Las otras se tratan aparte como «no estocásticas». Otro parche corriente es una mezcla de poblaciones aleatorias: si  $X$  no es gaussiana, a lo mejor es una mezcla de dos, tres, o más variables gaussianas. Un tercer parche es una transformación no lineal: cuando  $X$  es positiva y enormemente no gaussiana, a lo mejor  $\log X$  es gaussiana; si  $X$  es simétrica y no gaussiana, a lo mejor  $\arctg X$  pasa el test. Y otro procedimiento (que en mi opinión es un suicidio viniendo de un estadístico) sostiene que el precio sigue un movimiento browniano, pero los parámetros del movimiento varían sin control. Este último parche no es falsable, por lo que, según el filósofo Karl Popper, no puede tratarse de un modelo científico.

### *Un principio escalante en economía (Mandelbrot, 1963b)*

Mi propio trabajo se sitúa en el extremo opuesto de los parches. Se aplica a diversos datos de la ciencia económica, pero donde mejor se expresa es en el contexto de los precios.

PRINCIPIO ESCALANTE DE LA VARIACIÓN DE LOS PRECIOS. Cuando  $X(t)$  es un precio,  $\log X(t)$  tiene la propiedad de que su incremento a lo largo de un intervalo de tiempo arbitrario,  $\log X(t+d) - \log X(t)$ , tiene una distribución independiente de  $d$ , aparte de un factor de escala.

Antes de explorar las consecuencias de este principio, repasemos una lista de sus propiedades.

Un principio científico *debe* hacer predicciones que se puedan con-



trastar con la experiencia. *Este lo hace*, como veremos en un momento, y la concordancia es muy buena.

Es *bello* que los principios científicos puedan deducirse de otras consideraciones teóricas de su propio campo. El principio escalante de la variación de los precios se puede basar en la forma general (no necesariamente la estándar) del argumento probabilista del «límite central», pero éste todavía no se ha deducido de la economía estándar. Los únicos razonamientos «explicativos» (Mandelbrot, 1966b, 1971e) lo respaldan como consecuencia de la invariancia por cambio de escala en las variables físicas exógenas, pero estos argumentos están menos establecidos que el resultado que pretenden justificar.

Finalmente, aun cuando no se disponga de ninguna explicación real, es *agradable* que un principio científico no *choque* con supuestos anteriores. El presente principio escalante parece bastante inocente. La pregunta a la que responde nunca se había planteado antes, por lo que no podían haberse expresado opiniones contrarias. Todo lo que parece afirmar la invariancia por cambios de escala es que en un mercado competitivo ningún lapso de tiempo es más especial que otro. Afirma que los rasgos obviamente especiales del día y la semana (y del año en el caso de los productos agrícolas) se compensan. Como todos los «parches» habituales del movimiento browniano comportan escalas de tiempo privilegiadas, parece como si mi principio simplemente afirmase que no hay «razones suficientes» para suponer que una cierta escala temporal es más privilegiada que otra.

### *El síndrome de la varianza infinita*

No obstante, queremos que la realización práctica del principio escalante dé un resultado distinto del movimiento browniano. Para ello di un paso radical: suponer que  $\log X(t+d) - \log X(t)$  tiene varianza infinita. Antes de mis artículos, nadie dudaba en escribir «denotemos la varianza por  $V$ ». La hipótesis subyacente de que  $V$  era finita ni tan sólo se mencionaba... y es correcto, pues la literatura científica se colapsa cuando uno hace constar todas las hipótesis con independencia de su *fundada* importancia. Mis razones para pensar en una varianza infinita se exponen más abajo en esta misma sección. No hace falta decir que el éxito de suponer  $V = \infty$  me facilitó la consideración de curvas de longitud infinita y superficies de área infinita.

EL MAL COMPORTAMIENTO OBSERVADO EN LA VARIANZA DE LAS MUESTRAS DE LAS VARIACIONES DE PRECIOS. El nivel menos sofisticado de la

descripción estadística lo constituyen los «valores típicos» que se usan para resumir los datos. Pero, en el caso de las variaciones de precios, los resúmenes habituales resultan ser engañosos y nada fiables. En efecto, el motivo por el que se usa la media de una muestra para medir la situación, y la media cuadrática de una muestra para medir la dispersión, es que se cree que éstas son características «estables» que al final convergen hacia los valores de la población. Pero la figura de Mandelbrot (1967b) demuestra que su comportamiento en el caso de los precios resulta extraordinariamente escurridizo:

A) Los valores de la media cuadrática correspondientes a submuestras de tamaño diferente difieren a menudo en varios órdenes de magnitud.

B) Al aumentar el tamaño de la muestra, la media cuadrática no se estabiliza. Fluctúa con una tendencia global a aumentar.

C) La media cuadrática tiende a ser influida predominantemente por unos pocos cuadrados. Cuando éstos se eliminan, la estimación de la dispersión cambia a menudo de orden de magnitud.

LA HIPÓTESIS DE NO ESTACIONARIEDAD. Todas estas propiedades en conjunto, o incluso cualquiera de ellas por separado, sugieren a cualquiera que el proceso no es estacionario. Mi contrapropuesta preliminar es que el proceso es, de hecho, estacionario, pero que el desconocido segundo momento teórico es sumamente grande. En la hipótesis de un momento grande pero finito, los momentos muestrales convergen de acuerdo con la ley de los grandes números, pero la convergencia es sumamente lenta y el valor límite importa muy poco en la práctica.

EL PRINCIPIO DE LA VARIANCIA INFINITA. Mi siguiente contrapropuesta es que la media cuadrática poblacional es infinita. La elección entre «muy grande» e «infinita» ya resultará familiar a quien haya llegado hasta aquí en este ensayo, pero quienes hayan empezado por aquí quizá tengan otra disposición de ánimo, y así ocurría con mis lectores de 1962. A cualquiera que tenga una formación corriente en estadística, una variancia infinita le asustará en el mejor de los casos y le parecerá estafalaria en el peor. De hecho, «infinito» no difiere de «muy grande» en nada que se pueda detectar por medio de los momentos muestrales. También, por supuesto, el hecho de que una variable  $X$  tenga variancia infinita no niega de ninguna manera que  $X$  sea finita con probabilidad 1. Así, por ejemplo, la variable de Cauchy de densidad  $1/\pi(1+x^2)$  es casi con certeza finita, pero tiene variancia y esperanza infinitas. Así pues, la elección entre variables con variancia muy grande y variancia infinita no debería decidirse a priori, y tendría que depender sólo de qué es lo más conveniente. Yo acepto la variancia infinita porque hace posible conservar la invariancia por cambio de escala.

### *Modelo de Lévy estable (Mandelbrot, 1963b)*

Mandelbrot (1963b) combina el principio escalante con la idea aceptable de que los cambios de precio sucesivos son independientes con esperanza nula, y además permite que la varianza de los cambios de precios sea infinita. Un breve razonamiento matemático conduce a la conjetura de que la variación del precio sigue una distribución estable según Lévy, que también aparece en los capítulos 32, 33 y 39.

Esta conjetura resulta ser de una validez muy general. Los primeros tests (Mandelbrot 1963b, 1967b) se ajustaban a los precios de muchos artículos, algunos tipos de interés y algunos precios de obligaciones del siglo XIX. Posteriormente, Fama (1963) estudió los precios recientes de las obligaciones, y Roll (1970) el de otros tipos de interés. Aquí tendremos que contentarnos con una única ilustración, la lámina 475.

### *El poder predictivo del modelo*

El valor predictivo del principio escalante de la variación de precios reside en el siguiente descubrimiento. Se empieza con la distribución de variaciones *diarias* del precio sobre un periodo de cinco años de variabilidad regular. Se ve que, si esta distribución se extrapola a las variaciones *mensuales* del precio, su gráfica pasa por los datos de varias recesiones, depresiones, etc. Da cuenta de todos los eventos, por extremos que sean, de casi un siglo de la historia de una mercancía esencial y de lo más volátil.

En particular (lámina 475) el proceso que rige los cambios en el precio del algodón ha permanecido aproximadamente estacionario a lo largo del larguísimo periodo estudiado. Este sorprendente descubrimiento se expone mejor en dos etapas.

PRIMER TEST DE ESTACIONARIEDAD. La lámina 475 indica que, tanto la forma analítica del proceso de las variaciones del precio como el valor de  $D$ , permanecen constantes. No discutimos aquí los cambios principales en el valor del dinero, etc., sino que las tendencias globales son despreciables frente a las fluctuaciones que estamos considerando.

SEGUNDO TEST DE ESTACIONARIEDAD: CORRECCIÓN DE UN ERROR DE LA LÁMINA 475. El segundo test de estacionariedad se descubrió por pura casualidad. Las curvas ( $a^+$ ) y ( $b^+$ ) de la lámina —lo mismo que ( $a^-$ ) y ( $b^-$ )— difieren en una traslación horizontal. Como la traslación en coordenadas bilogarítmicas corresponde a un cambio de escala en las coordenadas naturales, esta discrepancia llevó a Mandelbrot (1963b) a compartir la opinión de los economistas de que la distribución de la variación de precios

había cambiado entre 1900 y 1950. Pensé que la forma de la distribución había permanecido idéntica, pero la escala había disminuido.

Sin embargo, esta concesión ha resultado ser superflua. Los datos en que se basan las curvas ( $a^+$ ) y ( $a^-$ ) no habían sido interpretados correctamente (Mandelbrot 1972b). Corregido el error, se tienen curvas casi idénticas a las ( $b^+$ ) y ( $b^-$ ).

No se puede negar que, a primera vista, los datos dan la impresión de ser sumamente no estacionarios, pero esto se debe a que las primeras impresiones están influidas por la creencia de que el proceso subyacente es gaussiano. Mi alternativa al proceso no estacionario y gaussiano es un proceso estable, estacionario, pero no gaussiano.

### *Conclusión*

No sé de ninguna otra predicción en economía con un éxito comparable.

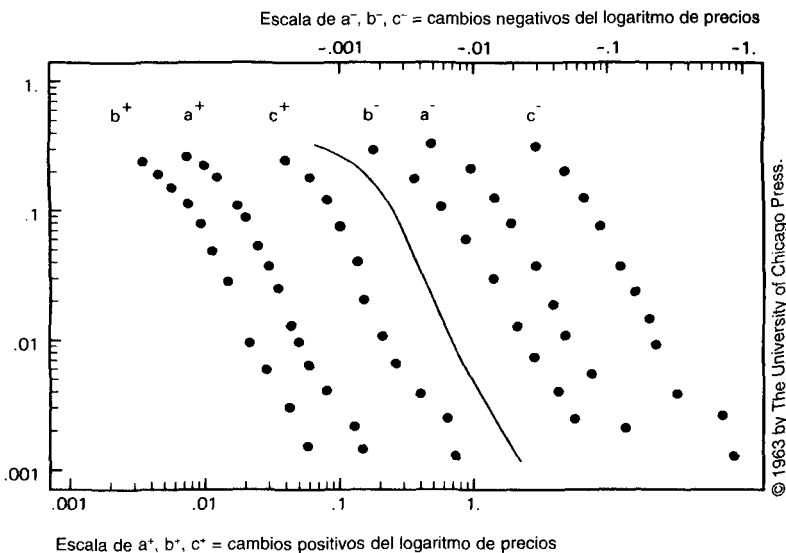


FIG. 475. *Indicios originales de la invariancia por cambio de escala en economía*

Tengo un cierto cariño a esta antigua lámina, reproducida de Mandelbrot (1963b) —como luego se lo tuve también a la lámina 383—. Combina gráficos bilogarámticos de colas positivas y negativas correspondientes a cambios registrados en el precio del algodón, junto con la función de densidad acumulada de la distribución estable simétrica de exponente  $D = 1,7$ , que en realidad es un valor de  $D$  ligeramente sobreestimado. La ordenada da la frecuencia relativa de los casos en que el cambio de una de las magnitudes  $X$  definidas más adelante excede al cambio en la abscisa.

Si se copia la lámina en una transparencia y se la desplaza horizontalmente, se verá cómo la curva teórica se superpone a cualquier otra de las gráficas empíricas con ligeras diferencias respecto a la forma general. ¡Esto es precisamente lo que postula mi criterio escalante!

Las discrepancias se deben generalmente a una ligera asimetría en la distribución. Esta es una observación importante que hace necesarias variantes sesgadas de la distribución estable.

Se han representado los siguientes conjuntos de datos, tratando por separado los valores positivos y negativos de  $X$ .

(a)  $X = \log_e Z(t + 1 \text{ día}) - \log_e Z(t)$ , siendo  $Z$  el precio de cierre diario en la lonja del algodón de Nueva York, 1900-1905 (datos suministrados por el Departamento de Agricultura de los EEUU).

(b)  $X = \log_e Z(t+1 \text{ día}) - \log_e Z(t)$ , donde  $Z(t)$  es un índice de los precios diarios de cierre del algodón en varias lonjas de los EEUU, 1944-1958 (comunicado por Hendrik S. Houthakker).

(c)  $X = \log_e Z(t+1 \text{ mes}) - \log_e Z(t)$ , siendo  $Z(t)$  el precio de cierre en el día 15 de cada mes en la lonja del algodón de Nueva York, 1880-1940 (comunicado por el Departamento de Agricultura de los EEUU).

Si alguna vez se llegan a escribir monografías o libros de texto sobre fractales, la discusión de las figuras geométricas aleatorias, que es delicada desde el punto de vista matemático, irá precedida por el tema, menos difícil, de las funciones aleatorias. El texto empezará tratando las variables aleatorias. En cambio, este ensayo entra de forma inmediata en el tema más complicado, pues es el más interesante y da rienda suelta a la intuición geométrica.

Las distribuciones de probabilidad hiperbólicas son parientes muy próximas de los fractales. En capítulos anteriores hemos encontrado muchos ejemplos de su aplicación, empezando por las funciones hiperbólicas  $Nr(U > u)$ . Pero aún queda mucho por decir. Este capítulo empieza con algunos comentarios generales y prosigue con ciertos fenómenos de la lingüística y la economía en los que los datos empíricos, abundantes y sólidos, se representan bien por medio de leyes hiperbólicas. El argumento es en ambos casos el mismo, destacando el carácter escalante y la dimensión de semejanza en unas formas totalmente «descarnadas».

El ejemplo lingüístico fue el objeto de mi primer artículo (capítulo 42). Me puso al corriente de ciertas manipulaciones simples que tienen una aplicabilidad general. Este ejemplo tiene también una faceta termodinámica, en la que interviene mi descubrimiento independiente de un análogo de temperatura negativa.

### *Más acerca de las distribuciones hiperbólicas*

Según una definición que ya conocemos, una variable aleatoria (v.a.) es hiperbólica cuando  $P(u) = Pr(U > u) = Fu^{-D}$ . Esta definición es un tanto extraña, por cuanto cualquier prefactor finito  $\sigma$  lleva a  $P(0) = \infty$ , cosa que parece absurda y deja claro que hay que andarse con mucho cuidado (como ya sabemos bien). Veámos en el capítulo 12, por ejemplo, que

cuando un generador de Koch contiene una isla la curva resultante contiene una infinidad de ellas, siendo  $Nr(A > a) = Fa^{-B}$  el número de islas de área mayor que  $a$ . Clasifiquémoslas de mayor a menor, ordenando arbitrariamente las islas de igual área. Escoger una isla al azar con probabilidad uniforme equivale a escoger al azar su lugar en esta ordenación. Si se lograra esto, podríamos sustituir  $Nr(A > a)$  por  $Pr(A > a)$ . Pero, de hecho, el lugar de una isla es un entero positivo, y *no* es posible escoger al azar un entero positivo.

Y otra historia conocida: la distribución hiperbólica nos lleva directamente a las distribuciones *condicionales*. Por ejemplo, la v. a. *condicional*  $\{U, \text{sabiendo que } U > u_0\}$ , que se escribe  $\{U|U > u_0\}$ , cumple

$$Pr\{U > u | U > u_0\} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } u < u_0 \\ (u/u_0)^{-D} & \text{cuando } u > u_0. \end{cases}$$

### *Paradojas de la esperanza*

Cuando  $D > 1$ , la esperanza correspondiente es

$$\langle U|U > u_0 \rangle = D(D-1)^{-1}u_0$$

Este resultado sugiere un sinfín de situaciones paradójicas. Recomendando encarecidamente a los lectores cuerdos que se salten esta sección.

EL EFECTO LINDY. El porvenir esperado de un cómico de televisión es proporcional a lo que se haya dejado ver en el pasado. *Fuente: The New Republic* del 13 de junio de 1964.

La siguiente historia nos puede dar la clave de la afirmación anterior.

PARÁBOLA DEL CEMENTERIO DE LOS POETAS JÓVENES. En la parte más melancólica del cementerio, entre las tumbas de los poetas e intelectuales muertos inesperadamente en la flor de la juventud, cada monumento está coronado por un símbolo de la pérdida: un libro, una columna o un instrumento a medio terminar. El anciano sepulturero, que en su juventud también fue intelectual y poeta, recomienda a los visitantes que tomen estos símbolos funerarios absolutamente al pie de la letra: «Todos los que aquí reposan», dice, «habían llegado lo bastante lejos como para ser considerados grandes promesas, y la grandeza de algunos de los monumentos refleja el talento de aquéllos cuyos restos cobijan. Pero ¿cómo podemos valorar sus malogradas promesas? Algunos de los que están a mi cargo podrían haber vivido para desafiar a Leonhard Euler o Victor Hugo



en cuanto a fecundidad, si no en cuanto a genio. Pero la mayoría de ellos, ay, estaban a punto de ser abandonados por las Musas. Dado que en la juventud las promesas y el talento son precisamente iguales, debemos considerarlos iguales en el momento de la muerte repentina.»

*La clave.* CUALQUIERA QUE MUERE JOVEN MUERE EN MITAD DE UNA CARRERA PROMETEDORA. «Demostración». De acuerdo con A. Lotka, la distribución del número de artículos científicos producidos por cualquier autor dado es hiperbólica con exponente  $D=2$ . Esta ley incorpora el hecho cualitativo de que la mayoría de personas escriben nada o muy poco, mientras que unos pocos escriben una barbaridad. Si es así, por larga que sea la obra total anterior de una persona, en promedio continuará hasta alcanzar un volumen igual en el futuro. Y cuando al final se detenga, lo hará precisamente en la mitad de lo que prometía.

*Comentarios.* La única manera de evitar esta aparente decepción es hacerse tan viejo que se deban considerar las correcciones de edad en el cálculo de las expectativas de futuro. El coeficiente de proporcionalidad del efecto Lindy es sin duda igual a 1.

PARÁBOLA DE LA PLAYA QUE RETROCEDE. Lejos, muy lejos, hay un país llamado Tierra de los Diez Mil Lagos, que se conocen por los apelativos cariñosos de Mayor, Segundo en tamaño, ..., N-ésimo en tamaño, etc., hasta 10.000-ésimo. Mayor es un mar inexplorado o, mejor dicho, un gran océano de por lo menos 1600 millas de ancho, la anchura de N-ésimo es  $1600N^{-0,8}$ , de manera que el menor tiene 1 milla de ancho. Pero cada lago está siempre cubierto de una neblina que no permite ver más allá de una milla para hacerse una idea de su anchura. La tierra no está señalizada y tampoco hay lugareños que puedan ayudar al viajero. Un viajero que se encuentre en una playa desconocida y crea en la esperanza matemática, sabe que tiene ante sí un brazo de agua de 5 millas de anchura esperada. Si navega un número  $m$  de millas, se encuentra con que todavía no ha llegado a su meta y vuelve a calcular la distancia esperada a la orilla opuesta, obteniendo el valor 5m. ¿Están esos lagos habitados por espíritus que *realmente se llevan la playa cada vez más lejos*?

*La clave.* La distribución anterior de las anchuras de los lagos no es más que una reformulación de la distribución de Korčak que nos encontramos en los capítulos 12 y 30.

### *Distribuciones de probabilidad escalantes*

Volvamos ahora a cuestiones más serias. Para poder hablar de variables aleatorias escalantes, hay que redefinir el término *escalante* sin recu-

rrir a la geometría. Ello se debe a que la única figura geométrica asociada a una variable aleatoria es un punto, que no se puede subdividir. En su lugar, diremos que una variable aleatoria  $X$  es escalante por la transformación  $T(X)$  si las distribuciones de  $X$  y  $T(X)$  son idénticas salvo cambios de escala.

Aquí *transformación* se entiende en un sentido amplio: por ejemplo, la suma de dos realizaciones independientes de  $X$  se considera una transformación de  $X$ . Las variables correspondientes se deberían llamar *escalantes por adición*, pero se denominan estables según Lévy (capítulos 31, 32 y 39). En el capítulo 39 se tratan las variables *escalantes por adición ponderada*.

ESCALANTES ASINTÓTICOS; V. A. ASINTÓTICAMENTE HIPERBÓLICAS. Afortunadamente, la definición anterior es menos indeterminada de lo que pudiera parecer. Para muchas transformaciones, resulta que la invariancia implica una *distribución asintóticamente hiperbólica*. Esto significa que debe existir un exponente  $D > 0$  tal que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Pr(U < u)u^D \text{ y } \lim_{u \rightarrow \infty} \Pr(U > u)u^D$$

están definidos, son finitos y uno de ellos es positivo.

DISTRIBUCIÓN DE PARETO. «Asintóticamente hiperbólica» se puede considerar sinónimo de *paretiana*, que es una expresión familiar para quienes trabajan en economía estadística. Vilfredo Pareto fue un economista italiano que pretendía traducir las leyes mecánicas del equilibrio al terreno de la economía, pero es probable que se le recuerde más por haber descubierto una regularidad estadística fundamental: encontró que en ciertas sociedades el número de individuos con unos ingresos personales  $U$  por encima de un valor grande  $u$  sigue aproximadamente una distribución hiperbólica, esto es, proporcional a  $u^{-D}$ . (Volveremos sobre la distribución de ingresos más adelante en este mismo capítulo.)

«Nuevos métodos de la economía estadística» (Mandelbrot, 1963e)

Posteriormente, en muchos campos de la economía se descubrieron otras leyes hiperbólicas semejantes a la de Pareto, y se han dedicado muchos esfuerzos a explicar esta frecuencia. Describamos de entrada un enfoque herético de este problema.

Un campo como la economía no puede olvidar nunca que sus «datos» son terriblemente confusos. Y por tanto su distribución es el resultado conjunto de una «distribución verdadera» subyacente fija y de un «filtro»

sumamente variable. Mandelbrot (1963e) observa que las distribuciones asintóticamente hiperbólicas con  $D < 2$  son muy «robustas» en este aspecto, en el sentido de que una gran variedad de filtros dejan invariante su comportamiento asintótico. Por otra parte, prácticamente todas las demás distribuciones son sumamente *poco robustas*. Por tanto, una distribución hiperbólica verdadera *puede* observarse de modo consistente: distintos conjuntos de datos sugieren la misma distribución con la misma  $D$ . En cambio, el mismo tratamiento aplicado a la mayoría de las demás distribuciones da resultados «caóticos» e incompatibles. En otras palabras, la alternativa práctica a las distribuciones asintóticamente hiperbólicas no es otra que el caos. Como los resultados caóticos no suelen publicarse ni reseñarse, no es raro que las distribuciones asintóticamente hiperbólicas estén muy difundidas, pero este hecho no nos dice gran cosa acerca de su predominio real en la naturaleza.

### *La ley de Zipf de las frecuencias de palabras*

Una palabra es sólo una sucesión de letras propias acabada en una letra impropia llamada espacio. Ordenamos las palabras de un texto por orden decreciente según su frecuencia en una muestra del habla de una persona, asignando un orden arbitrario a las palabras de la misma frecuencia. En esta clasificación,  $\rho$  designa el lugar ocupado por una palabra de probabilidad  $P$ , y llamaremos *distribución de frecuencias de palabras* a la relación entre  $\rho$  y  $P$ .

Uno podría esperar que esta relación variara sin ton ni son según el idioma y el orador, pero en realidad no es así. Una ley empírica divulgada en 1949 por Zipf (en el capítulo 40 se dan más detalles de G.K. Zipf) afirma que la relación entre  $\rho$  y  $P$  es «universal», esto es, independiente de otros parámetros, y tiene la forma  $P \propto 1/\rho$ .

En una segunda aproximación, que obtuve teóricamente en un intento infructuoso de derivar la ley anterior, todas las diferencias entre idiomas y oradores se reducen a

$$P = F(\rho + V)^{-1/D}.$$

Como  $\sum P = 1$ , los tres parámetros  $D$ ,  $F$  y  $V$  satisfacen la relación  $F^{-1} = \sum (\rho + v)^{-1/D}$ .

Los tres parámetros juntos miden la riqueza de vocabulario del orador.

El parámetro principal es  $D$ . Una manera razonable de medir la riqueza de vocabulario de un sujeto se podría basar en la frecuencia rela-

tiva del uso de palabras raras; por ejemplo, la frecuencia de la palabra del lugar  $\rho = 1000$  relativa a la de la palabra del lugar  $\rho = 10$ . Dicha frecuencia relativa aumenta con  $D$ .

¿Por qué la ley anterior presenta esa universalidad? Pues porque es casi perfectamente hiperbólica, y asumiendo todo lo aprendido a lo largo de este ensayo, es sumamente razonable tratar de relacionar la ley de Zipf con alguna propiedad escalante más profunda. (El procedimiento no parecía nada evidente en 1950, cuando abordé el tema por primera vez.) Como sugiere la propia notación, el exponente juega el papel usual de una dimensión. El prefactor  $F$  (recuérdese el capítulo 34) ocupa el segundo puesto en importancia.

### *Arboles lexicográficos*

En el caso que nos ocupa, existe también un «objeto» que puede ser escalante: se trata de un árbol lexicográfico. Primero lo definiremos y explicaremos qué se entiende en este contexto por escalante. Luego demostraremos que, cuando el árbol lexicográfico es escalante, las frecuencias de las palabras siguen la anterior ley biparamétrica. Discutiremos la validez de la explicación y luego justificaremos la interpretación de  $D$  como dimensión.

ARBOLES. Un árbol lexicográfico tiene  $N+1$  troncos, numerados de 0 a  $N$ . El primero corresponde a la «palabra» constituida por la letra impropia «espacio» sola, y los  $N$  restantes a cada una de las letras propias. El tronco «espacio» es estéril, pero cada uno de los troncos restantes tiene  $N+1$  vástagos correspondientes al espacio y a las  $N$  letras propias. En la siguiente generación, el tronco del espacio es estéril y los demás se ramifican en  $N+1$  como antes. De este modo, la punta estéril de cada espacio corresponde a una palabra formada por letras propias seguidas de un espacio. La construcción continúa indefinidamente. Cada punta estéril se inscribe con la probabilidad de la palabra correspondiente. Y la punta de una rama no estéril con la probabilidad total de las palabras que empiezan por la sucesión de letras que dicha rama determina.

ARBOLES ESCALANTES. Se dice que un árbol es *escalante* cuando cada rama por sí sola es en cierto modo una réplica a menor escala del árbol entero. Truncar ese árbol es, casi literalmente, cortar una rama. Nuestra primera conclusión, pues, es que un árbol escalante debe ramificarse sin límite. En particular, y en contra de lo que nos dictaría una intuición inexperta, el número total de palabras distintas no da una medida acertada de la riqueza del vocabulario. (Casi todo el mundo «conoce» muchí-

simas más palabras de las que usa; tantas, que su vocabulario es **prácticamente infinito.**) Otro argumento (que dejaremos de lado) determina la forma que debe observarse para la probabilidad  $P$  de una rama estéril en el  $k$ -ésimo nivel, esto es, que crece por encima de  $k$  niveles vivos.

OBTENCIÓN DE LA LEY DE ZIPF GENERALIZADA EN EL CASO MÁS SIMPLE. (Mandelbrot 1951, 1965z, 1968p.) El árbol escalante más simple corresponde a un discurso consistente en una sucesión de letras estadísticamente independientes, siendo  $r < 1/N$  la probabilidad de cada letra propia, y  $(1 - Nr)$  la de la letra impropia o «espacio». En este caso, el  $k$ -ésimo nivel tiene las propiedades siguientes

$$P = (1 - Nr)r^k = P_0 r^k$$

y  $\rho$  varía entre la cota

$$1 + N + N^2 + \dots + N^{k-1} (N^k - 1)/(N - 1)$$

(excluida) y la cota

$$(N^{k+1} - 1)/(N - 1)$$

(inclusive). Escribiendo

$$D = \log N / \log(1/r) < 1 \text{ y } V = 1/(N - 1),$$

e introduciendo

$$k = \log(P/P_0) / \log r$$

en cada cota, obtenemos

$$P^{-D} P_0^D - 1 < \rho / V \leq N(P^{-D} P_0^D) - 1$$

El resultado que buscamos se obtiene aproximando  $\rho$  por la media de ambas cotas.

GENERALIZACIÓN. Otros árboles escalantes menos simples corresponden a sucesiones de letras generadas por otros procesos aleatorios estacionarios, como por ejemplo cadenas markovianas, que luego se descomponen en palabras por las recurrencias del espacio. El razonamiento es más complejo (Mandelbrot, 1955b), pero el resultado final es el mismo.

VICEVERSA. ¿Se puede deducir de los datos de Zipf, por un razona-

miento inverso, que el árbol lexicográfico formado con letras ordinarias es escalante? No, por supuesto: muchas sucesiones cortas de letras nunca se dan y, en cambio, muchas sucesiones largas son bastante corrientes, con lo que los árboles lexicográficos reales distan mucho de ser estrictamente escalantes, aunque genéricamente se cree que el argumento anterior basta para entender por qué la ley de Zipf generalizada es válida. Habría que mencionar también que en un principio se esperaba que la ley de Zipf fuera una gran contribución a la lingüística, pero mi explicación demuestra que, por lo que respecta a dicha disciplina, dicha ley es muy superficial.

□ La ley de Zipf generalizada también es válida para ciertos vocabularios restringidos. Por ejemplo, la esotérica disciplina intitulada *hagioantropomimia*, que investiga el empleo de nombres de santos como nombres de personas (Maître 1964), establece que la ley de Zipf vale para dichos nombres. Tesnière (1975) encuentra que también vale para los apellidos en general. ¿Sugiere esto que los árboles correspondientes son escalantes? ■

*D* ES UNA DIMENSIÓN FRACTAL. La nueva observación de que *D* es formalmente una dimensión de semejanza no es tan superficial como se podría temer. En efecto, colocando delante un cero y una coma, una *palabra*, tal como la hemos definido no es más que un número comprendido entre 0 y 1, expresado en la base de numeración ( $N + 1$ ), que no contiene ningún cero excepto al final. Sitúense dichos números en el intervalo  $[0, 1]$  y añádanse al conjunto los puntos límite. La construcción equivale a eliminar todos los números que contengan la cifra 0 en un lugar distinto del final. Se obtiene así un polvo de Cantor cuya dimensión fractal es precisamente *D*.

En cuanto a los otros árboles lexicográficos, no tan simples, a los que hemos aludido para generalizar la demostración de la ley de Zipf, también corresponden a polvos de Cantor generalizados de dimensión *D*. La ecuación de *D* en Mandelbrot (1955b) es una generalización matricial de la definición  $Nr^D = 1$  para la dimensión de semejanza.

NUEVA GENERALIZACIÓN: EL CASO  $D > 1$ . Curiosamente, la condición  $D < 1$  no se satisface de manera universal. Los casos en los que la ley de Zipf generalizada se cumple con una *D* estimada mayor que 1, aunque raros, son incuestionables. A fin de describir el papel del valor especial  $D = 1$ , supongamos que la ley  $P = F(\rho + V)^{-1/D}$  sólo vale hasta  $\rho = \rho^* \leq \infty$ . Si  $D < 1$ , los diccionarios infinitos sugeridos por el razonamiento teórico no plantean ningún problema. Pero para  $D \geq 1$  la serie infinita  $\sum (\rho + V)^{-1/D}$  es divergente. Por tanto, para que  $\sum P = 1$  y  $F > 0$  es necesario que  $\rho^* < \infty$ : el diccionario sólo puede contener un número finito de palabras.

Resulta, en efecto, que  $D > 1$  sólo se da en aquellos casos en que el vocabulario está restringido a unos límites impuestos por medios artifi-

ciales y extraños (p. e., fragmentos latinos insertos en textos no latinos). En mis artículos sobre este tema se discuten estos casos especiales. Como una construcción que se limita a un número finito de puntos nunca da un fractal,  $D > 1$  no se puede interpretar como dimensión fractal.

### *La temperatura del discurso*

Las deducciones anteriores permiten una segunda interpretación muy distinta, diseñada según la termodinámica estadística. Los homólogos de la energía y la entropía físicas son un coste del cifrado y la información de Shanon. Y  $D$  es la «temperatura del discurso». Cuanto más «caliente» es el discurso, mayor es la probabilidad de uso de palabras raras.

El caso  $D < 1$  corresponde al caso estándar en que el equivalente formal de la energía no está acotado superiormente.

Por el contrario, el caso en que las palabras son tan «calientes» que llevan a  $D > 1$  implica la imposición sumamente inusual de una cota superior finita para la energía.

Poco tiempo después de que yo describiera esta clara dicotomía en términos de estadística del lenguaje, se descubrió de forma independiente un equivalente físico del mismo. La temperatura física inversa  $1/\theta$  es mínima —se anula— cuando el cuerpo está más caliente. Y Norman Ramsey se dio cuenta de que, si el cuerpo debe calentarse más aún,  $1/\theta$  tiene que hacerse negativa. Véase Mandelbrot (1970p) para una discusión de este paralelismo.

La termodinámica deduce las propiedades macroscópicas de los cuerpos a partir de la equiprobabilidad microcanónica. Como las moléculas no se conocen individualmente, las hipótesis sobre sus posibles estados despiertan poca emoción. Sin embargo, sí tenemos un conocimiento individual de las palabras, de manera que la hipótesis de equiprobabilidad en el estudio del lenguaje es difícil de tragar.

□ La analogía anterior resulta particularmente natural en ciertos enfoques más generales de la termodinámica. A riesgo de insistir demasiado en artículos periféricos a esta obra, un formalismo tal se puede encontrar en Mandelbrot (1962t, 1964t). ■

### *La ley de Pareto de los salarios*

Otro ejemplo de árbol escalante abstracto se encuentra en los organigramas de grupos jerárquicos humanos. En la jerarquía escalante más

simple, (a) sus miembros están distribuidos por niveles de manera que (excepto en el nivel inferior) cada miembro tiene el mismo número  $N$  de subordinados y (b) todos sus subordinados tienen el mismo «peso»  $U$ , el cual es igual a  $r < 1$  veces el peso del superior inmediato. Lo más práctico es tomar dicho peso como salario.

Cuando hay que comparar varias jerarquías desde la perspectiva de la desigualdad de ingresos, uno puede clasificar sus miembros por ingresos decrecientes (siendo arbitrario el orden dentro de cada nivel), designar cada individuo por su número de orden  $\rho$ , y evaluar la tasa de disminución de los ingresos en función del número de orden, o viceversa. Cuanto más rápidamente disminuyen los ingresos al aumentar el número de orden, mayor es la desigualdad.

El formalismo usado para la ley de Zipf vale aquí sin necesidad de introducir ningún cambio: el número de orden  $\rho$  de un individuo cuyos ingresos son  $U$  es aproximadamente

$$\rho = -V + U^{-D} F^D.$$

Este resultado se atribuye a Lydall (1959).

El grado de desigualdad viene dado en general por

$$D = \log N / \log(1/r),$$

que no parece tener ninguna interpretación fractal digna de reseñarse. Cuanto mayor es  $D$ , mayor es el valor de  $r$  y menor el grado de desigualdad.

Es posible generalizar el modelo (como en el caso de las frecuencias de las palabras) suponiendo que en un nivel  $k$  dado, el valor de  $U$  varía de un individuo a otro, de modo que  $U$  sea igual al producto de  $r^k$  por un factor aleatorio, el mismo para todos. Esta generalización modifica los parámetros  $V$  y  $P_0$ , y por tanto la  $D$ , pero deja invariable la relación fundamental.

Nótese que la  $D$  empírica es normalmente próxima a 2. En los casos en que es exactamente 2, si se representa el inverso de los ingresos en un eje vertical hacia abajo, se obtiene una pirámide exacta (base igual al cuadrado de la altura). En este caso los ingresos de un superior son la media geométrica de los ingresos totales del conjunto de sus subordinados y de los de cada uno de ellos por separado.

CRÍTICA. Cuando  $D=2$ , el menor  $1/r$  se da para  $N=2$  y es igual a  $1/r = \sqrt{2}$ . Este valor parece fantásticamente alto, y sugiere que el modelo de Lydall sólo puede ser válido en jerarquías con  $D > 2$ . Si es así, el hecho



de que la  $D$  global de una población sea aproximadamente 2 podría significar que las diferencias de ingresos *dentro* de cada jerarquía son insignificantes en comparación con las diferencias *entre* jerarquías y dentro de grupos que no implican ningún árbol jerárquico.

### *Otras distribuciones de ingresos*

Un estudio más extenso de la distribución de ingresos en Mandelbrot (1960i, 1961e, 1962q) inspiró el trabajo descrito en el capítulo 37.

Las fórmulas, así como las definiciones y referencias matemáticas complicadas, que se han evitado en otras partes del ensayo, se han reunido en este capítulo, junto con varios apéndices matemáticos.

*Lista de apartados*

- Afinidad (auto) y autosemejanza
- Conjuntos fractales brownianos
- Dimensión y recubrimiento de bolas de un conjunto (o su complementario)
  - Dimensión (de Fourier) y heurística
  - Fractales (Sobre la definición de los)
  - Medida de Hausdorff y dimensión de Hausdorff-Besicovitch
  - Funciones indicador y coindicador
  - Variables y funciones aleatorias Lévy-estables
  - Heurística de Lipschitz-Holder
  - Música: dos propiedades escalantes
  - Fractales no lagunares
  - Potenciales y capacidades. Dimensión de Frostman
  - Cambio de escala y truncación
  - La dimensión de semejanza: sus peligros
  - Estacionariedad (grados de)
  - Análisis estadístico usando R/S
  - Funciones de Weierstrass y parientes próximos. Catástrofes infrarroja y ultravioleta

## AUTOAFINIDAD Y AUTOSEMEJANZA

En el texto se aplican las expresiones *autosemejante* y *autoafín* (otro neologismo) a conjuntos, independientemente de que sean o no acotados (sin que ello conlleve, espero, ninguna ambigüedad). En muchas discusiones acerca de la turbulencia, y en artículos míos anteriores, también se emplea el término *autosemejante* en un sentido «genérico» que incluye el de autoafín, pero en este ensayo el sentido genérico es el de *invariancia por cambio de escala*.

### 1. Autosemejanza

En el espacio euclídeo  $R^E$ , una razón real  $r > 0$  permite definir una transformación de *homotecia*, que transforma el punto  $x = (x_1, \dots, x_\delta, \dots, x_E)$  en el punto  $r(x) = (rx_1, \dots, rx_\delta, \dots, rx_E)$ , y transforma por tanto el conjunto  $S$  en el conjunto  $r(S)$ . Véase Hutchinson (1981).

CONJUNTOS ACOTADOS. Un conjunto acotado  $S$  es *autosemejante*, con respecto a la razón  $r$  y a un entero  $N$ , si es la reunión de  $N$  subconjuntos disjuntos, congruentes cada uno de ellos con  $r(S)$ . Congruente significa idéntico excepto traslación y/o rotación.

Un conjunto acotado  $S$  se dice *autosemejante*, con respecto a las razones  $r^{(1)}, \dots, r^{(N)}$ , cuando es la reunión de  $N$  subconjuntos disjuntos congruentes, respectivamente, con  $r^{(n)}(S)$ .

Un conjunto aleatorio acotado  $S$  se dice *estadísticamente autosemejante*, con respecto a la razón  $r$  y a un entero  $N$ , si es la reunión de  $N$  partes disjuntas, de la forma  $r(S_n)$ , donde cada uno de los  $N$  conjuntos  $S_n$  es congruente en distribución con  $S$ .

CONJUNTOS NO ACOTADOS. Un conjunto no acotado  $S$  se dice *autosemejante* con respecto a la razón  $r$ , cuando el conjunto  $r(S)$  es congruente con  $S$ .

### 2. Autoafinidad

En el espacio euclídeo de dimensión  $E$ , una colección de razones reales positivas  $r = (r_1, \dots, r_\delta, \dots, r_E)$  define una *afinidad*, que transforma cada punto  $x = (x_1, \dots, x_\delta, \dots, x_E)$  en el punto

$$r(x) = r(x_1, \dots, x_\delta, \dots, x_E) = (r_1 x_1, \dots, r_\delta x_\delta, \dots, r_E x_E),$$

y transforma por tanto el conjunto  $S$  en el conjunto  $r(S)$ .

CONJUNTOS ACOTADOS. Se dice que un conjunto acotado  $S$  es *autoafín*, con respecto a la razón vectorial  $r$  y a un entero  $N$ , si  $S$  es reunión de  $N$  partes disjuntas congruentes cada una de ellas con  $r(S)$ .

CONJUNTOS NO ACOTADOS. Un conjunto no acotado  $S$  es *autoafín*, con respecto a la razón vectorial  $r$ , cuando el conjunto  $r(S)$  es congruente con  $S$ .

La definición anterior se aplica a menudo bajo las condiciones siguientes: (a)  $S$  es el grafo de una función  $X(t)$  de un tiempo escalar  $t$  en un espacio vectorial euclídeo  $E-1$  dimensional; (b)  $r_1 = \dots r_\delta \dots = r_{E-1} = r$ ; (c)  $r_E \neq r$ . En este caso, se tiene la definición directa siguiente: una función vectorial de variable real  $X(t)$  es *autoafín*, con respecto al exponente  $\alpha$  y al tiempo focal  $t_0$ , si existe un exponente  $\log r_E / \log r = \alpha > 0$  tal que para todo  $h > 0$  la función  $h^{-\alpha} X[h(t-t_0)]$  es independiente de  $h$ .

SEMIESTABILIDAD DE LAMPERTI. Lamperti (1962, 1972) llama *semiestables* a los conjuntos aleatorios autoafines no acotados.

ALOMETRÍA. En el capítulo 17 se observa que, cuando la altura de un árbol botánico cambia en un factor  $r$ , el diámetro del tronco lo hace en un factor  $r^{3/2}$ . De hecho, los puntos cuyas coordenadas vienen dadas por medidas lineales de los árboles están relacionados por una afinidad. Los biólogos denominan *alométricas* a dichas figuras.

## CONJUNTOS FRACTALES BROWNIANOS

Debido a la proliferación de distintas clases de conjuntos brownianos, la terminología es necesariamente rebuscada, y a veces hasta plúmbea.

### 1. Función browniana real de variable real

Se denota con esta expresión el *movimiento browniano ordinario clásico*, también conocido como *función de Wiener*, *función de Bachelier*, o *función de Bachelier-Wiener-lévy*. La pesada definición siguiente permite una clasificación fácil de las distintas generalizaciones.

PREMISAS. (a) La variable temporal  $t$  es un número real. (b) La variable espacial es un número real. (c) El parámetro  $H$  es  $H = 1/2$ . (d) La probabilidad  $Pr(X < x)$  viene dada por la función error  $erf(x)$ , que es la distribución de la variable aleatoria gaussiana reducida con  $\langle X \rangle = 0$  y  $\langle X^2 \rangle = 1$ .

DEFINICIÓN. La función browniana real de variable real  $B(t)$  es una función aleatoria tal que para todo  $t$  y todo  $\Delta t$ ,

$$Pr([B(t + \Delta t) - B(t)] / |\Delta t|^H < x) = erf(x).$$

REPRESENTACIÓN POR UN RUIDO GAUSSIANO BLANCO. La función  $B(t)$  es continua pero no diferenciable, en el sentido de que  $B'(t)$  no existe como función ordinaria, sino como función generalizada (distribución de Schwartz). Esta  $B'(t)$  se conoce como *ruido gaussiano blanco*. Se puede expresar  $B(t)$  como integral de  $B'(t)$ .

AUTOAFINIDAD. El concepto de distribución de probabilidad de una variable aleatoria se puede generalizar a funciones aleatorias. Tomando  $B(0)=0$ , la función cambiada de escala  $t^{-1/2}B(ht)$  tiene una distribución de probabilidad independiente de  $h$ . Esta propiedad escalante es un ejemplo de *autoafinidad*.

ESPECTRO. En términos de análisis espectral o armónico, la densidad espectral de  $B(t)$  es proporcional a  $f^{-1-2H}$ , esto es, a  $f^{-2}$ . Sin embargo, el significado de la densidad espectral  $f^{-2}$  requiere un razonamiento especial, pues la función  $B(t)$  no es estacionaria, mientras que la teoría usual de Wiener-Khinchin de la covarianza y el espectro se refiere a funciones estacionarias. Esta discusión se pospone por tanto al apartado «Weierstrass».

NO DIFERENCIABILIDAD. La función  $B(t)$  es continua y no diferenciable. Este tema también se analizará mejor en el apartado «Weierstrass».

REFERENCIAS. Los trabajos de Lévy (1937-1954 y 1948-1965) tienen una fama bien ganada por su críptica elegancia y su estilo personalísimo (véase el capítulo 40). Sin embargo, su profundidad intuitiva y su simplicidad son incomparables.

Las referencias sistemáticas recientes, a la medida de las necesidades de grupos muy diversos de matemáticos, científicos e ingenieros, son demasiado numerosas para dar aquí una lista de ellas, pero la de Knight (1981) parece prometedora. (Desgraciadamente, decide *no* incluir «resultados relativos a la dimensión o a la medida de Hausdorff de las trayectorias muestrales, por elegantes que sean, pues no parecen tener aplicaciones conocidas [!] y no parecen... realmente necesarios para una comprensión general del material directamente aplicable; por otra parte... temas tales como la no diferenciable por doquier de las trayectorias muestrales... parecen indicar algo concreto acerca de la extrema irregularidad de las mismas».)

## 2. Funciones brownianas generalizadas

Cada hipótesis de la sección anterior es susceptible de generalización, y cada proceso obtenido al generalizar una o más de dichas suposiciones es significativamente distinto de la  $B(t)$  de partida, y tiene también aplicaciones importantes.

(a) El tiempo real (escalar)  $t$  puede ser sustituido por un punto de un espacio euclídeo  $R_E$ , con  $E > 1$ , de una circunferencia, o de una esfera.

(b) La  $X$  real (escalar) puede sustituirse por un punto  $P$  de un espacio euclídeo  $R_E$ , con  $E > 1$ , por un punto de una circunferencia, o de una esfera.

(c) El parámetro  $H$  puede tomar valores distintos de  $1/2$ . Con la distribución gaussiana *erf*,  $H$  puede tomar cualquier valor del intervalo  $0 < H < 1$ .

(d) Se puede cambiar la distribución gaussiana *erf* por otra distribución no gaussiana de las que se discuten en el apartado «Estable según Lévy».

$B(t)$  se puede generalizar también por medio de su representación por un ruido. Este procedimiento da resultados sustancialmente distintos.

### 3. Eliminación de la tendencia

La variación de la función browniana real de variable real  $B(t)$  entre  $t = 0$  y  $t = 2\pi$  se descompone en: (a) la tendencia, definida por  $B^*(t) = B(0) + (t/2\pi) [B(2\pi) - B(0)]$ , y (b) un resto oscilante  $B_B(t)$ . En el caso de la  $B(t)$  browniana, ambos términos resultan ser estadísticamente independientes.

LA TENDENCIA. La gráfica de la tendencia  $B^*(t)$  es una recta con una pendiente aleatoria gaussiana.

EL PUENTE BROWNIANO. El término oscilante «sin tendencia»  $B_B(t)$  es idéntico en distribución a un *punte browniano*, que se define como una función browniana real de variable real con la ligadura  $B(2\pi) = B(0)$ .

EL ABUSO EN LA ELIMINACIÓN DE LA TENDENCIA. Al enfrentarse con muestras de origen desconocido, muchos especialistas en estadística aplicada, que trabajan en economía, meteorología y otros campos parecidos, se precipitan descomponiéndolas en una tendencia y una oscilación (más otros términos periódicos añadidos). Suponen implícitamente que los sumandos son atribuibles a mecanismos distintos y que son estadísticamente independientes.

Esta última suposición implícita es totalmente injustificada, excepto si la muestra es generada por  $B(t)$ .

### 4. Funciones brownianas reales sobre una circunferencia

PUENTE BROWNIANO CERRADO. Tómese la función periódica de  $t$  que sobre el intervalo de tiempo  $0 < t \leq 2\pi$  coincide con un puente browniano

$B_B(t)$ , y elíjase un  $\Delta t$  al azar (uniformemente) en  $[0, 2\pi]$ . La función  $B_B(t + \Delta t)$  es estadísticamente estacionaria (véase el apartado «Estacionariedad...»), y se puede representar por una *serie aleatoria de Fourier-Brown-Wiener*. Los coeficientes son variables aleatorias gaussianas independientes, con fases totalmente aleatorias y módulos proporcionales a  $n^{-1}$ . En otras palabras, el espectro discreto es proporcional a  $n^{-2}$ , esto es, a  $f^{-2}$ , y la energía espectral acumulada para frecuencias superiores a  $f$  es  $\sim f^{-1}$ .

CONSECUENCIA PRÁCTICA. La simulación de  $B(t)$  se debe llevar a cabo necesariamente sobre un intervalo de tiempo finito. Si se toma dicho intervalo como  $[0, 2\pi]$ , la simulación puede basarse en métodos de Fourier discretos y finitos. Se calcula el puente browniano mediante una transformada rápida de Fourier y se le añade la tendencia aleatoria necesaria.

REFERENCIAS. El artículo de Paley y Wiener (1934) tiene fama merecida por su álgebra implacable. Sin embargo, la profundidad de sus párrafos explicativos, en los capítulos IX y X, aún son dignos de leerse. Recomendando Kahane (1968) aunque sólo a los matemáticos, pues nunca enuncia los resultados en su sencillo contexto originario.

PUNTE BROWNIANO CERRADO IMPAR. Las funciones  $B_0(t) = 1/2[B_B(t) - B_B(t + \pi)]$  y  $B_E(t) = 1/2[B_B(t) + B_B(t + \pi)]$  son, respectivamente, las sumas de las componentes armónicas pares e impares de la función puente  $B_B(t)$ . La componente impar tiene la propiedad de poderse obtener directamente en función de un ruido gaussiano blanco  $B'(t)$  sobre la circunferencia:

$$B_0(t) = \int_{-\pi}^0 B'(t-s) ds - \int_0^{\pi} B'(t-s) ds.$$

FUNCIÓN BROWNIANA DE VARIABLE REAL EN LA CIRCUNFERENCIA. Partiendo de  $B(t)$ , elimínese la parte entera y multiplíquese el resto por  $2\pi$ . El resultado nos da la posición de un punto sobre la circunferencia unidad. La razón principal por la que se menciona esta *función browniana de variable real en la circunferencia* es evitar confundirla con alguna de las otras funciones anteriores, que son algo muy distinto.

### 5. Funciones brownianas fraccionarias reales de variable real

Para definir esta función, que denotamos por  $B_H(t)$ , se parte de la función browniana ordinaria, real y de variable real, y se cambia el exponente  $H = 1/2$  por cualquier otro valor real comprendido entre 0 y 1. Los casos con  $H \neq 1/2$  son los *propriadamente fraccionarios*.

Todas las  $B_H(t)$  son continuas y no diferenciables. La primera referencia a dichas funciones que he podido encontrar está en Kolmogorov (1940). En Mandelbrot y Van Ness (1968) se citan otras referencias dispersas, así como diversas propiedades. Véase también Lawrance y Kottegodá (1977).

**CORRELACIÓN Y ESPECTRO.** Como se prueba fácilmente,  $[B_H(t + \Delta t) - B_H(t)]^2 = |\Delta t|^{2H}$ . La densidad espectral de  $B_H(t)$  es proporcional a  $f^{-2H-1}$ . El exponente no es entero, y ésta es una de las razones por las que propuse el calificativo de *fraccionaria* para  $B_H(t)$ .

**RUIDO GAUSSIANO FRACCIONARIO DISCRETO.** Se define como la sucesión de incrementos de  $B_H(t)$  correspondientes a incrementos unitarios sucesivos del tiempo. Su correlación es

$$2^{-1}[|d+1|^{2H} - 2|d|^{2H} + |d-1|^{2H}]$$

**CORRELACIONES A LARGO PLAZO. PERSISTENCIA Y ANTIPERSISTENCIA.** Tómesese  $B_H(0) = 0$  y defínanse los incrementos pasado y futuro como  $-B_H(-t)$  y  $B_H(t)$ , respectivamente. Se tiene que:

$$\begin{aligned} & \langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle \\ &= 2^{-1} \{ [B_H(t) - B_H(-t)]^2 - 2[B_H(t)]^2 \} \\ &= 2^{-1}(2t)^{2H} - t^{2H} \end{aligned}$$

Dividiendo por  $(B_H(t))^2 = t^{2H}$ , se obtiene la correlación, que resulta ser independiente de  $t$  e igual a  $2^{2H-1} - 1$ . En el caso clásico,  $H = 1/2$ , la correlación es nula, como era de esperar. Para  $H > 1/2$ , la correlación es positiva, lo que indica que hay *persistencia*, y llega a valer 1 cuando  $H = 1$ . Si  $H < 1/2$ , la correlación es negativa, lo que indica *antipersistencia*, y alcanza el valor  $-1/2$  para  $H = 0$ .

El hecho de que esta correlación tenga que ser independiente de  $t$ , incluso en los casos en que no se anula, es una consecuencia obvia de la autoafinidad de  $B_H(t)$ .

Sin embargo, la mayoría de especialistas en procesos estocásticos empiezan sorprendiéndose y/o inquietándose ante el hecho de que la correlación entre el pasado y el futuro pueda ser independiente de  $t$ , y no anularse.

**CONSECUENCIA PRÁCTICA QUE AFECTA A LA SIMULACIÓN.** Para generar una función aleatoria para todos los valores de  $t$  enteros comprendidos entre  $t = 0$  y  $t = T$ , se acostumbra a elegir un algoritmo de antemano, sin



tener en cuenta para nada  $T$ , y ejecutarlo durante un tiempo  $T$ . Los algoritmos necesarios para generar las funciones brownianas fraccionarias, por contra, dependen necesariamente de  $T$ .

En Mandelbrot (1971f) se describe un generador rápido de los incrementos discretos de  $B_H(t)$ . (Este artículo tiene un error de imprenta potencialmente muy perturbador: en la primera fracción de la pág. 545 hay que restar 1 al numerador y añadirlo a la fracción resultante.)

DIMENSIONES FRACTALES. Para la gráfica se tiene  $D = 2 - H$ . Para el conjunto de ceros se tiene  $D = 1 - H$ . Véase Adler (1981).

## 6. Función browniana fraccionaria real sobre la circunferencia o el toro

Las funciones brownianas fraccionarias reales sobre la circunferencia son menos intrínsecas que las funciones del subapartado 4. La más simple es la suma de una serie de *Fourier-Brown-Wiener fraccionaria*, definida como aquella que tiene coeficientes independientes y gaussianos, fases totalmente aleatorias, y módulos de los coeficientes proporcionales a  $n^{-H-1/2}$ . Una función browniana fraccionaria real sobre un toro es la suma de una doble serie de Fourier con las mismas propiedades.

ADVERTENCIA. Una analogía superficial podría sugerir que la función browniana fraccionaria real sobre la circunferencia podría ser obtenida por el mismo procedimiento que se aplica en el caso no fraccionario: calculando la tendencia  $B^*_H(t)$  de una función browniana fraccionaria real de variable real, eliminándola de  $B_H(t)$  y formando una función periódica por repetición.

Desafortunadamente, la función periódica que se obtiene por este procedimiento y la suma de la serie de Fourier con coeficientes  $n^{-H-1/2}$  son funciones aleatorias *distintas*. En particular, la serie de Fourier *es estacionaria*, mientras que la repetición de  $B_H(t)$  después de eliminar la tendencia no lo es. Por ejemplo, si se toma un pequeño intervalo a ambos lados de  $t=0$ , el puente repetido que resulta de eliminar la tendencia un dos trozos no consecutivos de  $B_H(t)$ . La concreción que implica la definición del puente basta para que el resultado sea continuo, pero no para que sea estacionario. *No* es idéntico en distribución, por ejemplo, a un pedacito pequeño formado por dos trozos consecutivos a ambos lados de  $t=\pi$ .

OBSERVACIONES ACERCA DE LA SIMULACIÓN. El cálculo de una función browniana fraccionaria real de variable real por métodos de Fourier discretos y finitos es teóricamente imposible, y aunque en la práctica factible, es muy truculento. El procedimiento más directo consiste en (a) cal-

cular la función real sobre la circunferencia apropiada, (b) desecharla excepto una porción limitada que corresponde a un pequeño subintervalo del periodo  $2\pi$ , pongamos  $0 < t < t^*$ , y (c) añadirle una componente de muy baja frecuencia calculada aparte. Cuando  $H \rightarrow 1$ , este  $t^*$  debe tender a 0.

DIMENSIONES FRACTALES. Para la gráfica entera,  $D = 2 - H$  (Orey 1970). Si el conjunto antiimagen de un cierto valor es no vacío,  $D = 1 - H$ . Este resultado se encuentra en Marcus, 1976 (consolidando el teorema 5, pág. 146, de Kahane 1968).

TRANSICIÓN CRÍTICA EN  $H = 1$ . La serie de Fourier-Brown-Wiener, con coeficientes gaussianos independientes proporcionales a  $n^{-H-1/2}$ , converge a una suma continua para todos los  $H > 0$ . Cuando  $H$  cruza el valor  $H = 1$ , la suma se hace diferenciable. Por contra, el proceso browniano fraccionario sólo está definido para  $H$  menores que 1. Esta diferencia en los valores admisibles de  $H$  confirma que ambos procesos son completamente diferentes. Sugiere también que los fenómenos físicos de transición crítica podrían modelizarse con funciones brownianas reales de variable real, pero no con funciones definidas sobre la circunferencia.

### 7. Trayectorias brownianas fraccionarias vectoriales de variable real (o en la circunferencia)

En el caso vectorial con variable en la circunferencia y con  $H < 1$ , la dimensión de la trayectoria es  $\min(E, 1/H)$ . Este resultado es parte del Teorema 1, pág. 143, de Kahane (1968).

### 8. Distintas formas de integro-diferenciación fraccionaria

La manera más simple de transformar la función browniana real de variable real  $B(t)$  en  $B_H(t)$  consiste en escribir:

$$B_H(t) = [\Gamma(H + 1/2)]^{-1} \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(s).$$

Esta integral es divergente, pero los incrementos del tipo  $B_H(t) - B_H(0)$  son convergentes. Se trata de un promedio móvil del núcleo  $(t-s)^{H-1/2}$ , y es una transformación clásica aunque un tanto oscura, que los matemáticos puros conocen como *integral o diferencial fraccionaria de Riemann-Liouville* de orden  $H + 1/2$ .

HEURÍSTICA. La idea de que el orden de derivación o de integración no tiene por qué ser entero se comprende mejor en términos espectrales. En efecto, la integración ordinaria de una función periódica equivale a multiplicar los coeficientes de Fourier de la función por  $1/n$ , y la integración ordinaria de una función no periódica equivale a multiplicar su transformada de Fourier (si está definida) por  $1/f$ . Por tanto, la operación que multiplica la transformada de Fourier por la potencia fraccionaria  $(1/f)^{H+1/2}$  se puede llamar razonablemente *integro-diferenciación fraccionaria*. Como el espectro del ruido blanco es  $f^{-0}$ , el espectro de  $B_H(t)$  es  $(1/f)^{2(H+1/2)} = f^{-2H-1}$  (como ya habíamos anunciado).

REFERENCIAS. La transformación de Riemann-Liouville tiene muchas otras aplicaciones (Zygmund 1959, II, pág. 133, Oldham y Spanier 1974, Ross 1975, Lavoie, Osler y Tremblay 1976). La menos conocida en el campo de la probabilidad (con referencias que se remontan a Kolmogorov, 1940) está comentada en Mandelbrot y Van Ness (1968).

EFFECTO SOBRE LA REGULARIDAD. Cuando el orden  $H-1/2$  es positivo, la transformación de Riemann-Liouville es una forma fraccionaria de integración, pues aumenta la regularidad de la función. La regularidad equivale a la persistencia local, pero la regularidad obtenida por integración se hace extensiva a las propiedades globales de la función. Cuando  $H-1/2 < 0$ , la transformación de Riemann-Liouville es una forma fraccionaria de derivación, pues intensifica la irregularidad que depende del comportamiento local.

APLICACIÓN A LAS FUNCIONES BROWNIANAS. Para una función browniana real definida en la circunferencia,  $H$  no tiene cota superior. La integración fraccionaria de orden  $H-1/2 > 1/2$  aplicada a una función browniana real definida en la circunferencia, da una función diferenciable. En las funciones brownianas reales de variable real, por el contrario,  $H-1/2$  puede valer como máximo  $1/2$ , y  $B_H(t)$  no es diferenciable.

En ambos tipos de funciones brownianas, la irregularidad local prohíbe derivar más allá de  $H=0$ , es decir, del orden  $-1/2$ .

EXTENSIÓN BILATERAL DE LA INTEGRO-DIFERENCIACIÓN FRACCIONARIA. El hecho de que la definición clásica de Riemann-Liouville sea marcadamente asimétrica en  $t$  es completamente aceptable si  $t$  es el tiempo. Pero aquellos casos en los que  $t$  pueda «discurrir» en cualquier sentido exigen una definición simétrica. Yo propongo

$$B_H(t) = [\Gamma(H+1/2)]^{-1} \cdot \left[ \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) - \int_t^{\infty} |t-s|^{H-1/2} dB(s) \right]$$

## 9. Funciones brownianas reales de varias variables

Lévy (1948, 1957, 1959, 1963, 1965) introdujo las funciones brownianas de un espacio  $n$  sobre la recta real, donde  $\Omega$  puede ser  $R^E$  con la distancia ordinaria  $|PP_0|$ , una esfera en  $R^{E+1}$  con la distancia definida sobre una geodésica, o un espacio de Hilbert. En cualquiera de estos casos,  $B(P) - B(P_0)$  es una variable aleatoria gaussiana de media nula y varianza  $G(|PP_0|)$ , con  $G(x) = x$ . Entre otras referencias vale la pena citar McKean (1963) y Cartier (1971).

REPRESENTACIÓN POR RUIDO GAUSSIANO BLANCO CUANDO  $\Omega$  ES UNA ESFERA. Este  $B(P)$  se construye en el modo descrito en el capítulo 28: extiéndase una sábana de ruido blanco sobre una esfera y tómesese  $B(P)$  igual a la integral de dicho ruido sobre el hemisferio cuyo polo norte es  $P$ . En realidad yo prefiero la variante que toma  $1/2$  de la integral sobre dicho hemisferio menos  $1/2$  de la integral sobre el otro hemisferio. Esto generaliza el segundo proceso del subapartado 4 anterior.

REPRESENTACIÓN POR RUIDO GAUSSIANO BLANCO CUANDO  $\Omega$  ES  $R^E$  (CHENTSOV, 1957). En este caso interviene un algoritmo más complicado, debido a Chentsov, y para visualizarlo más fácilmente trabajaremos con  $E=2$  y  $B(0, 0) = 0$ . Tomemos un cilindro auxiliar de radio 1 y coordenadas  $u$  y  $e$ , y dispongamos sobre él una sábana de ruido blanco. De acuerdo con la modificación del algoritmo propuesta en Mandelbrot (1975b), se integra este ruido sobre el rectángulo comprendido entre  $\theta$  y  $\theta + d\theta$  y entre 0 y  $u$ . Se obtiene así una función browniana real de variable real que se anula para  $u=0$  y que se denota por  $B(u, \theta, d\theta)$ . Para cada  $(x, y)$  del plano, las componentes brownianas reales de variable real  $B(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta, d\theta)$  son estadísticamente independientes, y su integral sobre  $\theta$  es  $B(x, y)$ .

## 10. Funciones brownianas fraccionarias reales de varias variables

Gangolli (1967), precedido en algunos puntos por Yaglom (1957), generaliza  $B(P)$  para el caso en que  $G(x) = x^{2H}$ . Pero no consigue llegar a un algoritmo explícito para construir la función resultante. Mandelbrot (1975b) lo hace generalizando el método de Chentsov y sustituyendo cada  $B(u, \theta, d\theta)$  por una función browniana fraccionaria real de variable real definida bilateralmente.

Para  $D$  véase Yoder (1974, 1975).

Para simulaciones mediante TFR, véase Voss (1982).

## 11. Transformadas no lineales de los ruidos gaussianos fraccionarios

Dado un  $G(x)$  distinto de  $G(x) = x$ , formemos  $\sum_{t=1}^T G\{B_H(t) - B_H(t-1)\}$ , e interpolamos linealmente para los valores no enteros de  $T$ . El resultado, que denotaremos por  $B_G(T) - B_G(0)$ , es asintóticamente escalante si existe una función  $A(T)$  tal que  $\lim_{T \rightarrow \infty} A(T)\{B_G(hT) - B_G(0)\}$  es no degenerado para todo  $h \in (0, 1)$ . Murray Rosenblatt había estudiado el caso  $G(x) = x^2 - 1$ . Taqqu (1975) demuestra que el problema depende del rango hermitiano de  $G$ , definido como el orden del término inferior en el desarrollo de  $G$  en serie hermitiana. En Taqqu (1979) y Dobrushin (1979) se pueden encontrar resultados más recientes de este estilo.

### DIMENSION Y RECUBRIMIENTO DE UN CONJUNTO (O DE SU COMPLEMENTARIO) MEDIANTE BOLAS

Tanto la dimensión fractal que propongo como todas sus variantes aceptables no son conceptos topológicos sino *métricos*. Esto significa que se trabaja en un espacio métrico  $\Omega$ , es decir, un espacio en el que está definida convenientemente la distancia entre cada par de puntos. Una bola cerrada (respectivamente, abierta) de centro  $\omega$  y radio  $\rho$  es el conjunto de todos los puntos cuya distancia a  $\omega$  es  $\leq \rho$  (respectivamente  $< \rho$ ). (Las bolas son macizas y las esferas son sus superficies.)

Dado un subconjunto acotado  $S$  de  $\Omega$ , hay muchos métodos para recubrirlo con bolas de radio  $\rho$ . A menudo, como en los ejemplos que se examinan en este apartado, dichos métodos implican de manera natural un concepto de dimensión. En los casos fundamentales, dichos conceptos dan valores idénticos. En otros, no obstante, dan valores distintos.

#### 1. Cantor y Minkowski

El método más tosco de recubrimiento, introducido por Cantor, parte de una bola centrada en cada punto de  $S$ , y toma la reunión de las mismas como una versión alisada de  $S$ , que llamaremos  $S(\rho)$ .

Supongamos además que  $\Omega$  es un espacio euclídeo  $E$ -dimensional. En tal caso, está definido el concepto de volumen (vol) y

$$\text{vol}\{\text{bola } d\text{-dimensional de radio } \rho\} = \gamma(d) \rho^d,$$

con

$$\gamma(d) = [\Gamma(1/2)]^d / \Gamma(1 + d/2).$$

Cuando  $S$  es un cubo de volumen mucho mayor que  $\rho^3$ ,

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim \text{vol}[S].$$

Cuando  $S$  es un cuadrado de área mucho mayor que  $\rho^2$ ,

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim 2 \rho \text{ área}[S].$$

Cuando  $S$  es un segmento de longitud mucho mayor que  $\rho$ ,  $\text{vol}[S(\rho)] \sim \pi \rho^2 \text{ longitud}[S]$ .

Concretando más, llamemos «contenido» al volumen, área o longitud, según convenga, y sea  $d$  la dimensión estándar. Si  $V$  denota la expresión

$$V = \text{vol}[S(\rho)] / \gamma(E-d) \rho^{E-d},$$

tenemos que los cubos, cuadrados y segmentos cumplen que  $\text{contenido}[S] = \lim_{\rho \rightarrow 0} V$ .

Esta fórmula no es, contra lo que pudiera parecer, una relación sin importancia entre conceptos igualmente inocuos. Un ejemplo debido a H. A. Schwartz (publicado en 1882) demuestra que, cuando se triangula un cilindro circular de manera cada vez más fina, la suma de las áreas de los triángulos no *siempre* converge al área del cilindro. Para evitar este comportamiento paradójico, Minkowski intentó reducir la longitud y el área al concepto simple y bien fundamentado de volumen, por el método anterior de recubrir  $S$  con bolas.

Sin embargo, se plantea de entrada una ligera complicación: puede darse el caso de que  $V$  no converja cuando  $\rho$  tiende a 0.

Cuando esto ocurre, el concepto de límite se sustituye por los conceptos gemelos de  $\lim \sup$  y  $\lim \inf$ . A cada número real  $A$  del intervalo  $[\lim \inf, \lim \sup]$  le corresponde al menos una sucesión  $\rho_m \rightarrow 0$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \{ \text{vol}[S(\rho_m)] / \gamma(E-d) \rho_m^{E-d} \} = A.$$

Pero no existe dicha sucesión si  $A < \lim \inf$  o  $A > \lim \sup$ . Aceptadas estas definiciones, Minkowski (1901) define, respectivamente,  $d$ -con-

nido superior y  $d$ -contenido inferior de  $S$  como

$$y \quad \begin{array}{l} \lim \text{Sup}_{\rho \rightarrow 0} \text{vol}[S(\rho)]/\gamma(E-d) \rho^{E-d} \\ \lim \text{inf}_{\rho \rightarrow 0} \text{vol}[S(\rho)]/\gamma(E-d) \rho^{E-d} \end{array}$$

Si son iguales, su valor es el  $d$ -contenido de  $S$ . Minkowski observa que, para las figuras euclídeas estándar, existe una  $D$  tal que si  $d > D$ , el contenido superior de  $S$  se anula, y si  $d < D$  el contenido inferior de  $S$  es infinito.

## 2. Bouligand

La generalización de la definición de Minkowski a valores no enteros de  $d$  se debe a Bouligand (1928, 1929). En particular, el anterior  $\lim \text{inf}$ , que podría ser fraccionario, debería llamarse *dimensión de Minkowski-Bouligand*  $D_{MB}$ .

Bouligand se dio cuenta de que la  $D_{MB}$  es a veces contraria a la intuición, y en general no es tan conveniente como la  $D$  de Hausdorff-Besicovitch. Pero a menudo es idéntica a ésta y más fácilmente calculable, cosa que la hace útil. En Kahane y Salem (1963, pág. 29), se discute el caso  $E=1$ , confirmándose que a menudo  $D_{MB}$  coincide con  $D$ , y nunca es menor pero puede ser mayor.

## 3. Pontrjagin y Schnirelman; Kolmogorov y Tihomirov

Entre todos los recubrimientos de bolas de radio  $\rho$  del subconjunto  $S$  de un espacio métrico  $\Omega$ , el más económico es, por definición, el que emplea el mínimo número de bolas. Si  $S$  es acotado, dicho número mínimo es finito y puede denotarse por  $N(\rho)$ . Pontrjagin y Schnirelman (1932) introducen la expresión

$$\lim \text{inf}_{\rho \rightarrow 0} \log N(\rho)/\log(1/\rho)$$

como definición alternativa de dimensión.

Este planteamiento es desarrollado por Kolmogorov y Tihomirov (1959), quienes se inspiran en la teoría de la información de Shanon para llamar  $\rho$ -entropía de  $S$  a  $\log N(\rho)$ . Hawkes (1974) llama *dimensión de entropía inferior* a la dimensión correspondiente, y a la variante que se obtiene sustituyendo el  $\lim \text{inf}$  por el  $\lim \text{sup}$  la llama *dimensión de entropía superior*.

*pía superior.* Hawkes demuestra que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es, como mucho, igual a la dimensión de entropía inferior, que no siempre coincide con la superior.

Kolmogorov y Tihomirov (1959) también estudian  $M(\rho)$ , definido como el mayor número de puntos de  $S$  tales que sus distancias mutuas son mayores que  $2\rho$ . Para los subconjuntos de la recta se tiene que  $N(\rho) = M(\rho)$ . Pero para otros conjuntos,

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \log M(\rho) / \log(1/\rho)$$

define una nueva dimensión.

□ Kolmogorov y Tihomirov (1959) llaman *capacidad* a  $\log M(\rho)$ . Esta expresión es poco afortunada, pues dicho término tiene un significado distinto, más justificado y más antiguo, en la teoría del potencial. En particular, no hay que caer en la tentación de llamar dimensión de capacidad a la dimensión correspondiente al párrafo anterior. Véase «Potenciales», 3. ■

#### 4. Besicovitch y Taylor; Boyd

Si  $\Omega$  es  $[0, 1]$ , o la recta real, vimos en el capítulo 8 que un polvo  $S$  está completamente determinado por su complementario, que es la reunión de los intervalos abiertos maximales, los huecos (en algunos métodos de construcción, cada hueco es una trema).

POLVO DE CANTOR TRIÁDICO  $C$  EN  $[0, 1]$ . Las longitudes de los huecos suman 1 y siguen la distribución hiperbólica  $Pr(U > u) = FU^{-D}$ . Por tanto, la longitud  $\lambda_n$  del  $n$ -ésimo hueco por tamaños decrecientes tiene un orden de magnitud de  $n^{-1/D}$ .

SUBCONJUNTOS DE LA RECTA CON MEDIDA DE LEBESGUE NULA. Besicovitch y Taylor (1954) estudian el comportamiento de los  $\lambda_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Existe un exponente real  $D_{BT}$  tal que la serie  $\sum \lambda_n^d$  converge para  $d > D_{BT}$  (y en particular converge a 1 para  $d = 1$ ). Así,  $D_{BT}$  es el ínfimo de los números reales  $d$  tales que  $\sum \lambda_n^d < \infty$ . Se puede demostrar que  $D_{BT} > D$ . Hawkes (1974, pág. 707) demuestra que  $D_{BT}$  coincide con la dimensión de entropía superior, pero puede ser más fácil de calcular.

ADVERTENCIA. Si  $S$  no es de medida nula,  $D_{BT}$  no es una dimensión. Está relacionado con uno de los exponentes del capítulo 15 y con la  $\Delta$  del capítulo 17.

EXPONENTE DE EMPAQUETAMIENTO APOLONIANO.  $D_{BT}$  tiene un homólogo en el caso del empaquetamiento apoloniano (capítulo 18). Fue introducido en 1966 por Z. A. Melzak, y Boyd (1973b) demostró que (como



era de esperar) es la dimensión de Hausdorff-Besicovitch del conjunto residual.

## DIMENSION (DE FOURIER) Y HEURISTICA

Sea  $\mu(x)$  una función no decreciente de  $x \in [0, 1]$ . Si la reunión de los intervalos abiertos maximales en que  $\mu$  es constante es el complementario del conjunto cerrado  $S$ , se dice que  $d\mu(x)$  tiene como soporte  $S$ . La transformada de Fourier-Stieltjes de  $\mu$  es

$$\hat{\mu}(f) = \int \exp(ifx) d\mu(x).$$

Las  $\mu$  más regulares dan la tasa de decrecimiento más rápida posible de  $\hat{\mu}$ . Sea  $D_F$  el mayor número real tal que por lo menos una función  $\mu(x)$  con soporte  $S$  cumple

$$\hat{\mu}(f) = o(|f|^{-D_F/2 + \epsilon}), \text{ cuando } f \rightarrow \infty, \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

pero para ningún  $\mu(x)$  se cumple que

$$\hat{\mu}(f) = o(|f|^{-D_F/2 - \epsilon}), \text{ cuando } f \rightarrow \infty, \text{ para algún } \epsilon > 0.$$

Aquí « $a = o(b)$ , para  $f \rightarrow \infty$ » significa que  $\lim_{f \rightarrow \infty} (a/b) = 0$ .

Cuando  $S$  es todo el intervalo  $[0, 1]$ ,  $D_F$  es infinita. Por contra, si  $S$  es un punto,  $D_F = 0$ . Y siempre que  $S$  tenga medida de Lebesgue nula,  $D_F$  es finita y como mucho igual a la dimensión de Hausdorff-Besicovitch  $D$  de  $S$ . La desigualdad  $D_F \leq D$  indica que las propiedades armónicas y las propiedades fractales de  $S$  están relacionadas, aunque no tienen por qué ser idénticas.

Para demostrar que dichas dimensiones pueden ser efectivamente distintas, supongamos que  $S$  es una parte de la recta con  $D_F = D$ . Si se considera el mismo  $S$  como subconjunto del plano,  $D$  no cambia, pero  $D_F$  se hace 0.

DEFINICIÓN. Un modo conveniente de resumir algunas propiedades armónicas de  $S$  es llamar *dimensión de Fourier de  $S$*  a  $D_F$ .

CONJUNTOS DE SALEM. La igualdad  $D_F = D$  caracteriza una clase de subconjuntos llamados conjuntos de unicidad o de Salem (Kahane y Salem 1963, Kahane 1968).

REGLA DEL PULGAR Y HEURÍSTICA. Los fractales de interés en los casos estudiados tienden a ser conjuntos de Salem. Como a menudo es más fá-

cil calcular  $D_F$  a partir de los datos, nos puede servir como una estimación de  $D$ .

CONJUNTOS DE SALEM NO ALEATORIOS. Un polvo de Cantor no aleatorio es un conjunto de Salem sólo cuando  $r$  satisface ciertas propiedades de la teoría de números.

CONJUNTOS DE SALEM ALEATORIOS. Un polvo de Cantor aleatorio es un conjunto de Salem cuando el azar basta para romper todas las regularidades aritméticas.

El ejemplo original, debido a R. Salem, es muy complejo. El siguiente ejemplo es el polvo de Lévy: denotando la escalera de Lévy (lámina 405) por  $L(x)$ , Kahane y Mandelbrot (1965) demuestran que el espectro de  $dL(x)$  es casi idéntico en cuanto a media al espectro de la función browniana fraccionaria real de variable real, y es una forma regularizada del espectro de la función de Gauss-Weierstrass.

▮ Kahane (1968, teorema 1, pág. 165 y 5, pág. 173) demuestra que la imagen del conjunto compacto  $S$  de dimensión  $\delta$  por una función browniana fraccionaria real de variable real de exponente  $H$  es un conjunto de Salem con  $D = \min(1, \delta / H)$ . ▮

EL POLVO DE CANTOR NO ES UN CONJUNTO DE SALEM. El polvo triádico de Cantor fue obtenido originariamente por Georg Cantor al buscar un conjunto de unicidad (véase Zigmund 1959, I, pág. 196), pero dicha búsqueda fracasó. (Cantor abandonó entonces el análisis armónico y — ¡como alternativa!— fundó la teoría de conjuntos). Denótemos por  $C(x)$ , por ejemplo, la escalera de Cantor (lámina 121). El espectro de  $dC(x)$  tiene la misma forma global que el de  $dL(x)$ , pero contiene ocasionalmente unos máximos muy agudos de magnitud no decreciente, y esto implica que  $D_F = 0$ . Véase Hille y Tamarkin (1929).

Estos máximos son de la mayor importancia en la teoría de los conjuntos de unicidad, aunque en la práctica es poco probable que sean significativos. La mayoría de estimadores de la densidad espectral tenderán a pasar por alto los máximos y recoger sólo el fondo regido por  $D$ .

## FRACTALES (SOBRE LA DEFINICION DE LOS)

Aunque el término *fractal* se define en el capítulo 3, sigo pensando que lo mejor sería no dar ninguna definición (como hice en mi ensayo de 1975).

La razón más inmediata es que, como veremos, la definición dada excluye ciertos conjuntos que uno preferiría considerar incluidos.

Profundizando un poco más, en mi definición intervienen  $D$  y  $D_T$ , pero parece que el concepto de estructura fractal es más fundamental que  $D$  o que  $D_T$ . En el fondo, la importancia de los conceptos de dimensión se ha incrementado con su nuevo e inesperado uso.

En otras palabras, debería ser posible definir las estructuras fractales por la propiedad de ser invariantes según una cierta clase de transformaciones regulares. Pero esta tarea no parece nada fácil. Para poner un ejemplo de su dificultad en un contexto estándar, recordemos que ciertas definiciones de *número completo* ¡excluyen los reales! En el estado de cosas actual, la necesidad principal es distinguir los fractales fundamentales de los conjuntos estándar de la geometría euclídea. Y esta necesidad sí la satisface mi definición.

Mi evidente falta de entusiasmo debe ser compartida por muchos matemáticos eminentes a quienes se les pasó por alto mi definición de 1977. No obstante, la explicaré un poco mejor.

## 1. Definición

Según la primera definición aparecida en la introducción de mi ensayo de 1977, un *conjunto fractal* es un subconjunto de un espacio métrico tal que

dimensión  $D$  de Hausdorff-Besicovitch  $>$  dimensión topológica  $D_T$ .

Con una sola excepción, los fractales de este libro son conjuntos de un espacio euclídeo de dimensión  $E < \infty$ , y se puede decir que son fractales euclídeos. La excepción está en el capítulo 28: la costa browniana sobre una esfera, que se puede considerar un fractal riemanniano.

## 2. Crítica. Dimensiones parcialmente aritméticas y dimensiones puramente fractales

La definición matemática anterior es *rigurosa pero sólo provisional*, y sería bueno mejorarla, aunque diversos cambios aparentemente naturales podrían ser poco afortunados.

Hace tiempo, cuando buscaba la forma de medir las propiedades que posteriormente se llamarían fractales, opté por la dimensión  $D$  de Hausdorff-Besicovitch, porque había sido estudiada con muchísimo cuidado. El hecho de que tratados como el de Federer (1969) creyeran necesario

introducir múltiples variantes, distintas de  $D$  en algunos detalles, es desconcertante. No obstante, hay buenos motivos para posponer la consideración de esos detalles.

Además, ante varias posibles dimensiones para escoger, *hay que* evitar aquéllas en que intervengan claramente factores extraños. Así, la  $D$  no tiene ninguna faceta aritmética, contrariamente a lo que ocurre tanto con la dimensión de Fourier  $D_F$  (pág. 360) como con el exponente de Taylor y Besicovitch (pág. 359 y Kahane, 1971, pág. 89).

### 3. Casos dudosos de Hausdorff

Los casos dudosos son siempre un problema. A priori, de una curva rectificable con  $D=1$  se puede tanto decir que es fractal como que no lo es, y lo mismo ocurre con cualquier conjunto tal que  $D=D_T$ , pero cuya medida de Hausdorff con la función de prueba  $h(\rho) = \gamma(D)\rho^0$  es infinita (no puede anularse). O lo que es más molesto aun, la escalera del diablo de Cantor (lámina 121) intuitivamente es un fractal, pues presenta claramente muchas escalas de longitud. Por ello, aunque se tenga que  $D=D_T=1$ , repugna tener que decir que no es fractal (véase pág. 373). A falta de otros criterios, tracé la línea divisoria de modo que la definición fuera corta. Si se encuentra una buena razón para ello, dicha definición deberá ser modificada. (Véase más adelante el punto 8.)

### 4. Reformulación de la definición

La «dimensión de capacidad» (véase el subapartado POTENCIALES, 4) satisface los criterios expuestos en el subapartado 2 anterior, por la sencilla razón de que su valor es idéntico a  $D$ . Por tanto, otra definición de fractal es un conjunto tal que

Dimensión de capacidad de Frostman  $>$  dimensión topológica.

### 5. Tiempos fractales, intrínseco y local

En el capítulo XII del *Fractals* de 1977 se pueden encontrar algunos materiales no elaborados sobre el tema.

## MEDIDA DE HAUSDORFF Y DIMENSION DE HAUSDORFF-BESICOVITCH

Algunas buenas referencias generales sobre este tema son Hurewicz y Wallman (1941), Bilingsley (1967), Rogers (1970) y Adler (1981).

### 1. Medida de Carathéodory

La reflexión de que «el concepto general de volumen o magnitud es indispensable en las investigaciones de las dimensiones de los conjuntos continuos» ya se le ocurrió a Cantor. Atendiendo a la dificultad del problema, Lebesgue duda que Cantor pudiera llegar a algún resultado interesante. Carathéodory (1914) relanza la misma idea, y Hausdorff (1919) la pone en práctica.

Un método clásico de evaluación del área de una figura plana empieza aproximando  $S$  por un conjunto de cuadrados muy pequeños y sumando los lados de dichos cuadrados elevados a la potencia  $D=2$ . Carathéodory (1914) generaliza este enfoque tradicional. Para no depender de unos ejes coordenados sustituye los cuadrados por discos, y se esfuerza en no hacer uso del conocimiento previo de que  $S$  es una figura euclídea estándar de dimensión conocida y contenida en un  $R^E$  conocido.

Nótese, pues, que cuando una figura plana considerada como parte del espacio tridimensional es recubierta mediante discos, forzosamente se la recubre también mediante bolas que tienen tales discos como ecuadores. Por tanto, para no prejuizar la forma plana de  $S$ , basta con recurrirle a base de bolas en vez de discos. Cuando  $S$  es efectivamente una superficie, su contenido aproximado se obtiene sumando expresiones de la forma  $\pi\rho^2$ , correspondientes a todas las bolas del recubrimiento. Y, en general, una figura estándar de dimensión  $d$  nos exige sumar expresiones del tipo  $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$ , donde la función  $\gamma(d) = [\Gamma(1/2)]^d / \Gamma(1 + d/2)$  ya se ha definido antes, en este mismo capítulo, como el contenido de una bola de radio unidad. Sobre esta base, Carathéodory (1914) generaliza los conceptos de «longitud» y «área» para algunas figuras no estándar.

### 2. Medida de Hausdorff

Hausdorff (1919) va más allá que Carathéodory y permite que  $d$  sea fraccionario (la función  $\gamma(d)$  se expresa de manera que siga teniendo sentido). Así, en vez de limitarse a potencias de  $\rho$ , puede usarse cualquier función de prueba  $h(\rho)$  positiva que tienda a 0 con  $\rho$ .

Además, como una bola no es más que el conjunto de puntos cuya distancia a un centro  $\Omega$  no es mayor que un radio  $\rho$  dado, este concepto sólo depende de si hay definida una distancia, y sigue estando definido aun cuando el espacio  $\Omega$  no sea euclídeo. Como ya se ha señalado, tales espacios se denominan métricos; así pues, la medida de Hausdorff es un concepto métrico.

Dada una función  $h(\rho)$  de prueba (o de «gauge»), podemos decir que la medida de un recubrimiento finito del conjunto  $S$  mediante bolas de radio  $\rho_m$  es  $\Sigma h(\rho_m)$ . Para conseguir una máxima economía en el recubrimiento, se consideran todos los recubrimientos con bolas de radios menores que  $\rho$ , y se busca el ínfimo

$$\inf_{\rho_m < \rho} \Sigma h(\rho_m).$$

Cuando  $\rho \rightarrow 0$ , la condición  $\rho_m < \rho$  se hace cada vez más restrictiva. Por tanto, la expresión  $\inf \Sigma h(\rho_m)$  tiene que ser creciente, y por tanto debe tener límite,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \Sigma h(\rho_m),$$

el cual define la  $h$ -medida del conjunto  $S$ , y puede ser finito y positivo, infinito o nulo.

Cuando  $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$ , la  $h$ -medida se dice que es  $d$ -dimensional. Más concretamente, y por la presencia del factor  $\gamma(d)$ , se la denomina medida  $d$ -dimensional normalizada.

Cuando  $h(\rho) = 1 / \log|\rho|$ , la  $h$ -medida se denomina logarítmica.

### 3. La función de prueba intrínseca de un conjunto

Dado el conjunto  $S$ , se dice que  $h(\rho)$  es intrínseca de  $S$ , y se denota por  $h_S(\rho)$ , si la  $h_S$ -medida de  $S$  es positiva y finita. Esta medida se podría llamar *medida fractal* de  $S$ .

La función de prueba de las figuras estándar de la geometría euclídea siempre tiene la forma  $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ , para un cierto valor entero de  $D$ . Hausdorff demostró que las  $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ , con valores no enteros de  $D$ , son intrínsecas para los polvos de Cantor y las curvas de Koch.

Por otra parte, en el caso de fractales aleatorios típicos, incluso en el caso de que sean estadísticamente autosemejantes, la  $h_S(\rho)$  existe pero es más complicada. Puede tener, por ejemplo, la forma  $h_S(\rho) = \rho^D \log|\rho|$ . En tal caso, la  $h$ -medida de  $S$  con respecto a  $h(\rho) = \gamma(D)\rho^D$  es nula, y por

tanto la figura tiene menos «sustancia» que si fuera  $D$ -dimensional, pero más que si fuera  $(D-\varepsilon)$ -dimensional. Un ejemplo lo tenemos en el movimiento browniano plano, para el que Lévy obtiene  $h_s(\rho) = \rho^2 \log \log(1/\rho)$ . (Véase Taylor, 1964.)

Como la medida bidimensional de cualquier conjunto acotado plano es finita, las funciones de prueba de la forma  $\rho^2/\log(1/\rho)$  no son intrínsecas de ningún conjunto plano.

Buena parte del trabajo de determinar  $h_s(\rho)$  para conjuntos aleatorios ha sido realizado por S. J. Taylor, solo o en colaboración con otros; una referencia es Pruitt y Taylor (1969).

#### 4. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch: definición

Se sabe que, si  $S$  es bidimensional, basta con calcular la  $h$ -medida de Hausdorff para  $h(\rho) = \pi \rho^2$ . Sin embargo, la medida de Hausdorff se ha definido de modo que no haga falta conocer  $D$  previamente. Si uno trata con una figura estándar de dimensión desconocida, calculará primero la medida para todas las funciones de prueba  $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$  con  $d$  entera, y si la longitud es infinita y el volumen nulo, la figura sólo puede ser bidimensional.

Besicovitch generalizó la esencia de esta última conclusión a los casos en los que  $d$  no es entera y  $S$  no es una figura estándar. Demostró que para todo conjunto  $S$  existe un valor real  $D$  tal que la  $d$ -medida es infinita para  $d < D$  y nula para  $d > D$ .

*Esta  $D$  se denomina dimensión de Hausdorff-Besicovitch de  $S$ .*

Para un físico, esta definición significa que  $D$  es una dimensión crítica.

La medida de Hausdorff  $D$ -dimensional de un conjunto  $S$   $D$ -dimensional puede ser cero, infinita o positiva y finita. Hausdorff sólo había considerado esta tercera categoría más simple, y demostró que incluía los conjuntos de Cantor y las curvas de Koch. Si además el conjunto  $S$  es autosemejante, se puede ver fácilmente que su dimensión de semejanza debe ser igual a  $D$ . Por otra parte, vimos que los conjuntos aleatorios típicos tienen medida aleatoria nula en su dimensión intrínseca.

Durante mucho tiempo Besicovitch fue el autor o coautor de casi todos los artículos sobre este tema. Mientras que Hausdorff es el padre de la dimensión no estándar, se puede decir que Besicovitch se convirtió en la madre.

**CODIMENSIÓN.** Cuando  $\Omega$  es el espacio  $R^E$ ,  $D \leq E$ , y  $E - D$  es lo que se denomina *codimensión*.

### 5. Producto directo de conjuntos (dimensiones aditivas)

Supongamos que  $S_1$  y  $S_2$  pertenecen, respectivamente, a un  $E_1$ -espacio y a un  $E_2$ -espacio, y denotemos por  $S$  el conjunto del  $E$ -espacio ( $E = E_1 + E_2$ ) obtenido por producto cartesiano de  $S_1$  y  $S_2$ . (Si  $E_1 = E_2 = 1$ ,  $S$  es el conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano, tales que  $x \in S_1$  e  $y \in S_2$ .)

La regla es que, si  $S_1$  y  $S_2$  son «independientes», la dimensión de  $S$  es la suma de las dimensiones de  $S_1$  y  $S_2$ .

El concepto de «independencia» incorporado a esta regla resulta inesperadamente difícil de plantear y demostrar de modo general. (Véase Marstrand, 1954a, 1954b; Hawkes, 1974; Mattila, 1975). Por suerte, la intuición suele ser una buena guía en los diversos casos a estudiar, como por ejemplo los presentados en esta obra.

### 6. Intersección de conjuntos (codimensiones aditivas)

La regla es la siguiente. Cuando  $S_1$  y  $S_2$  son conjuntos independientes de un  $E$ -espacio y

$$\text{codimensión } (S_1) + \text{codimensión } (S_2) < E,$$

la suma de la izquierda es casi con seguridad igual a

$$\text{codimensión } (S_1 \cap S_2).$$

Cuando la suma de codimensiones es  $> E$ , uno se suele encontrar con que la dimensión de la intersección es casi con seguridad nula.

En particular, dos conjuntos de la misma dimensión no se cortan si  $D \leq E/2$ . La dimensión  $E = 2D$  se puede llamar *crítica*.

Hay que destacar que, como las trayectorias brownianas tienen  $D = 2$ , dos trayectorias brownianas se cortan si  $E < 4$  y no se encuentran si  $E \geq 4$ .

La regla se puede generalizar de manera inmediata a la intersección de más de dos conjuntos.

**AUTOINTERSECCIONES.** El conjunto de puntos de  $S$  de multiplicidad  $k$  se puede considerar como la intersección de  $k$  réplicas de  $S$ . Uno se siente tentado de probar si, en lo que respecta a la dimensión de la intersección, dichas  $k$  réplicas pueden considerarse independientes. En un ejemplo al menos, esta conjetura resulta ser correcta. S. J. Taylor (1966), generalizando unos resultados de Dvoretzky, Erdos y Kakutani, estudia las trayectorias de los movimientos browniano y de Lévy en  $R^1$  y en  $R^2$ .



La dimensión de la trayectoria es  $D$ , y la dimensión de los conjuntos de puntos de multiplicidad  $k$  es  $\max[0, E - k(E - D)]$ . La conjetura de Taylor es que el resultado es válido en cualquier  $R^E$  para todos los valores posibles de  $k$ .

### 7. Proyecciones de conjuntos

La regla es que, cuando un fractal  $S$  de dimensión  $D$  se proyecta según una dirección independiente de  $S$  sobre un subespacio euclídeo de dimensión  $E_0$ , la proyección  $S$  cumple

$$\text{dimensión } S = \min(E_0, D).$$

APLICACIÓN. Supongamos que  $x_1 \in S_1$  y  $x_2 \in S_2$ , siendo  $S_1$  y  $S_2$  dos fractales de  $R^E$ , de dimensiones  $D_1$  y  $D_2$ . Sean  $a_1$  y  $a_2$  dos números reales no negativos, y definamos el conjunto  $S$  formado por los puntos de la forma  $x = a_1x_1 + a_2x_2$ . La dimensión  $D$  de este  $S$  cumple que

$$\max(D_1, D_2) \leq D \leq \min(E, D_1 + D_2).$$

La demostración consiste en tomar el producto directo de  $R^E$  por  $R^E$  y luego proyectar.

En caso de que haya independencia, tiende a ser válida la cota superior. Cuando  $D = E = 1$ ,  $S$  puede ser bien un fractal, bien un conjunto que contiene intervalos.

### 8. Subordinación de conjuntos (dimensiones multiplicativas)

Véase el capítulo 32.

### 9. La sucesión de las subdimensiones

Cuando la función de prueba intrínseca de  $S$  es  $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ , las propiedades fractales son plenamente descritas por  $D$ . Cuando

$$h_S(\rho) = \rho^D [\log(1/\rho)]^{\Delta_1} [\log \log(1/\rho)]^{\Delta_2},$$

la descripción de las propiedades fractales de  $S$  es más complicada. Se

necesita la sucesión  $D, \Delta_1, \Delta_2$ . Las  $\Delta_m$  se pueden llamar *dimensiones subordinadas* o *subdimensiones*.

Las subdimensiones podrían ayudar a responder la pregunta de si son o no fractales los casos dudosos que se comentaban en el subapartado «Fractal», 3. Podría ser útil considerar fractales aquellos  $S$  con  $D = D_T$  pero al menos con una  $\Delta$  no nula.

## LAS FUNCIONES INDICADOR Y COINDICADOR

Dado un conjunto  $S$ , la función indicadora  $J(x)$  se define clásicamente como aquella en que  $J(x) = 1$  si  $x \in S$  y  $J(x) = 0$  si  $x \notin S$ . Cuando  $S$  es un polvo de Cantor, una red de Sierpinski (tamiz o alfombra) o cualquier otra figura de otras varias clases de fractales,  $J(x)$  no es lo que más conviene. A menudo encuentro más útil sustituir  $J(x)$  por otra función  $C(x)$ , introducida por mí, y para la que ahora propongo el nombre de *indicadora*.

$C(x)$  es una media ponderada aleatoria de las funciones características de los huecos de  $S$ . En otras palabras,  $C(x)$  es constante en cada hueco, y sus valores en los distintos huecos son variables aleatorias independientes que obedecen a la misma distribución.

$C(x)$  se introduce y estudia en Mandelbrot 1965c, 1967b y 1967i, con el nombre más antiguo (y que puede inducir a confusión) de *función nuclear*.

## VARIABLES Y FUNCIONES ALEATORIAS ESTABLES SEGUN LÉVY

La distribución hiperbólica es de una simplicidad formal inmejorable, y es invariante por truncación (véase el apartado «Cambio de escala y truncación»). Pero las otras transformaciones que la dejan invariante no son importantes. Mucho más importantes son las distribuciones invariantes por adición. Sólo son asintóticamente hiperbólicas, y Paul Lévy les asignó una denominación tremendamente manida: «distribuciones estables». Introdujo también los procesos estables en los que intervienen tanto las distribuciones estables como las hiperbólicas.

Antes de mi trabajo las variables estables se consideraban «patológicas» y hasta «monstruosas», con la única excepción del vector aleatorio de Holtsmark que se discute en el subapartado 9. Mis principales aplicaciones de tales variables se han presentado en los capítulos 31, 32 y 37, y en el subapartado 4 de la sección siguiente se cita una aplicación a la genética.

REFERENCIAS. Son numerosas. El material sobre estabilidad presentado en Feller (1966, volumen II) es completo pero disperso, por lo que es difícil encontrarlo cuando se necesita. Lamperti (1966) es una buena introducción. Gnedenko y Kolmogorov (1954) se recomienda todavía. Lukacs (1970) recoge muchos detalles útiles. Los grandes tratados originales de Lévy (1925, 1937-1954) no satisfacen a todo el mundo, dado el especial estilo de su autor (véase el capítulo 40).

1. La v. a. gaussiana es escalante por adición

Se sabe que la distribución gaussiana tiene la propiedad siguiente. Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos variables aleatorias gaussianas independientes, con

$$[G_1]=[G_2]=0; [G_1^2]=\sigma_1^2, [G_2]=\sigma_2^2.$$

Su suma  $G_1 + G_2$  satisface

$$[G_1 + G_2]=0; [G_1 + G_2]^2=\sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Y lo que es más importante,  $G_1 + G_2$  es también gaussiana. Así pues, la propiedad gaussiana es invariante por adición de variables aleatorias independientes. Dicho de otro modo, la ecuación funcional

$$(L) \quad s_1 X_1 + s_2 X_2 = s X,$$

junto con la relación subsidiaria

$$(A:2) \quad s_1^2 + s_2^2 = s^2,$$

admite la gaussiana como solución posible. De hecho, fuera de cambios de escala, la gaussiana es la única distribución que satisface simultáneamente (L) y (A:2).

Además, si se combina (L) con la relación subsidiaria alternativa  $\langle X^2 \rangle < \infty$ , la gaussiana vuelve a ser la única solución.

(L) fue objeto de un estudio serio por Lévy (1925), que la llama *estabilidad*. Dondequiera que haya peligro de ambigüedad, suelo usar el término más incómodo de *estabilidad según Lévy*.

## 2. La variable aleatoria de Cauchy

Como los científicos con espíritu práctico tienden a dar por sentado que  $\langle X^2 \rangle < \infty$ , se piensa generalmente que la única distribución estable es la gaussiana. Esto no es así en absoluto, como reconoció por vez primera Cauchy (1853, pág. 206). El ejemplo de Cauchy es una variable aleatoria que había sido considerada anteriormente por Poisson y que se conoce actualmente como «variable de Cauchy reducida». Satisface

$$Pr(X > -x) = Pr(X < x) = 1/2 + \pi^{-1} \arctg x,$$

por lo que

$$\text{densidad de Cauchy} = 1/[\pi(1+x^2)].$$

Cauchy demostró que esta variable era solución de la combinación de (L) con la relación subsidiaria alternativa

$$(A: I) \quad s_1 + s_2 = s.$$

Para la variable de Cauchy,  $\langle X_2 \rangle = \infty$ , y de hecho  $\langle X \rangle = \infty$ . Por tanto, para expresar la idea obvia de que la escala del producto de  $X$  por una  $s$  no aleatoria es igual a  $s$  veces la escala de  $X$ , hay que medir esta escala por una magnitud que no sea la media cuadrática. Una candidata es la distancia entre los cuartiles  $Q$  y  $Q'$ , donde  $Pr(X < Q') = Pr(X > Q) = 1/4$ .

Muy a menudo la variable de Cauchy sirve de contraejemplo, como en Bienaymé (1853, págs. 321-321). Véase también Heyde y Seneta (1977).

MODELO GENERADOR GEOMÉTRICO. La fórmula anterior,  $Pr(X < x) = (1/2) + \pi^{-1} \arctg x$ , se puede plasmar geoméricamente situando el punto  $W$  sobre la circunferencia  $u^2 + v^2 = 1$ , con una distribución de probabilidad uniforme, y definiendo  $X$  como la abscisa del punto en que el radio que pasa por  $W$  corta la recta  $v = 1$ . Por las mismas razones, la variable  $Y$ , definida como la ordenada del punto de intersección de dicho radio con la recta  $u = 1$ , sigue la misma distribución que  $X$ . Como  $Y = 1/X$ , tenemos que la inversa de la variable de Cauchy es ella misma.

Además, siempre que tengamos que  $OW = (X, Y)$  es un vector aleatorio isotrópicamente distribuido en el plano,  $Y/X$  es una variable de Cauchy. En particular, el cociente de dos variables gaussianas independientes es una variable de Cauchy.

### 3. Recurrencias del movimiento browniano

Combinemos ahora la ecuación (L) con

$$(A:0,5) \quad s_1^{0,5} + s_2^{0,5} = s^{0,5}.$$

La solución es la variable aleatoria cuya densidad es 0 si  $x < 0$ , y que en caso contrario es igual a

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-1/2x) x^{-3/2}.$$

La cantidad  $p(x)dx$  es la probabilidad de encontrar que una función browniana con  $B(0) = 0$  satisfaga también  $B(t) = 0$  para algún  $t$  comprendido entre  $x$  y  $x + dx$ .

### 4. Variables estables según Lévy generales

Cauchy consideró también la relación subsidiaria generalizada

$$(A:D) \quad s_1^D + s_2^D = s^D,$$

SOLUCIONES SIMÉTRICAS. Basándose en cálculos formales, Cauchy afirmó que, para todo  $D$ , la combinación de (L) con (A:D) tiene una solución, la variable aleatoria de densidad

$$\pi^{-2} \int_0^\infty \exp(-u^D) \cos(ux) du.$$

Pólya y Lévy demostraron que, cuando se cumple  $0 \leq D \leq 2$ , la afirmación de Cauchy está efectivamente justificada, y las distribuciones de Cauchy y Gauss son dos casos particulares. Pero en el caso  $D > 2$ , la afirmación de Cauchy no es válida, pues la densidad formal escrita expresada más arriba toma valores negativos, lo cual es absurdo.

SOLUCIONES ASIMÉTRICAS EXTREMAS. Lévy demostró además que la combinación de (L) y (A:D) admite soluciones asimétricas. La función generatriz (transformada de Laplace) de la más asimétrica de ellas está definida y es igual a  $\exp(g^D)$ .

OTRAS SOLUCIONES ASIMÉTRICAS. La solución general de la combinación de (L) y (A:D) es una diferencia ponderada de dos soluciones independientes e idénticamente distribuidas, con asimetría máxima. La costumbre es denotar los pesos por  $(1 + \beta)/2$  y  $(1 - \beta)/2$ .

GENERALIZACIÓN FINAL DE (L). Sin variar (A:D), sustituimos la condición (L) por

$$(L^*) \quad s_1 X_1 + s_2 X_2 = s X + \text{constante.}$$

Cuando  $D \neq 1$ , este cambio no importa mucho, pero si  $D = 1$  aparecen nuevas soluciones, que se conocen como variables de Cauchy asimétricas.

MUTANTES BACTERIANOS. Mandelbrot (1974d) demuestra que el número total de mutantes en un cultivo bacteriano viejo (el problema de Luria-Delbrück) es una variable estable según Lévy con asimetría máxima.

### 5. Forma de las densidades estables según Lévy

Aparte de tres excepciones:  $D = 2$  con  $\beta = 0$ ,  $D = 1$  con  $\beta = 0$ , y  $D = 1/2$  con  $\beta = 1$ , no se conoce una forma analítica cerrada para las distribuciones estables según Lévy, pero las propiedades de las tres excepciones simples se pueden generalizar a los otros casos.

En todos los casos asimétricos extremos con  $0 < D < 1$ , la densidad se anula para  $x < 0$ . El hecho de que la densidad gaussiana sea  $\exp(-1/2x^2)$  se generaliza en las colas cortas de todos los casos asimétricos extremos con  $1 < D < 2$ . La densidad es  $\propto \exp(-c|x|^{D/(D-1)})$ .

Para  $x \rightarrow \infty$  la densidad de Cauchy es  $\propto (\pi)^{-1} x^{-D-1}$  y la densidad de recurrencia browniana es  $\propto (2\pi)^{-1/2} x^{-D-1}$ . Y en general, para todo  $D \neq 2$ , la densidad en las colas largas es  $\propto x^{-D-1}$ .

De lo contrario, el comportamiento de  $p(u)$  se debe obtener numéricamente. En Mandelbrot (1960e) se encuentran algunas gráficas para  $1 < D < 2$  en el caso asimétrico extremo, con comentarios adicionales relativos a los valores de  $D$  muy próximos a 2. En Mandelbrot (1962p) y Mandelbrot (1963b) se dan las gráficas correspondientes al caso simétrico. Las técnicas de transformada rápida de Fourier aligeran esa tarea. (Véase Dumas 1973, 1975.)

### 6. La desigualdad de los sumandos y la agregación resultante

Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos variables aleatorias independientes con la misma densidad de probabilidad  $p(u)$ . La densidad de probabilidad de  $X = X_1 + X_2$  es

$$p_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) p(u-y) dy.$$

Si se conoce la suma  $u$ , la densidad condicional de cada sumando y es  $p(y)$   $p(u-y)/p_2(u)$ . Examinemos con más detenimiento la forma de esta densidad.

EJEMPLOS. Cuando  $p(u)$  es una gaussiana de varianza unidad, y por tanto una función unimodal (sólo tiene un máximo), la distribución condicional es una gaussiana centrada en  $u/2$  y su varianza es  $1/2$ , que es independiente de  $u$  (véase CONJUNTOS FRACTALES BROWNIANOS, 3). Cuando  $u \rightarrow \infty$ , los valores relativos de los sumandos se aproximan cada vez más entre sí.

Cuando  $p(u)$  es una densidad de Cauchy reducida, que también es unimodal, se distinguen dos casos distintos. Cuando  $|u| < 2$ , cosa que ocurre la mitad de las veces, la distribución condicional es también unimodal, y el valor más probable es también  $u/2$ . Por el contrario, si  $|u| > 2$ , el valor  $u/2$  se convierte en el *menos* probable (localmente). Para  $|u| = 2$ , la distribución condicional se bifurca en *dos* «ojivas» distintas centradas respectivamente en la proximidad de  $y=0$  y de  $y=u$ . Para  $u \rightarrow \infty$ , estas ojivas son cada vez más difícilmente distinguibles de las ojivas de Cauchy centradas en 0 y en  $u$ .

Cuando  $p(u)$  es una densidad de recurrencia browniana, la situación es parecida al caso de Cauchy aunque más extrema, con una densidad condicional bimodal de probabilidad  $> 1/2$ .

Corolario: considérense tres pasos sucesivos por el cero de un paseo aleatorio,  $T_{k-1}$ ,  $T_k$  y  $T_{k+1}$ . Si  $T_{k+1} - T_{k-1}$  es grande, *lo más probable* es que el paso  $T_k$  se agrupe *muchísimo* ya hacia  $T_{k-1}$  ya hacia  $T_{k+1}$ , y *lo menos* probable, que se sitúe a mitad de camino entre ambos. □ Este resultado está relacionado con un célebre resultado de teoría de la probabilidad contrario a la intuición, la ley del arco seno de Lévy. ■

Consideremos a continuación la distribución condicional de  $U$ , sabiendo que la suma de  $M$  variables  $U_g$  toma un valor  $u$  muy grande. En el caso gaussiano, el resultado más probable es que cada sumando  $U_g$  sea próximo a  $u/M$ . En el caso de Cauchy, y en el de la recurrencia browniana, por el contrario, el resultado más probable es que todos los sumandos menos uno sean más bien pequeños.

LA TRAMPA OCULTA EN LA IDEA DE CONTRIBUCIONES «IDÉNTICAS» A UNA SUMA. Si los sumandos son *a priori idénticos*, en el sentido de obedecer a la misma distribución, los valores a posteriori pueden ser casi iguales (como en el caso gaussiano) o distintos en grado diverso (como en el caso estable según Lévy cuando la suma es muy grande).

## 7. Límites centrales no estándar. Papel de las variables hiperbólicas

Dada una sucesión infinita  $X_n$  de variables aleatorias independientes con idénticas distribuciones, el problema del límite central consiste en

preguntarse si es o no posible escoger unos pesos  $a_N$  y  $b_N$  de modo que la suma  $a_N \sum_1^N X_n - b_N$  tenga un límite no trivial para  $N \rightarrow \infty$ .

En el caso estándar  $\langle X_n^2 \rangle < \infty$ , la respuesta es estándar y afirmativa:  $a_N = 1/\sqrt{N}$  y  $b_N \sim \langle X_n \rangle \sqrt{N}$ , y el límite es gaussiano.

El caso no estándar  $\langle X_n^2 \rangle = \infty$  es muchísimo más complejo: (a) no se pueden escoger siempre los  $a_N$  y  $b_N$ ; (b) cuando se puede, el límite estable no es gaussiano; (c) una condición *suficiente* para que el exponente del límite sea  $D$  es que la distribución de las  $X_n$  sea asintóticamente hiperbólica con exponente  $D$  (capítulo 38); (d) la condición necesaria y suficiente se encuentra en las referencias del principio de este apartado.

### 8. Funciones estables según Lévy reales y de variable real

Se trata de funciones aleatorias con incrementos independientes, estacionarios y tales que la variable aleatoria  $X(t) - X(0)$  es estable según Lévy. El factor de escala  $a(t)$ , que hace que  $[X(t) - X(0)]a(t)$  no dependa de  $t$ , tiene que ser de la forma  $a(t) = t^{-1/D}$ . Este proceso generaliza el movimiento browniano ordinario a  $D \neq 2$ .

La propiedad más sorprendente de  $X(t)$  es que es discontinua y presenta saltos.

CASO  $D < 1$ . Aquí la  $X(t)$  sólo contiene saltos; el número de saltos entre  $t$  y  $t + \Delta t$  con valor absoluto mayor que  $u$  es una variable aleatoria de Poisson de valor esperado igual a  $|\Delta t|u^{-D}$ .

Las cantidades relativas de saltos positivos y negativos son  $(1 + \beta)/2$  y  $(1 - \beta)/2$ . El caso asimétrico extremo  $\beta = 1$  sólo contiene saltos positivos; se llama *subordinador estable*, y sirve para definir la escalera de Lévy de las láminas 286 y 287.

PARADOJA. Como  $u^{-D} \rightarrow \infty$  para  $u \rightarrow 0$ , el número de saltos esperado es infinito, independientemente de lo pequeño que sea  $\Delta t$ . El hecho de que la probabilidad asociada sea infinita parece paradójico. Pero esta sensación se esfuma cuando uno comprueba que la suma acumulada de los saltos con  $u < 1$  es finita. Esta conclusión parece natural cuando uno se da cuenta de que la longitud esperada de un salto pequeño es finita y

$$\infty \int_0^1 D u^{-D-1} u \, du = D \int_0^1 u^{-D} \, du < \infty.$$

CASO  $1 < D < 2$ . Ahora la última integral es divergente, con lo que la contribución total de los saltos pequeños es infinita. Como consecuencia de ello,  $X(t)$  contiene una parte continua y una parte discontinua; ambas son infinitas pero su suma es finita.



## 9. Vectores y funciones estables según Lévy

Cambiamos la ecuación funcional ( $L$ ) de la definición de estabilidad, convirtiendo la  $X$  en un vector aleatorio  $X$ . Dado un vector unitario  $V$ , está claro que el sistema formado por las dos ecuaciones ( $L$ ) y ( $A:D$ ) admite soluciones consistentes en el producto de  $V$  por una variable escalar estable.

Lévy (1937-1954) demuestra que la solución general no es más que la suma de las soluciones elementales correspondientes a todas las direcciones del espacio, ponderadas por una distribución sobre la esfera unidad. Estas contribuciones pueden ser discretas (finitas o numerablemente infinitas) o continuas. Para que el vector  $X$  sea isótropo, las contribuciones elementales deben estar distribuidas uniformemente en todas las direcciones.

FUNCIONES VECTORIALES DEL TIEMPO ESTABLES SEGÚN LÉVY. Estas funciones admiten el mismo tipo de descomposición (en suma de saltos que obedecen a una distribución hiperbólica) que una función escalar estable. El tamaño y dirección de dichos saltos se rigen por una distribución sobre la esfera unidad.

DISTRIBUCIÓN DE HOLTSMARK. El trabajo de Holtsmark en espectroscopía sobrevivió tras su reformulación en términos de atracción newtoniana (Chandrasekhar, 1943); y hasta la aparición de mis trabajos representó la única aplicación concreta de las distribuciones estables según Lévy. Supongamos que tenemos una estrella en  $O$  y que, por todo el espacio, tenemos estrellas de masa unidad, distribuidas de forma mutuamente independiente y con una densidad esperada  $\delta$ . ¿Cuál es la atracción total que dichas estrellas ejercen sobre  $O$ ? Poco después del descubrimiento por Newton de la ley de proporcionalidad inversa a  $r^2$ , el reverendo Bentley le escribió indicándole que la atracción de las estrellas contenidas en un pincel delgado  $d\Omega'$  con vértice en  $O$  tiene un valor esperado infinito, y lo mismo ocurre con la atracción de las estrellas contenidas en el pincel  $d\Omega''$ , simétrico del anterior con respecto a  $O$ . La conclusión de Bentley era que la diferencia entre dichos infinitos era indeterminada.

El problema de Holtsmark, tal como se plantea habitualmente, evita esta dificultad ocupándose únicamente del exceso por encima del valor esperado, de la atracción que realmente se produce. Empezamos con las estrellas contenidas en el dominio limitado por el pincel anterior de ángulo sólido  $d\Omega$  y las esferas de radios  $r$  y  $r + dr$ . Cada una ejerce una atracción  $u = r^{-2}$ , y su número es una variable de Poisson de valor esperado  $\delta |d\Omega| d(r^3) = \delta |d\Omega| |d(u^{-3/2})|$ . Por tanto, la atracción excedente con respecto al valor esperado tiene la función característica

$$\exp\{\delta |d\Omega| \int_0^\infty [\exp(i\zeta u) - 1 - i\zeta u] |d(u^{-3/2})|\}.$$

Y ésta corresponde a una variable estable según Lévy de exponente  $3/2$  y  $\beta=1$ . Según el subapartado 6 anterior, es muy probable que una  $u$  positiva grande se deba a la presencia de una *sola* estrella cerca de 0, independientemente de la densidad de estrellas en el resto; y para valores grandes de  $u$ , la distribución de  $U$  se comporta como la distribución de la atracción de la estrella más próxima.

La atracción excedente global es, pues, un vector estable según Lévy isótropo con  $D=3/2$ .

La estabilidad significa aquí que si hay dos nubes de estrellas rojas y azules, respectivamente, distribuidas uniformemente, las fuerzas ejercidas sobre  $O$  por cada nube, o por ambas, difieren sólo en un factor de escala, pero no en la forma analítica de sus distribuciones.

### 10. Funciones aleatorias estables de varias variables

En Mandelbrot (1975b) se generaliza la construcción de Chentsov (1957) de la función browniana real de varias variables.

### 11. Dimensiones

Los primeros cálculos de la dimensión de un proceso estable para el caso no gaussiano se encuentran en McKean (1955) y en Blumenthal y Gettoor (1960c, 1962). Una referencia que además incluye bibliografía es Pruitt y Taylor (1969).

### 12. Escalantes por adición ponderada (Mandelbrot 1974c, f)

Como ya se ha comentado en este mismo capítulo dentro del subapartado FRACTALES NO LAGUNARES 4, Mandelbrot (1974c, f) presenta una familia de generalizaciones de las variables estables según Lévy, que implican una generalización de la condición de estabilidad de Lévy (L), en la que los pesos  $s_{\mu}$  son aleatorios.

## HEURISTICA DE LIPSCHITZ-HÖLDER

A pesar de que en este ensayo las propiedades locales se reflejan en las globales, la dimensión fractal es en origen una propiedad local. Por

tanto, en el caso del grafo de una función continua arbitraria  $X(t)$ ,  $D$  tiene que relacionarse con otras propiedades locales. Una de las más útiles es el exponente  $\alpha$  de Lipschitz-Hölder ( $LH$ ). La condición de  $LH$  en  $t$  significa que

$$X(t) - X(t_0) \sim |t - t_0|^\alpha, \text{ para } 0 < t - t_0 < \varepsilon,$$

y análogamente para  $t-$ . El exponente global de  $LH$  en  $[t', t'']$  es  $\lambda[t', t''] = \inf_{r' \leq t \leq r''} \alpha$ . A menos que  $X(t)$  sea constante,  $\lambda \leq 1$ .

HEURÍSTICA  $LH$  Y  $D$ . Dado un  $\alpha$ , el número de cuadrados de lado  $r$  necesarios para recubrir el grafo de  $X$  entre los instantes  $t$  y  $t+r$  es aproximadamente igual a  $r^{\alpha-1}$ . De este modo se puede recubrir el grafo de  $X(t)$  para  $t \in [0, 1]$  por medio de  $N$  cuadrados, y por un argumento dimensional se llega a  $D = \log N / \log(1/r)$ . Este modo de estimar  $D$  se llamará aquí *heurística de Lipschitz-Hölder*, y es sólido y eficiente.

EJEMPLOS. Cuando  $X$  es diferenciable para todo  $t$  entre 0 y 1, si no consideramos los puntos en que  $X'(t) = 0$ , se tiene  $\alpha = 1$  en todas partes, y el número de cuadrados necesarios para recubrir el grafo es  $N \sim r^{\alpha-1}(1/r) = r^{-1}$ . Se sigue que  $D = 1$ , como en efecto ocurre.

Cuando  $X(t)$  es una función browniana, ordinaria o fraccionaria, se puede demostrar que  $\alpha \equiv \lambda = H$ . El  $N$  heurístico es  $N \sim r^{H-1-1}$ , y por tanto  $D = 2 - H$ , que de nuevo concuerda con la  $D$  conocida.

□ Para la función del apartado WEIERSTRASS..., Hardy (1916) demuestra que  $\alpha \equiv H$ . De ahí la conjetura de que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch es  $2 - H$ . ■

El caso de la escalera de Cantor es totalmente distinto. Ahora  $X$  varía sólo para aquellos valores de  $t$  pertenecientes a un polvo fractal de dimensión fractal  $\delta < 1$ , y  $\alpha$  depende de  $t$ . Dividamos  $[0, 1]$  en  $1/r$  intervalos temporales de longitud  $r$ . En  $r^{-\delta}$  de dichos intervalos se tiene  $\alpha = \delta$ , mientras que en los demás  $\alpha$  no está definido, pero si se giran levemente los ejes coordenados, se tiene  $\alpha = 1$ . Por tanto, el valor heurístico del número de cuadrados del recubrimiento es  $r^{-1} + r^{\delta-1}r^{-\delta} = 2r^{-1}$ , y la dimensión heurística es  $D = 1$ . Este es efectivamente el caso, como ya se indicó en la leyenda de la lámina correspondiente.

Además, la suma de una función browniana y de una escalera de Cantor con  $\delta < H$  da  $D = 2 - H$  y  $\lambda = \delta$ , de donde  $1 < D < 2 - \lambda$ .

RESUMEN. La desigualdad heurística  $1 \leq D \leq 2 - \lambda$ . Esta conjetura se confirma en Love y Young (1937) y Besicovitch y Ursell (1937). (Véase también Kahane y Salem, 1963, pág. 27.)

ACERCA DE LA DEFINICIÓN DE «FRACTAL». En el apartado «fractales»..., se dice que sería bueno ampliar el dominio del término *fractal* para poder

incluir la **escalera** de Cantor. ¿Habría que decir que una curva es fractal cuando  $\lambda < 1$  y  $\alpha$  es próximo a  $\lambda$  para «un número suficientemente grande» de valores de  $t$ . Prefiero no tomar este camino, pues tales ampliaciones son complicadas y distinguen entre  $D_T=0$  y  $D_T>0$ .

FUNCIÓNES VECTORIALES PLANAS DE UNA VARIABLE. Sean  $X(t)$  e  $Y(t)$  dos funciones continuas con LH-exponentes  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . La heurística sugiere que para recubrir el grafo de la función vectorial de componentes  $X(t)$  e  $Y(t)$  para  $t \in [0, 1]$  hacen falta como mucho  $r^{\lambda_1 + \lambda_2 - 3}$  cubos de lado  $r$ . De donde se sigue que  $1 \leq D \leq 3 - (\lambda_1 + \lambda_2)$ . Para la trayectoria del movimiento browniano plano ordinario, esto da la  $D=2$  correcta.

PROYECCIONES. Formemos ahora una trayectoria continua por proyección de  $\{X(t), Y(t)\}$  sobre el plano  $(x, y)$ . Cuando  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , la heurística sugiere que hacen falta  $1/r$  cuadrados de tamaño  $r^\lambda$ , por lo cual  $1 \leq D \leq \min(2, 1/\lambda)$ . Análogamente, consideremos la trayectoria continua de una función  $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$  cuyas componentes tengan unos exponentes  $\lambda$  idénticos. La heurística sugiere que  $1 \leq D \leq \min(3, 1/\lambda)$ . Cuando  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , la trayectoria continua de  $\{X(t), Y(t)\}$  se tiene que recubrir con cuadrados de  $r^{\max \lambda}$ , por tanto

$$1 \leq D \leq 2 - \max\{0, (\lambda_1 + \lambda_2 - 1) / \max(\lambda_1, \lambda_2)\}.$$

Love y Young (1937) confirman todos estos resultados.

## POLIGONOS MEDIANO Y JAULA

En el capítulo XII del *Fractals* de 1977 se encuentran materiales sobre este tema (relacionado con las curvas de Peano).

## MUSICA: DOS PROPIEDADES ESCALANTES

La música tiene al menos dos propiedades escalantes dignas de mención.

LAS ESCALAS MUSICALES TEMPLADAS Y SU RELACIÓN CON EL ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE LA FUNCIÓN DE WEIERSTRASS MODIFICADA. El uso más general de la raíz latina *scala* (= escalera) *no* se corresponde, naturalmente, con el término *escalante* que aparece a lo largo de todo este libro, sino con el concepto de *escala musical*, la cual implica un espectro discreto que se conserva si multiplicamos las frecuencias. En una escala templada las frecuencias están distribuidas *logarítmicamente*. Así, por ejemplo, la escala dodecafónica corresponde a la base  $b = 2^{1/12}$ . Como

consecuencia de ello, las notas fundamentales de cada instrumento musical componen una gran parte de los tonos bajos de la totalidad de su banda de frecuencias, pero sólo una pequeña parte de los tonos altos.

Si se extrapola a las frecuencias altas o bajas inaudibles se obtiene un espectro idéntico al de la función de Weierstrass (modificada, pág. 389b) con el mismo valor de  $b$ . En consecuencia, para añadir tonos bajos a una composición musical, basta con añadir nuevos instrumentos capaces de producirlos.

Dado que el teorema de Euler-Fourier representa la función periódica más general como una serie de armónicos *linealmente* espaciados, las funciones que representan la sucesión de las notas fundamentales en la composición musical más general son funciones muy restringidas.

LA MÚSICA COMO RUIDO ESCALANTE ( $1/f$ ) (R. F. VOSS). Un segundo aspecto escalante de la música se refiere a la variación temporal de distintas medidas de la señal acústica, como por ejemplo su potencia (medida por el cuadrado de su intensidad), o su frecuencia instantánea (medida por la tasa de pasos por cero de la señal audio). Voss y Clarke (1975) y Voss (1978) —véase también Gardner (1978)— observan que en las obras de compositores tan distintos como Bach, Beethoven y The Beatles, las dos medidas anteriores de la señal acústica son ruidos escalantes, ruidos  $1/f$  como los que se describen en la pág. 254.

Y a la inversa, si se produce música aleatoria por medio de una fuente física de ruido externa, con un espectro  $1/f^b$  y diversos exponentes escalantes, Voss y Clarke (1975) y Voss (1978) encuentran que el sonido resultante es casi «musical» cuando la causa es un ruido  $1/f$ .

Este fue un descubrimiento totalmente inesperado, pero como muchos de los descubrimientos incluidos en este ensayo, resulta «natural» *a posteriori*. El argumento que prefiero es que las composiciones musicales son, como su propio nombre indica, compuestas. Primero, se subdividen en movimientos caracterizados por tempos globales y/o niveles de volumen distintos. Los movimientos también se dividen del mismo modo. Y los maestros insisten en que hay que «componer» cada pieza musical hasta las menores subdivisiones significativas. El resultado es a la fuerza escalante.

Sin embargo, este dominio escalante no alcanza hasta intervalos de tiempo del orden de una nota. Las frecuencias superiores se rigen por mecanismos completamente distintos (entre los que se cuentan la resonancia de los pulmones, de las cajas de violín y de los tubos de los instrumentos de viento de madera). Por tanto, para las energías altas el espectro se parece más a  $f^{-2}$  que a  $f^{-1}$ .

## FRACTALES NO LAGUNARES

Atendiendo a la definición de lagunaridad dada en el capítulo 34, un conjunto no lagunar del espacio  $R^E$  debería intersecar cualquier cubo o esfera de dicho espacio. En términos matemáticos, debería ser denso por doquier, y en consecuencia no cerrado. (¡El único conjunto cerrado y denso por doquier en  $R^E$  es él mismo!) En este apartado se demuestra que tales fractales efectivamente existen, pero su naturaleza es muy distinta de los fractales cerrados del resto de este libro. Un síntoma indicativo es que la dimensión de Hausdorff-Besicovitch sigue siendo calculable, pero las dimensiones de semejanza y de Minkowski-Bouligand son iguales a  $E$ , en vez de serlo a la  $D$  de Hausdorff-Besicovitch.

### 1. *Intermitencia relativa*

Los fenómenos a los que atañen las fractales no lagunares se encuentran dispersos por todo este ensayo, en el sentido de que muchos de los casos de fractales naturales de que trato invalidan algún saber incuestionable relativo a la naturaleza.

En el capítulo 8 olvidamos que, entre error y error, el ruido que causa los errores fractales se debilita pero no desaparece.

En el capítulo 9 no tuvimos en cuenta la existencia de materia interestelar. No cabe duda de que su distribución es *por lo menos* tan irregular como la de las estrellas. En realidad, la imposibilidad de definir una densidad es mayor y más generalmente aceptada para la materia interestelar que para la estelar. Citando a de Vaucouleurs (1970), «parece difícil de creer que, mientras la materia visible está notablemente agrupada y arracimada a cualquier escala, el gas intergaláctico invisible sea uniforme y homogéneo ... [su] distribución tiene que estar íntimamente relacionada con... la distribución de galaxias». Otros astrónomos hablan de *mechones* y *telarañas* intergalácticos.

Y en el capítulo 10 los hojaldres de disipación turbulenta son obviamente una imagen supersimplificada de la realidad.

Al final del capítulo 9 se habla brevemente de la imagen fractal de la distribución de minerales. Aquí, el uso de fractales cerradas implica que, fuera de las zonas donde el mineral es extraíble, la concentración de cobre es nula. En realidad es muy pequeña en la mayoría de lugares, pero no se puede suponer que sea nula en ninguna parte.

En todos los casos, se vaciaban algunas regiones de menor interés inmediato para poder así manejar conjuntos fractales *cerrados*, pero en úl-

tima instancia dichas regiones se tienen que llenar. Esto puede conseguirse por medio de un nuevo híbrido, los *fractales no lagunares*. Por poner un ejemplo, una distribución no lagunar de masa en el cosmos sería aquella en que ningún lugar del espacio estuviera vacío, pero, para cada par de umbrales pequeños  $\theta$  y  $\lambda$ , una proporción de masa mayor que  $1 - \lambda$  se concentrara en una porción de espacio de volumen relativo menor que  $\theta$ .

## 2. Una cita de de Wijs y comentario

Las circunstancias intuitivas básicas que piden a voces las fractales no lagunares se describen en de Wijs (1951), quien hace una «hipótesis de trabajo» que vale la pena resumir.

«Consideremos una [masa de mineral] de tonelaje  $W$  y calidad media  $M$ . Con un corte imaginario partimos dicha masa en dos mitades del mismo tonelaje  $W/2$ , con una calidad media distinta. Si aceptamos que la calidad media de la mitad más rica es  $(1+d)M$ , la calidad de la más pobre tendrá que ser  $(1-d)M$ , para que la calidad media del conjunto sea  $M$ ... Un segundo corte imaginario divide el cuerpo en cuatro partes del mismo tonelaje  $W/4$ , y calidades medias  $(1+d)^2M$ ,  $(1+d)(1-d)M$ ,  $(1+d)(1-d)M$  y  $(1-d)^2M$ . Con un tercer corte tenemos  $2^3=8$  bloques, a saber, uno de calidad media  $(1+d)^3M$ , 3 bloques de  $(1+d)^2(1-d)M$ , 3 bloques de  $(1-d)^2(1+d)M$  y uno de  $(1-d)^3M$ . Uno puede imaginarse la división continua en bloques cada vez más pequeños...

»El coeficiente  $d$  como medida de la variabilidad es un sustituto adecuado de los intangibles colectivos [tan queridos por quienes piensan que la estimación de la mena es más un arte que una ciencia], y las deducciones estadísticas basadas en esta medida pueden suprimir el laberinto de reglas empíricas y técnicas intuitivas.»

COMENTARIO. De Wijs ni tan siquiera aborda el estudio de los aspectos geométricos de este modelo, y ni él ni sus, por lo demás notables, seguidores (G. Matheron entre ellos) tuvieron el menor atisbo de los fractales. Sin embargo, si se supone que la densidad de la mena no depende de la calidad, lo que equivale a suponer que el tonelaje es igual al volumen, resulta que el mismo esquema había sido investigado precisamente con fines totalmente distintos por el matemático puro A. S. Besicovitch y sus discípulos.

Adelantándonos al subapartado siguiente, si se continúa indefinidamente el esquema (reinterpretado) de de Wijs, la mena coagula en un fractal no lagunar. Para definir su dimensión en la forma acostumbrada,  $D = \log N^* / \log 2$ , es necesario definir  $\log N^*$  como

$$\log N^* = -\sum \pi_i \log \pi_i,$$

donde  $\pi_1 = (1+d)^3$ ,  $\pi_8 = (1-d)^3$ ,  $\pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = (1+d)^2(1-d)$ , y  $\pi_5 = \pi_6 = \pi_7 = (1+d)(1-d)^2$ .

CONCLUSIÓN. La conjetura de de Wijs es buena, pero el coeficiente  $d$  no es una medida conveniente, pues sólo se aplica a un modelo. La medida apropiada de la variabilidad de la mena es  $D$ .

### 3. Coagulación ponderada de Besicovitch

Para apreciar mejor los resultados de Besicovitch los presentaremos en  $[0, 1]$  con  $b=3$ .

HIPÓTESIS. Partimos de una masa distribuida sobre  $[0, 1]$  con densidad igual a 1 y la repartimos entre los tercios multiplicándola por los tres pesos  $W_0$ ,  $W_1$  y  $W_2$  que cumplen las siguientes condiciones.

(A)  $1/3 W_0 + 1/3 W_1 + 1/3 W_2 = 1$ , que expresa la conservación de la masa e implica que cada  $W_i$  está acotado por  $b$ . La cantidad  $1/3 W_i$ , que es la masa del  $i$ -ésimo tercio, se denotará por  $\pi_i$ .

(B) Se excluye la distribución uniforme  $W_i \equiv 1/3$ .

(C)  $W_0 W_1 W_2 > 0$ ; que excluye en particular la construcción de Cantor, correspondiente a  $W_0 = 1/2$ ,  $W_1 = 0$ ,  $W_2 = 1/2$ .

Los estadios posteriores de la cascada proceden de un modo análogo y, por ejemplo, las densidades de los subremolinos son  $W_0^2$ ,  $W_0 W_1$ ,  $W_0 W_2$ ,  $W_1 W_0$ ,  $W_1^2$ ,  $W_1 W_2$ ,  $W_2 W_0$ ,  $W_2 W_1$ ,  $W_2^2$ .

CONCLUSIONES. Iterando el proceso indefinidamente, llegamos a los siguientes resultados, debidos sobre todo a Besicovitch y Eggleston. (Billingsley 1965 es una muy buena exposición.)

(A) *Singularidad. Fractal de Besicovitch.* La densidad es asintóticamente nula en casi todos los puntos. El conjunto de puntos en los que la densidad asintótica no es nula (y es infinita) se llamará *fractal de Besicovitch*, B. Está formado por los puntos de  $[0, 1]$  cuya expresión ternaria es tal que el cociente

$$k^{-1}(\text{número de «íes» en los primeros } k \text{ «dígitos»})$$

converge a  $\pi_i$ . Tales puntos forman un conjunto abierto: el límite de una sucesión de puntos del conjunto no tiene por qué pertenecer al mismo.

(B) *No lagunaridad.* La distribución límite de la masa es densa por doquier: aun asintóticamente, ningún intervalo abierto, por pequeño que sea, está totalmente vacío. La masa comprendida entre 0 y  $t$  crece estrictamente



tamente con  $t$ . Aunque en términos relativos los puntos en los que  $\Pi W$  no converge hacia 0 son relativamente pocos, su número absoluto garantiza que la masa contenida en cualquier intervalo  $[t', t'']$  tiene un límite no nulo para  $k \rightarrow \infty$ .

(C) *La dimensión de Hausdorff-Besicovitch de B.* Es

$$D = -(\pi_1 \log \pi_1 + \pi_2 \log \pi_2 + \pi_3 \log \pi_3).$$

Formalmente  $D$  es una «entropía» tal y como se define en termodinámica, o también una «información» en el sentido de Shanon (véase Billingsley, 1965).

(D) *La dimensión de semejanza de B.* Es 1. En efecto,  $B$  es autosemejante con  $N=3$  y  $r=1/3$ , De donde  $D_S = \log 3 / \log 3 = 1$ ; la razón por la que se ha añadido el índice  $S$  quedará clara enseguida. Análogamente, las variantes tridimensionales tienen dimensión 3. En este caso  $D_S$  no puede tener mucho significado físico: en primer lugar, no depende de los  $W_i$ , siempre y cuando éstos satisfagan las condiciones impuestas; en segundo lugar, si se sustituye  $B$  por el polvo de Cantor límite,  $D_S$  salta de 1 a  $\log 2 / \log 3$ .

Además, una distribución fractalmente homogénea ya no puede basarse en la autosemejanza. En efecto, si atribuimos pesos iguales a todos los fragmentos de longitud  $3^{-k}$ , la distribución resultante es uniforme sobre  $[0, 1]$ . No guarda ninguna relación con los valores de las  $W_i$ , y difiere de la medida por la cual el propio conjunto ha sido generado. Pasando también al polvo de Cantor límite, esta distribución uniforme se convierte bruscamente en otra altamente poco uniforme.

(E) *La dimensión de semejanza del «conjunto de concentración» de B.* Es  $D$ . La cuestión es que la medida de Besicovitch se puede aproximar por una medida fractalmente homogénea cuya dimensión de semejanza es igual a la  $D$  de Hausdorff-Besicovitch. Concretando más, después de un gran número  $k$  de pasos de la cascada, la aplastante mayoría de una masa inicialmente uniforme se ha concentrado en  $3^{kD}$  intervalos triádicos de longitud  $3^{-k}$ , los cuales no están uniformemente distribuidos sobre  $[0, 1]$ , pero su separación máxima tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ .

COMENTARIO. Hay que distinguir entre el «conjunto total» necesario para abarcar toda la masa y el «conjunto parcial» donde se concentra el grueso de la masa. Ambos son autosemejantes, pero sus dimensiones de semejanza respectivas,  $D$  y  $D_S$  son distintas. Véase el subapartado 5.

#### 4. Coagulación ponderada aleatoria (Mandelbrot, 1974f, c)

En Mandelbrot (1974f, c) se introduce una generalización natural y rica del esquema de Besicovitch, que se desarrolla más a fondo en Kahane y Peyrière (1976).

El efecto de cada estadio de la cascada es multiplicar las densidades en los  $b^3$  subremolinos de cada remolino por unos pesos aleatorios, independientes e idénticamente distribuidos,  $W_i$ .

Después de  $k$  estadios de una cascada de coagulación ponderada, el número de remolinos en los que se ha concentrado el grueso de la masa es del orden de  $b^{kD^*}$  de un total de  $b^{3k}$ , donde

$$D^* = -[W \log_b(r^3 W)] = 3 - [W \log_b W].$$

En particular, si  $W$  es discreta y las probabilidades de sus posibles valores  $w_i$  son, respectivamente,  $p_i$ , se tiene que

$$D^* = 3 - \sum p_i w_i \log_b w_i.$$

EN EL CASO  $D^* > 0$ ,  $D = D^*$ . La medida generada por la coagulación aleatoria es aproximada por una medida fractalmente homogénea de dimensión  $D = D^*$ , obtenida como se indica en el capítulo 23.

EN EL CASO  $D^* < 0$ ,  $D = 0$ . El número de celdas no vacías tiende asintóticamente a 0, y por tanto el límite es casi con toda seguridad vacío.

En resumen, el portador de la masa es aproximado por un conjunto cerrado con  $D = \max(0, D^*)$ .

SECCIONES. Análogamente, la masa contenida en las secciones lineales o planas se concentra en un número relativamente pequeño de remolinos, respectivamente  $b^{(D^*-1)}$  de un total de  $b^2$ , y  $b^{(D^*-2)}$  de un total de  $b$ . Por tanto, las secciones son no degeneradas si, respectivamente,  $D^* > 1$  o  $D^* > 2$ , y son aproximadas por fractales cuyas dimensiones respectivas son  $D^* - 1$  y  $D^* - 2$ . Por tanto, las dimensiones de las secciones siguen la misma regla que en el caso de fractales lagunares.

NUEVAS VARIABLES ALEATORIAS, INVARIANTES POR SUMA PONDERADA. Denotemos por  $X$  la variable aleatoria que rige la masa asintótica en un remolino de cualquier orden  $k$ , o su sección por una recta o plano de dimensión  $\Delta$ . He demostrado que  $X$  satisface las ecuaciones funcionales

$$(1/C) \sum_{g=0}^{C-1} X_g W_g = X,$$

donde  $C = b^A$ , las v. a.  $W_g$  y  $X_g$  son independientes, y la igualdad significa distribuciones iguales. Esta ecuación generaliza la ecuación (L) que discutíamos en el subapartado «Estable según Lévy...». Las soluciones generalizan las variables estables según Lévy; se discuten en las referencias citadas de Mandelbrot y de Kahane y Peyrière.

### 5. Coagulación aleatoria y función lognormal límite (Mandelbrot, 1972j)

Mandelbrot (1972j) abandona la trama de remolinos que tanto la coagulación absoluta como la ponderada tomaban prestada de Cantor. Los remolinos no están prescritos de antemano, sino que se generan por el mismo mecanismo estadístico que genera distribución de masa en el interior de los propios remolinos. Además, la estratificación discreta de los remolinos se convierte en un continuo.

FUNCIÓN LOGNORMAL LÍMITE. MOTIVACIÓN. Procederemos por modificaciones sucesivas de la coagulación ponderada, realizadas (por simplicidad) sobre una función  $L(t)$  de una variable.

Después del  $n$ -ésimo paso, la densidad de la coagulación ponderada es una función  $Y_n(t)$  tal que  $\Delta \log Y_n(t) = \log Y_{n+1}(t) - \log Y_n(t)$  es una función escalonada que varía cuando  $t$  es un múltiplo entero de  $b^{-n} = r^n$ , y sus valores entre esos instantes son variables aleatorias independientes de la forma  $\log W$ . Supongamos ahora que  $\Delta \log W$  es lognormal con media  $-1/2(\log b)$  y variancia  $\mu \log b$ . Se tiene entonces que la covariancia entre  $\Delta \log Y_n(t)$  y  $\Delta \log Y_n(t + \tau)$  es  $\mu(\log b)(1 - |\tau|/r^n)$  en el intervalo  $|\tau| < r^n$  y se anula fuera del mismo. Esta  $\Delta \log Y_n(t)$  no es gaussiana, puesto que la distribución conjunta de sus valores para dos (o más) valores de  $t$  no es una variable aleatoria gaussiana multidimensional.

*Primera modificación.* Sustituimos cada  $\Delta \log Y_n(t)$  por  $\Delta \log Y_{*n}(t)$  definida como la función aleatoria gaussiana cuya covariancia (apenas distinta de la anterior) es  $\mu(\log b) \exp(-|\tau|/r^n)$ . El resultado conserva el mismo «intervalo de dependencia» que el original, pero rompe las fronteras discretas entre los remolinos de duración  $r^n$ .

*Segunda modificación.* Sustituimos el parámetro discreto  $n \log b$  por un parámetro continuo  $\lambda$ . La suma de diferencias finitas  $\Delta \log Y_n^*(t)$  se convierte ahora en una integral de diferencias infinitesimales  $d \log_\lambda(t)$ , de media  $-1/2 \mu d \lambda$  y variancia  $\mu d \lambda$ , y los remolinos pasan a ser continuos.

DEFINICIÓN DE  $L(t)$ . Consideremos el límite

$$L(t) = L_\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda(t).$$

La variable aleatoria  $\log L_\lambda(t)$  es gaussiana con media  $\langle \log L_\lambda(t) \rangle = -1/2\lambda\mu$  y varianza  $\sigma^2 \log L_\lambda(t) = \lambda\mu$ . Esto garantiza que  $\langle L_\lambda(t) \rangle = 1$  para todo  $\lambda$ . Pero el límite de  $L_\lambda(t)$  puede ser no degenerado o casi con certeza nulo. Esta cuestión no ha sido resuelta matemáticamente aún, pero no me cabe la menor duda de que los siguientes argumentos heurísticos pueden ser objeto de tratamiento riguroso. Los expongo para las funciones  $L(x)$  más interesantes de una variable tridimensional.

EL CONJUNTO DE CONCENTRACIÓN DE UNA MEDIDA LOGNORMAL LÍMITE. Para hacerse una idea del conjunto en el que  $L_\lambda(t)$  no es pequeña, sino sumamente grande, conviene usar cuadrados de referencia de lado  $r'$ . No se trata de subremolinos superpuestos, sino de un simple dispositivo de medida. Cuando  $n > 1$  y  $x$  es fijo, la lognormal  $L_{n \log b}(x)$  tiene una probabilidad altísima de ser muy próxima a 0, de donde resulta que es sumamente pequeña en la mayor parte de su dominio.

Como  $L_{n \log b}(x)$  es continua, varía poco sobre una celdilla de lado  $r'$ , y por tanto la deducción del conjunto de concentración de la coagulación ponderada con una  $W$  lognormal también es aplicable al modelo que nos ocupa. Despreciando términos logarítmicos, el número de celdillas que contribuyen a la parte más importante de  $L_{n \log b}(x)$  tiene el valor esperado  $Q = (r^{-n})^{D^*}$ , con  $D^* = 3 - \mu/2$ .

Cuando  $\mu > 6$ , de modo que  $D^* < 0$ ,  $Q < 0$  para  $\lambda \rightarrow \infty$ , y  $L(x)$  es casi con certeza degenerada.

Cuando  $4 < \mu < 6$ , de modo que  $0 < D^* < 1$ ,  $L(x)$  es no degenerada con  $D = D^*$ , pero sus trazas sobre planos y rectas son casi con certeza degeneradas.

Cuando  $2 < \mu < 4$ , de modo que  $1 < D^* < 2$ ,  $L(x)$  y sus trazas sobre planos son no degeneradas, con dimensiones  $D^*$  y  $D^* - 1$ , pero sus trazas sobre rectas son casi con certeza degeneradas.

Cuando  $0 < \mu < 2$ , de modo que  $2 < D^* < 3$ ,  $L(x)$  y sus trazas sobre planos y sobre rectas son no degeneradas, con dimensiones  $D^*$ ,  $D^* - 1$  y  $D^* - 2$ .

## 6. Dimensión del concentrado de una medida

El estudio de la intermitencia relativa sugiere, no obstante, otras definiciones de dimensión. En vez de un subconjunto de un espacio métrico, consideremos una medida  $\mu(S)$  definida sobre un espacio acotado  $\Omega$  (en un  $\sigma$ -anillo conveniente que incluya las bolas), con las propiedades siguientes: (A) cuando  $S$  es una bola,  $\mu(S) > 0$  y  $\mu(\Omega) = 1$ , y por tanto «el conjunto en el que  $\mu > 0$ » es idéntico a  $\Omega$ ; (B) sin embargo, la intuición

sugiere que  $\mu$  «se concentra» en una parte muy pequeña de  $\Omega$ . Buscamos nuevas maneras de cuantificar ( $B$ ).

Dado  $\rho > 0$  y  $0 < \lambda < 1$ , consideremos los conjuntos  $\Sigma_\lambda$  para los que  $\mu(\Omega - \Sigma_\lambda) < \lambda$ . Denotemos por  $N(\rho, \Sigma_\lambda)$  el ínfimo del número de bolas de radio  $\rho$  necesarias para recubrir  $\Sigma_\lambda$ , y definamos

$$N(\rho, \lambda) = \inf N(\rho, \Sigma_\lambda).$$

Las expresiones

$$\begin{aligned} & \liminf_{\alpha \downarrow 0} \log N(\alpha, \alpha) / \log(1/\alpha) \\ & \liminf_{\rho \downarrow 0} \log N(\rho, \lambda) / \log(1/\rho) \\ & \liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{\rho \downarrow 0} \log N(\rho, \lambda) / \log(1/\rho) \end{aligned}$$

que se asemejan a dimensiones, están detrás de ciertas estimaciones heurísticas que me parecieron útiles, y sería bueno disponer de un estudio riguroso. Naturalmente, las estimaciones heurísticas sustituyen  $\inf N(\delta, \lambda)$  por el  $N(\delta, \Sigma_\lambda)$  correspondiente a algún recubrimiento  $\Sigma_\lambda$  razonable.

## CURVAS DE PEANO

En el capítulo XII del *Fractals* de 1977 se puede encontrar material adicional sobre este tema y sobre sistemas de numeración de base no entera.

## POTENCIALES Y CAPACIDADES. DIMENSION DE FROSTMAN

La dimensión  $D$  de Hausdorff-Besicovitch tiene un papel central en la teoría moderna de potenciales clásicos y potenciales generalizados (Marcel Riesz) mediante núcleos de la forma  $|u|^{-F}$ , donde  $F \neq E - 2$ . Entre los recientes tratamientos matemáticos no elementales de la teoría del potencial, yo prefiero el de duPlessis (1970, capítulo 3) y también el más detallado de Landkof (1966-1972).

### 1. Conjetura

Veremos que el valor especial  $D = 1$  está íntimamente relacionado con el potencial newtoniano en  $R^3$ . Esta relación está en la base de los comen-

tarios del capítulo  $D$ , relativos a las diversas teorías cosmológicas que predicen  $D=1$ , como las de Fournier y de Jeans-Hoyle.

Tendría que ser posible reformular dichas teorías como corolarios de la gravitación newtoniana.

Así pues, la desviación del valor observado  $D \sim 1,23$  con respecto a 1 debería poderse atribuir a efectos no newtonianos (relativistas).

## 2. Dimensión y potenciales: Heurística

Como se dijo en el capítulo 10, Bentley y Newton sabían que el efecto del cielo en llamas de Kepler («paradoja de Olbers») tiene un homólogo en términos de potenciales gravitatorios. Supongamos que  $E=3$ , que la masa  $M(R)$  contenida en una esfera de radio  $R$  centrada en  $\omega$  es  $\propto R^D$  con  $D=3$ , y que el núcleo del potencial es el newtoniano  $R^{-F}$ , con  $F=1$ . La masa en una capa de espesor  $dR$  y radio  $R$  es  $\propto R^{D-1}$ , por lo que el potencial total en  $\omega$ , que viene dado por  $\propto \int R^{-F} R^{D-1} dR = \int R^{D-F} dR$ , diverge en el infinito. No se tiene divergencia en el infinito si  $D=3$  y  $F>1$ , cosa que implicaría un potencial no newtoniano. En los modelos de Fournier-Charlier se consiguen los mismos resultados con  $F=1$  y  $D<1$ .

La condición de convergencia en el infinito para la integral general  $\int R^{D-1-F} dR$  es evidentemente  $D<F$ . Y la condición de convergencia en el origen es  $D>F$ . De este argumento se tiene una relación biunívoca entre  $D$  y  $F$ , que en particular relaciona  $D=1$  con  $F=1$ .

## 3. Potencial y capacidad

Esta conexión fue reforzada por G. Pólya y G. Szegő, y Frostman (1935) le dio la forma definitiva. El principal avance consiste en que el argumento no se limita a un solo origen  $\omega$  y considera todos los puntos de un conjunto  $S$  (compacto). Consideremos una unidad de masa distribuida sobre  $S$  de modo que el dominio  $du$  contenga la masa  $d\mu(u)$ . En el punto  $t$ , el núcleo  $|u-t|^{-F}$  da la función potencial

$$\Pi(t) = \int |u-t|^{-F} d\mu(u).$$

De la Vallée Poussin empleó el concepto físico de capacidad electrostática para medir el «contenido» de un conjunto. La idea consiste en que si  $S$  tiene una capacidad  $C(S)$  grande, se puede barajar la masa total  $\mu$  de modo que el potencial máximo sea lo más pequeño posible.

*Definición.* Tómesese el supremo del potencial en todos los puntos  $t$ , luego el ínfimo con respecto a todas las distribuciones posibles de la unidad de masa sobre  $S$ , y finalmente defínase

$$C(S) = \{\inf[\sup, \Pi(t)]\}^{-1}.$$

Si se usa el núcleo  $1/r$ , el potencial mínimo es el que se logra en la práctica con cargas eléctricas en un conductor.

*Definición equivalente.*  $[C(S)]^{-1}$  es el ínfimo, entre todas las distribuciones de masa soportadas por  $S$ , de la energía definida por la integral doble

$$\iint |t-u|^{-F} d\mu(u) d\mu(t).$$

#### 4. La $D$ como dimensión de Frostman

Hay una relación simple entre  $C(S)$  y  $F$ . Cuando el exponente  $F$  empleado en la definición de  $C(S)$  es mayor que la  $D$  de Hausdorff-Besicovitch, la capacidad  $C(S)$  es nula, lo que significa que incluso la distribución de masa sobre  $S$  «más eficiente» da un potencial que se hace infinito en algún lugar. Por otra parte, si  $F$  es menor que  $D$ , la capacidad de  $S$  es positiva. Así pues, la dimensión de Hausdorff-Besicovitch también es una dimensión de capacidad en el sentido de Pólya y Szegö. Esta identidad está demostrada con toda generalidad en Frostman (1935).

Los detalles de la relación entre la medida de capacidad y la medida de Hausdorff en dimensión  $D$  son complicados; véase Taylor (1961).

#### 5. Dimensión «anómala»

Los físicos asocian los núcleos  $|u|^{-F}$ , con  $F \neq E-2$ , a espacios con la dimensión euclídea «anómala»  $2-F$ . (No creo que este uso pretenda implicar ninguna generalización efectiva de  $E$  a reales positivos no enteros.) Si se tienen en cuenta (a) la conexión entre  $D$  y  $F$  (Frostman) y (b) el papel de  $D$  en la descripción de los cúmulos de galaxias (establecida en el capítulo 10 de este ensayo), la terminología de dimensión anómala lleva a las afirmaciones siguientes: una dimensión fractal  $D=1$  para las galaxias no es anómala, pero la dimensión fractal observada  $D \sim 1,23$  parece implicar la inmersión en un espacio de dimensión anómala.

## CAMBIO DE ESCALA Y TRUNCACION

La distribución hiperbólica es la única distribución tal que la variable truncada y cambiada de escala « $U/u_0$ , sabiendo que  $U/u_0 > 1$ » obedece a una distribución independiente de  $u_0$ . Esta propiedad es la base de la conexión entre la distribución hiperbólica y los escalantes.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos una distribución de partida  $P(u)$ , con la v. a. cambiada de escala y truncada  $W = U/u_0$  que obedece a la distribución condicional habitual  $P(wu_0)/P(u_0)$ . Queremos que esta distribución condicional sea la misma para  $u_0 = h'$  y para  $u_0 = h''$ . Escribamos  $v' = \log h'$  y  $v'' = \log h''$ , y consideremos  $R = \log P(u)$  como función de  $v = \log u$ . La identidad que deseamos  $P(uh')/P(h') = P(uh'')/P(h'')$  implica que  $R(v' + v) - R(v') = R(v'' + v) - R(v'')$  para cualquier valor de  $v, v'$  y  $v''$ . Esto requiere que  $R$  dependa linealmente de  $v$ .

## LA DIMENSION DE SEMEJANZA: SUS PELIGROS

Ciertos conjuntos abiertos (que no contienen sus puntos límite) presentan una discrepancia seria entre sus dimensiones.

El conjunto de los extremos de las tremas del conjunto de Cantor es autosemejante, con las mismas  $N$  y  $r$  que el propio polvo de Cantor, y por tanto tiene la misma dimensión de semejanza. Pero es numerable, con lo que su dimensión de Hausdorff-Besicovitch es 0. Si a este polvo se le añaden los puntos límite, se obtiene de nuevo el polvo de Cantor y desaparece la discrepancia «en beneficio» de la dimensión de semejanza, que es la característica más importante de este conjunto.

Un segundo ejemplo muy simple, al que denomino conjunto de Besicovitch, se estudia en el apartado «Fractales no lagunares», 3.

## ESTACIONARIEDAD (GRADOS DE)

En el empleo científico de palabras del léxico corriente se combinan (a) diversos significados intuitivos, que dependen del usuario, y (b) definiciones formales, que seleccionan un significado especial y lo encuadran en un marco matemático. Los términos *estacionario* y *ergódico* son de los pocos sobre los que los matemáticos están de acuerdo en cuanto a significado. Pero mi experiencia me dice que los ingenieros, los físicos y los estadísticos prácticos tienen poco en cuenta la definición matemática, y su visión es más restringida. Y yo prefiero una vi-



sión más amplia todavía. Estos malentendidos o preferencias son reveladores.

LA DEFINICIÓN MATEMÁTICA. Un proceso  $X(t)$  es estacionario si la distribución de  $X(t)$  es independiente de  $t$ , la distribución conjunta de  $X(t_1 + \tau)$  y  $X(t_2 + \tau)$  es independiente de  $\tau$ , y lo mismo ocurre —para todo  $k$ — con las distribuciones conjuntas de  $X(t_1 + \tau) \dots X(t_k + \tau)$ .

PRIMERA CONCEPCIÓN ERRÓNEA (FILOSOFÍA). Es un lugar común que sólo pueden tener cabida en la ciencia aquellos fenómenos que se rigen por reglas invariables. La estacionariedad se malinterpreta a veces en este sentido: muchos piensan que, para que un proceso sea estacionario, basta con que las reglas que lo rigen no cambien con el tiempo. Pero este enunciado resumido no es válido. Por ejemplo, el incremento  $B(t_1 + \tau) - B(t_2 + \tau)$  del movimiento browniano es gaussiano con media y varianza independientes de  $\tau$ . Esta regla, así como la regla que define el conjunto de ceros del movimiento browniano, es independiente de  $\tau$ . Sin embargo, la estacionariedad se refiere específicamente a las reglas que gobiernan los valores del proceso en sí. Y para el movimiento browniano estas reglas *no son* independientes del tiempo.

SEGUNDA CONCEPCIÓN ERRÓNEA (ESTADÍSTICOS PRÁCTICOS). Muchas técnicas (y muchos programas de ordenador envasados) que se anuncian como «análisis de series temporales estacionarias» tienen un alcance muchísimo más limitado de lo que se desprendería de esta etiqueta. Ello es inevitable, pues la estacionariedad matemática es un concepto demasiado general para que una sola técnica pueda valer en todos los casos. Debido a ello, los estadísticos promueven entre su clientela la opinión de que el concepto de «serie temporal estacionaria» se reduce a los conceptos mucho más restringidos que las técnicas corrientes pueden manejar. Y, aun en el caso de que se tomen la molestia de comprobar la «solidez» de sus técnicas, sólo contemplan desviaciones mínimas de la hipótesis más simple, y no consideran las desviaciones más drásticas permitidas por la estacionariedad.

TERCERA CONCEPCIÓN ERRÓNEA (INGENIEROS Y FÍSICOS). Muchos investigadores creen (debido en parte a la concepción errónea anterior) que la estacionariedad afirma que los procesos de la muestra «pueden moverse arriba y abajo, pero manteniéndose en cierto modo estadísticamente igual». Esta visión resumida era válida en un estadio informal anterior, pero ahora tampoco lo es. La definición matemática se refiere a las reglas generatrices, no a los objetos generados por ellas. Cuando los matemáticos encontraron por primera vez procesos estacionarios con muestras sumamente erráticas, se maravillaron de que la noción de estacionariedad pudiera abarcar una variedad tan grande de comportamientos inespera-

dos. Desafortunadamente, esta es una clase de comportamientos de la que muchos prácticos dicen que no es estacionaria.

UNA ZONA GRIS. No cabe duda de que la frontera entre los procesos estacionarios y los no estacionarios cae en algún lugar entre el ruido gaussiano blanco y el movimiento browniano, pero lo que no está claro es su localización exacta.

LOS RUIDOS ESCALANTES COMO COTA. Los ruidos gaussianos escalantes del capítulo 27 nos dan una acotación más fina que la anterior, al ser su densidad espectral de la forma  $f^{-B}$  con  $B \geq 0$ . Para el ruido gaussiano blanco se tiene  $B=0$ ; para el movimiento browniano  $B=2$  y, para diversos fines, la frontera entre los procesos estacionarios y los no estacionarios se sitúa en distintos valores de  $B$ .

Tratando de evitar la «catástrofe infrarroja», los matemáticos sitúan la frontera en  $B=1$ , pues  $\int_0^1 f^{-B} df < \infty$  equivale a  $B < 1$ .

Pero el comportamiento de una muestra de ruido escalante varía de modo continuo en  $B=1$ . En realidad, el cambio entre  $B=0$  y  $B>0$  es más visible, tanto que frente a una muestra *cualquiera* con  $B>0$  los especialistas suelen decir que no es estacionaria. Y suelen ser consecuentes, afirmando que los datos que tienen el aspecto de una muestra con  $B>0$  deben representarse con un modelo no estacionario. Por otra parte, pienso que si se excluye  $B>1$  la definición de estacionario no es suficientemente general en muchos casos.

PROCESOS ESPORÁDICOS CONDICIONALMENTE ESTACIONARIOS. Por ejemplo, la teoría de ruidos fractales (capítulo 8) sugiere que el proceso de los ceros brownianos es estacionario en un sentido débil. En efecto, supongamos que hay al menos un cero entre  $t=0$  y  $t=T$ . El resultado es un proceso aleatorio que depende del parámetro adicional extrínseco  $T$ . Yo observé que la distribución conjunta de los valores  $X(\tau + t_m)$  es independiente de  $t$  siempre que los instantes  $\tau + t_m$  caigan entre 0 y  $T$ . Así pues, el proceso no estacionario de los ceros brownianos contiene en forma latente toda una familia de procesos aleatorios que satisfacen, todos ellos, una forma *condicional* de la estacionariedad, cosa que a veces es suficiente.

Los procesos de esta familia están tan íntimamente relacionados entre sí que Mandelbrot (1967b) argumenta que habría que considerarlos como un solo proceso estocástico *generalizado*, que se llamaría *proceso esporádico*. Comparado con un proceso estocástico estándar, la novedad es que la medida de todo el espacio de muestra  $\Omega$  es  $\mu(\Omega) = \infty$ . Por lo cual no puede ser normalizado a  $\mu(\Omega) = 1$ . La aceptación de  $\mu(\Omega) = \infty$  para *variables* aleatorias se remonta al menos a Rényi (1955). Para evitar que  $\mu(\Omega) = \infty$  lleve a una catástrofe, la teoría de variables generalizadas su-

pone que nunca son observadas directamente, sino sólo condicionadas a algún suceso  $C$  tal que  $0 < \mu(C) < \infty$ .

Aunque las variables aleatorias de Rény tienen una importancia limitada, las funciones esporádicas son importantes. En particular, permiten que Mandelbrot (1967b) conjure algunos casos de catástrofe infrarroja, justificando así ciertos ruidos escalantes con  $B \in [1, 2]$ .

ERGODICIDAD, MEZCLA. Un segundo concepto que está sujeto a interpretaciones distintas es el de ergodicidad. En la literatura matemática, la ergodicidad se divide en múltiples formas de *mezcla*. Algunos procesos presentan *mezcla fuerte* y otros *mezcla débil*. Tal como se presentan dichos procesos en los libros de matemáticas, parece que la distinción no tenga apenas nada que ver con el estudio de la naturaleza. Pero en realidad sí tiene, ¡y con creces! En particular, los ruidos escalantes con  $0 < B < 1$  presentan *mezcla débil* pero no fuerte.

CUARTA CONCEPCIÓN ERRÓNEA (RELATIVA A LA VALIDEZ DE LA CONVERGENCIA LÍMITE DE  $B(t)$ ). Generalmente se piensa que decir que  $X(t)$  es estacionario es lo mismo que decir que su suma acumulada  $X^*(t) = \sum_{s=0}^t X(s)$  se puede normalizar de modo que converja al movimiento browniano. Los matemáticos saben desde hace mucho que esta creencia es injustificada (Grenander y Rossenblatt, 1957). Y en muchos de los casos considerados en esta obra intervienen funciones  $X(t)$  que contradicen dicha creencia, ya sea por el efecto Noé ( $\langle X^2(t) \rangle = \infty$ ) o por el efecto José (dependencia infinita, como en los ruidos  $f^{-B}$  con  $B > 0$ ). Sin embargo, casi todos mis casos han sido desechados a priori en algún momento por algún «experto» que sostenía que los fenómenos de base eran manifiestamente no estacionarios, con lo que mis modelos estacionarios están condenados. Este argumento es falso, pero psicológicamente importante.

CONCLUSIÓN. La frontera entre los procesos matemáticamente estacionarios y los no estacionarios fomenta discusiones que están por encima de la semántica. En la práctica, hay procesos con un pie a cada lado de dicha frontera, que no son intuitivamente estacionarios, pero pueden tener interés científico. Resultan además necesarios en la totalidad del presente ensayo y en el resto de mi trabajo de investigación.

CUESTIONES DE VOCABULARIO: «LAPLACIANO», «BENIGNO» O «CALMADO» CONTRA «ERRANTE». De nuevo se hace indispensable recurrir a nuevas voces. Permítaseme proponer *calmado* como (a) sinónimo de lo que los matemáticos llaman «estacionario y tal que  $X^*(t)$  converge a  $B(t)$ », y (b) una palabra que expresa la idea intuitiva de lo que ciertos especialistas tienden a llamar «estacionariedad». Los antónimos alternativos serían *inquieto* y *errante*.

En un artículo anterior (Mandelbrot, 1973f) se usan (en vez de *cal-*

*mado*) las voces *laplaciano* y *benigno*. Esta última significa «inocuo, fácilmente controlable»; y es aplicable a esta clase de azar del que uno puede confiar en que *no* producirá ninguna de las configuraciones variadas y disparatadas que hacen el azar errante tanto más difícil, y tanto más interesante.

## ANALISIS ESTADISTICO USANDO R/S

Dos supuestos relativos a las series temporales se daban por sentados en estadística práctica: que  $\langle X^2 \rangle < \infty$ , y que  $X$  presenta dependencia a corto plazo. Sin embargo, he demostrado (capítulo 37) que, a menudo, los registros empíricos con colas largas se interpretan mejor aceptando que  $\langle X^2 \rangle = \infty$ . Y la primera vez que se planteó la cuestión de si un registro es débilmente dependiente (corto plazo) o fuertemente dependiente (largo plazo) fue cuando introduce la dependencia a largo plazo para interpretar el fenómeno de Hurst (capítulo 27).

La mezcla de colas largas y dependencia a muy largo plazo podría haber sido estadísticamente inmanejable, debido a que las técnicas estándar de segundo orden encaminadas a la dependencia (correlación, espectros) presuponen invariablemente  $\langle X^2 \rangle < \infty$ . Aunque hay una alternativa.

Uno puede olvidarse de la distribución de  $X(t)$  y abordar la dependencia a largo plazo por medio del análisis del recorrido estandarizado, también llamado análisis *R/S*. Esta técnica estadística, introducida por Mandelbrot y Wallis (1969c), y cuyo fundamento matemático se presenta en Mandelbrot (1975w), se refiere a la distinción entre los plazos corto y muy largo. La constante que introduce se denota por  $J$  y se llama *Coficiente de Hurst* o *Exponente R/S*, y puede tomar cualquier valor entre 0 y 1.

El significado de  $J$  puede ser descrito aun sin haberlo definido. El valor especial  $J = 1/2$  es característico de las funciones aleatorias independientes, de las markovianas y de otras con dependencia a corto plazo. Por tanto, la ausencia de dependencia estadística no periódica a muy largo plazo en registros empíricos o en funciones muestrales puede investigarse *comprobando* si la hipótesis  $J = 1/2$  es estadísticamente aceptable. De no ser así, la intensidad de la dependencia a muy largo plazo viene cuantificada por  $J - 1/2$ , cuyo valor puede *ser estimado* a partir de los datos.

La virtud principal de este método de ataque es que el exponente  $J$  es *robusto* con respecto a la distribución marginal. Es decir, además de ser útil cuando los datos de fondo o las funciones aleatorias son cuasi gaussianos, también lo es cuando  $X(t)$  está tan lejos de ser gaussiana que

$\langle X(t)^2 \rangle$  diverge, en cuyo caso ninguna de las técnicas de segundo orden sirve.

DEFINICIÓN DEL  $R/S$  ESTADÍSTICO. Para tiempo  $t$  continuo se define  $X^*(t) = \int_0^t X(u) du$ ,  $X^{2*}(t) = \int_0^t X^2(u) du$ , y  $X^{*2} = (X^*)^2$ . Para tiempos discretos  $i$ , se define  $X^*(0) = 0$ ,  $X^*(t) = \sum_{i=1}^{[t]} X(i)$ , donde  $[t]$  es la parte entera de  $t$ . Para cada  $d > 0$  (demora) definimos el recorrido ajustado de  $X^*(t)$  en el intervalo de tiempo entre 0 y  $d$ , como

$$R(d) = \max_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - (u/d)X^*(d)\} \\ - \min_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - (u/d)X^*(d)\}$$

Luego evaluamos la *desviación típica de la muestra* de  $X(t)$ ,

$$S^2(d) = X^{2*}(d)/d - X^2(d)/d^2.$$

La expresión  $Q(d) = R(d)/S(d)$  es el *estadístico R/S* o *recorrido autoajustado* y *autoestandarizado* de  $X^*(t)$ .

DEFINICIÓN DEL EXPONENTE  $R/S$ ,  $J$ . Supongamos que existe un número real  $J$  tal que, para  $d \rightarrow \infty$ ,  $(1/d^J)[R(d)/S(d)]$  converge en distribución a una variable aleatoria límite no degenerada. Mandelbrot (1975w) demuestra que esto implica que  $0 < J \leq 1$ . Se dice entonces que la función  $X$  tiene  $J$  como *exponente R/S* con un *prefactor R/S* constante.

Supongamos, con más generalidad, que el cociente  $[1/d^J L(d)][R(d)/S(d)]$  converge en distribución a una variable aleatoria no degenerada, donde  $L(d)$  denota una función de variación lenta en el infinito, es decir, una función que satisface  $L(td)/L(d) \rightarrow 1$ , para  $d \rightarrow \infty$  y para todo  $t > 0$ . El ejemplo más simple es  $L(d) = \log d$ . Se dice entonces que la función  $X$  tiene  $J$  como exponente  $R/S$  y  $L(d)$  como prefactor  $R/S$ .

PRINCIPALES RESULTADOS (MANDELBROT 1975w). Cuando  $X(t)$  es un ruido gaussiano blanco, se obtiene  $J = 1/2$  con prefactor constante. Preciando más,  $e^{-\delta J} R(e^\delta)/S(e^\delta)$  es una función aleatoria estacionaria de  $\delta = \log d$ .

En general,  $J = 1/2$  siempre que  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$  y que  $a^{-1/2} X^*(at)$  cambiado de escala converja débilmente a  $B(t)$  para  $a \rightarrow \infty$ .

Cuando  $X(t)$  es el ruido gaussiano fraccionario discreto, esto es, la sucesión de incrementos de  $B_H(t)$  (véase la pág. 353), se encuentra  $J = H$ , con  $H \in ]0, 1[$ .

En general, para obtener  $J = H \neq 1/2$  con prefactor constante, basta con que  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$  y que  $X^*(t)$  sea atraído por  $B_H(t)$  y satisfaga  $\langle X^*(t)^2 \rangle \sim t^{2H}$ .

Más en general aún,  $J=H \neq 1/2$  con prefactor  $L(d)$  prevalece si  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$ , y  $X^*(t)$  es atraído por  $B_H(t)$  y satisface  $\langle X^*(t)^2 \rangle \sim t^{2H} L(t)$ .

Finalmente,  $J \neq 1/2$  cuando  $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$ , y  $X^*(t)$  es atraído por una función aleatoria escalante no gaussiana de exponente  $H=J$ . En Taquu (1975, 1979a, b) se dan algunos ejemplos.

Por otra parte, cuando  $X$  es un ruido blanco estable según Lévy, con lo que  $\langle X^2 \rangle = \infty$ , se encuentra  $J=1/2$ .

Cuando  $X$  se hace estacionaria por derivación (o por diferenciación), se encuentra que  $J=1$ .

#### FUNCIONES DE WEIERSTRASS Y PARIENTES PROXIMOS. CATASTROFES INFRARROJA Y ULTRAVIOLETA

La función compleja de Weierstrass es la suma de la serie

$$W_0(t) = (1-w^2)^{-1/2} \sum_0^\infty w^n \exp(2\pi i b^n t)$$

donde  $b$  es un número real  $>1$ , y  $w$  se escribe unas veces como  $w=b^H$ , con  $0 < H < 1$ , y otras como  $w=b^{D-2}$ , con  $1 < D < 2$ . Las partes real e imaginaria de  $W_0(t)$  se conocen como funciones de Weierstrass en coseno y en seno, respectivamente.

La función  $W_0(t)$  es continua, pero no es diferenciable en ningún punto. Ahora bien, su extensión formal a  $D < 1$  es continua y diferenciable.

Además de la  $W_0(t)$ , en este apartado discutiremos otras variantes que me pareció necesario introducir, debido al nuevo papel que la teoría de fractales asigna a  $W_0(t)$ .

ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE  $W_0(t)$ . El término «espectro» está sobrecargado de significados. Por *espectro de frecuencias* se entiende el conjunto de valores admisibles de la frecuencia  $f$ , independientemente de las correspondientes amplitudes de los términos.

El espectro de frecuencias de una función periódica es la sucesión de los números enteros positivos. El espectro de una función browniana es  $R^+$ . Y el de la función de Weierstrass es la sucesión discreta  $b^n$  desde  $n=1$  hasta  $n=\infty$ .

ESPECTRO DE ENERGÍAS DE  $W_0(t)$ . Por *espectro de energía* se entiende el conjunto de valores admisibles de  $f$ , junto con las energías correspondientes (amplitudes al cuadrado). Para cada frecuencia de la forma  $b^n$ ,  $W_0(t)$  tiene una línea espectral de energía  $(1-w^2)^{-1} w^{2n}$ . Por lo que la energía total correspondiente a las frecuencias  $f \geq b^n$  es convergente y  $\propto w^{2n} = b^{-2nH} = f^{-2H}$ .

COMPARACIÓN CON EL MOVIMIENTO BROWNIANO FRACCIONARIO. La energía acumulada es también  $f^{-2H}$  en varios casos encontrados anteriormente. (A) Las funciones aleatorias periódicas de Fourier-Brown-Wiener, cuyas frecuencias admisibles son de la forma  $f=n$ , y cuyos coeficientes de Fourier son  $n^{H-1/2}$ . (B) Los procesos aleatorios con una densidad espectral continua de población  $\propto 2Hf^{-2H-1}$ . Se trata de las funciones brownianas fraccionarias  $B_H(t)$  del capítulo 27. Por ejemplo, para el movimiento browniano ordinario,  $H=1/2$ , la densidad espectral es  $f^{-2}$ , y se obtiene un espectro acumulado de Weierstrass  $\propto f^{-1}$ . Una diferencia esencial es que, mientras el espectro browniano es absolutamente continuo, los espectros de Fourier-Brown-Wiener y de Weierstrass son discretos.

NO DIFERENCIABILIDAD. Para un físico acostumbrado a manejar espectros, las condiciones de Hardy son intuitivamente obvias. Aplicando la regla de que la derivada de una función se obtiene multiplicando su  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier por  $k$ , el físico encuentra que para el coeficiente de Fourier con  $k=b^n$  de la derivada formal de  $W_0(t)$ , el cuadrado de la amplitud vale  $(1-w^2)^{-1}w^2nb^{2n}$ . Como la energía acumulada en las frecuencias  $\geq b^n$  es infinita, el físico reconoce que  $W_0(t)$  no está definida.

Es interesante notar que, buscando un contraejemplo de la diferenciabilidad, Riemann encontró  $R(t)=\sum_1^\infty n^{-2}\sin(2\pi n^2t)$ , cuya energía total para las frecuencias  $\geq f=n^2$  es  $\propto n^{-3}=f^{-2H}$ , con  $H=3/4$ . Así pues, el mismo argumento heurístico sugiere que  $R'(t)$  no está definida, con lo que  $R(t)$  no es diferenciable. Esta conclusión es «casi» correcta, aunque  $R'(t)$  existe para ciertos valores de  $t$  (Gerver 1970, Smith 1972).

DIVERGENCIA/CATÁSTROFE ULTRAVIOLETA. El término «catástrofe» apareció por primera vez en la física hacia 1900, después de que Rayleigh y Jeans propusieran una teoría de la radiación del cuerpo negro que predice que la banda de frecuencias de anchura  $df$  en la proximidad de  $f$  contiene una energía proporcional a  $f^{-4}$ . El hecho de que ello implique que la energía total para las altas frecuencias es infinita es catastrófico para la teoría. Como los problemas vienen de las frecuencias más allá del ultravioleta, se hablaba de una *catástrofe ultravioleta* (UV).

Todo el mundo sabe que Planck construyó su teoría cuántica sobre las ruinas que dejó la catástrofe UV de la radiación.

APARTE HISTÓRICO. Nótese (alguien más *debe* haberlo señalado ya, aunque no tengo ninguna referencia de ello) que la misma divergencia mató la vieja física (†1900) y la vieja matemática (†1875) que pensaban que las funciones continuas deben ser diferenciables. La reacción de los físicos fue cambiar las reglas del juego, y la de los matemáticos fue aprender a vivir con las funciones no diferenciables y sus diferenciales

formales. (Las últimas son los únicos ejemplos de distribuciones de Schwartz, de uso frecuente en la física.)

BÚSQUEDA DE UN ESPECTRO DISCRETO ESCALANTE. DIVERGENCIA INFRARROJA. En tanto que el espectro de frecuencias de la función browniana es continuo, escalante y llega hasta  $f=0$ , el de la función de Weierstrass para el mismo  $H$  es discreto y está acotado inferiormente por  $f=1$ . La presencia de esta cota inferior se debe solamente al hecho de que la  $b$  original de Weierstrass era un entero y la función era periódica. Ahora nos gustaría prescindir de este hecho, y el procedimiento más fácil es dejar que  $n$  vaya de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Para que la propiedad escalante valga también para el espectro de energía, basta con asignar la amplitud  $w^n$  a la componente de frecuencia  $b^n$ .

Desgraciadamente, la serie que resulta es divergente, debido a las componentes de bajas frecuencias. Este defecto se conoce como *divergencia* (o «catástrofe») *infrarroja* (IR). Sin embargo, hay que afrontar esta divergencia, pues la cota inferior  $f=1$  está reñida con la auto semejanza que, por otra parte, encarna el espectro de energías  $f^{-2H}$ .

FUNCIÓN DE WEIERSTRASS, MODIFICADA PARA QUE SEA AUTOAFIN CON RESPECTO AL TIEMPO FOCAL  $T=0$ . Para extender el espectro de frecuencias de Weierstrass  $f^{-2H}$  hasta  $f=0$  sin consecuencias fatales, lo más simple es formar *primero* la expresión  $W_0(0) - W_0(t)$ , y luego dejar que  $n$  vaya de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Los términos añadidos correspondientes a  $n < 0$  convergen si  $0 < H < 1$ , y su suma es continua y diferenciable. La función así modificada,

$$W_1(t) - W_1(0) = (1 - w^2)^{-1/2} \sum_{-\infty}^{\infty} w^n [\exp(2\pi i b^n t) - 1],$$

es todavía continua, pero no es diferenciable en ningún punto. Además es escalante, en el sentido de que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} w^{-m} w^{n+m} [\exp(2\pi i b^{n+m} t) - 1] = w^{-m} [W_1(t) - W_1(0)].$$

Así pues, la función  $w^m [W_1(b^m t) - W_1(0)]$  es independiente de  $m$ . O bien, si escribimos  $r = b^m$ ,  $r^{-H} [W_1(rt) - W_1(0)]$  es independiente de  $h$ . Esto es,  $W_1(r) - W_1(0)$  y sus partes real e imaginaria son autoafines con respecto a los  $r$  de la forma  $b^{-m}$  y al tiempo focal  $t=0$ .

Un estudio completo de las funciones de Weierstrass (modificadas)  $W_1(t)$ , con gráficos muy ilustrativos se puede encontrar en Berry y Lewis (1980).

FUNCIONES ALEATORIAS GAUSSIANAS CON UN ESPECTRO DE WEIERSTRASS GENERALIZADO. El siguiente paso hacia el realismo y la aplicabili-



dad se da al aleatorizar la función de Weierstrass generalizada. El método más simple e intrínseco consiste en multiplicar sus coeficientes de Fourier por factores gaussianos complejos e independientes, de media nula y varianza unidad. Las partes real e imaginaria del resultado merecen llamarse *funciones de Weierstrass-Gauss (modificadas)*. En cierto modo son funciones brownianas fraccionarias aproximadas. Cuando los valores de  $H$  coinciden, sus espectros son todo lo próximos que uno podría conseguir entre un espectro discreto y otro continuo. Además, el resultado de Orey (1970) y Marcus (1976) sigue siendo válido y demuestra que sus conjuntos de imagen constante tienen la misma dimensión fractal.

PROPIEDADES FRACTALES. Según un teorema de Love y Young (1937) y Besicovitch y Ursell (1937) (véase LIPSCHITZ...), el grafo de una función que, para todo  $x$ , satisface la condición de Lipschitz con exponente  $H$ , tiene una dimensión fractal comprendida entre 1 y  $2-H$ . Para la función browniana fraccionaria con el mismo espectro acumulado  $f^{-2H}$ , se sabe que la dimensión toma el máximo valor posible  $2-H=D$ . Mi conjetura es que lo mismo se puede decir de la curva de Weierstrass, y que la dimensión de su conjunto de ceros es  $1-H$ .

CONJUNTOS DE CEROS DE FUNCIONES AFINES. Las funciones de Rademacher son variantes cuadradas de las sinusoides  $\text{sen}(2\pi b^n t)$  en las que  $b=2$ . Si el seno es positivo (respectivamente, negativo o nulo), la función de Rademacher vale 1 (respectivamente,  $-1$  o  $0$ ) (Zygmund, 1959 I, pág. 202.) La generalización natural de la función de Weierstrass es una serie en la que el  $n$ -ésimo término es el producto de  $w^n$  por la  $n$ -ésima función de Rademacher. Aunque esta función es discontinua, su exponente espectral sigue siendo  $2H$ . Intuitivamente, el precedente del movimiento browniano fraccionario sugiere que los conjuntos de ceros de la función de Weierstrass-Rademacher tienen dimensión  $1-H$ . Beyer (1962) confirma este resultado, pero sólo si se da la condición de que  $1/H$  es entero.

Singh (1935) hace referencia a numerosas variantes de la función de Weierstrass. En algunos casos la  $D$  de los conjuntos de ceros es fácilmente calculable. Vale la pena echar una nueva mirada a este tema.



**XII**  
**De los hombres y las ideas**



Como prelude de este capítulo dedicado a apuntes biográficos, notemos que una vida interesante, digna de ser contada, rara vez es la recompensa (¿o quizá el castigo?) de quienes alimentaron la corriente principal del desarrollo de la ciencia. Tomemos como ejemplo a John William Strutt, tercer Barón Rayleigh. Un caudal continuo de éxitos le valieron el reconocimiento en casi todas las áreas de la ciencia. Sin embargo, con una sola excepción, su vida parece tranquilamente subordinada a su evolución como científico. Lo inesperado fue que, habiendo sido admitido en el Trinity College por derechos de nacimiento, al ser el primogénito de un hacendado lord, decidiera convertirse en un sabio.

La ciencia tiene su gran romántico en Evariste Galois, cuya historia entra dentro de los cánones trágicos de la corte francesa, pues combina en un solo día su eclosión como científico y su muerte en duelo. Pero la mayoría de vidas de científicos son como la de Rayleigh: apenas afectadas por el mayor desarraigo (como muestra A.S. Besicovitch), y a la larga casi predecibles, con excepción de las circunstancias ocasionalmente animadas de la revelación de su talento, y de su entrada en la corriente principal. El niño Carl Friedrich Gauss corrige la aritmética de su padre a la edad de tres años. El adolescente Srinivasa Ramanujan reinventa la matemática. Cuando se entera de que tiene que esperar un curso para poder entrar en una escuela de periodismo, Harlow Shapley escoge especialidad en una lista ordenada alfabéticamente. Se salta la arqueología porque no sabe qué significa esa palabra, entra en astronomía y encuentra su destino. Más atípica es la vida de Felix Hausdorff. Hasta los 35 años se dedica sobre todo a la filosofía, la poesía, a escribir y dirigir teatro, y otras tareas similares. Luego se dedica en serio a la matemática y pronto produce su obra maestra, Hausdorff (1914).

Los relatos cortados según el patrón típico son legión, pero las historias seleccionadas para este capítulo son enteramente distintas. El ingreso en la corriente principal es tardío, y en muchos casos incluso pós-

tumo. Persisten sentimientos intensos de pertenecer a otra época. El héroe es un solitario. Como ciertos pintores, podría decirse que es un *ingenuo* o un *visionario*, o mejor aún, un *inconformista*. Cuando cae el telón sobre el prólogo de su vida, por decisión propia o por casualidad, todavía no está catalogado.

El trabajo de los inconformistas presenta a menudo un frescor peculiar. Incluso los que no llegan a alcanzar la grandeza comparten con los gigantes un estilo marcadamente personal. La clave parece ser el tiempo dedicado. En palabras de la hija de D'Arcy Thompson, hablando de su libro *On Growth and Form* (Thompson 1917), «es una especulación preguntarse si [un trabajo como ese] se habría escrito nunca de no haber pasado [su autor] treinta años de su vida en la soledad». En efecto, tenía 57 años cuando la publicó, y muchos otros inconformistas dan lo mejor de sí muy tarde: en su caso el cliché de que la ciencia suele ser un juego de jóvenes no es cierto en absoluto. Estas historias me parecen atractivas y quiero compartir las emociones que evocan algunas de ellas.

Como inconformistas que son, nuestros héroes son muy distintos entre sí. Paul Lévy vivió lo bastante para dejar una huella profunda en su especialidad científica, pero sus admiradores (y yo soy uno de ellos) piensan que merece, por así decirlo, auténtica fama. (Lo mismo se puede decir de D'Arcy Wentworth Thompson, que no estaría fuera de lugar en esta compañía, pero su vida está ampliamente documentada en la edición abreviada de su libro, Thompson 1962.) Lo mismo puede decirse de Lewis F. Richardson. Pero la historia de Bachelier es más triste; nadie repasó nunca sus libros ni sus artículos, y fracasó como eterno aspirante hasta que toda su obra fue repetida por otros. Hurst tuvo mejor suerte, y su historia es fascinante. Por último, Fournier d'Albe y Zipf merecen citas perdurables. Así pues, cada una de las historias de este capítulo arroja luz sobre la psicología de una especie peculiar de mente poderosa.

En los casos en que existan biografías estándar, no las repetiré a menos que lo crea necesario. El gran *Dictionary of Scientific Biography* (Gillispie, 1970-1976) incluye bibliografías. Sus omisiones son también significativas.

### *Louis Bachelier (1870-1946)*

Vale la pena conocer la historia de los inicios de la teoría del movimiento browniano y la trataremos en el siguiente capítulo. Sin embargo, en este contexto la física podría haber sido precedida por la matemática, y también (un orden de acontecimientos de lo más inusual) por la economía.

Lo cierto es que una parte verdaderamente increíble de los resultados de la teoría matemática del movimiento browniano habían sido descritos con todo detalle cinco años antes de Einstein. El precursor fue Louis Bachelier (*Dictionary of Scientific Biography*, I, 366-367).

Nuestra historia se centra en una tesis doctoral en matemáticas, defendida en París el 19 de marzo de 1900. Sesenta años después recibió el raro cumplido de ser traducida al inglés, con muchísimos comentarios. Sin embargo, empezó mal: el tribunal que la examinó no quedó demasiado impresionando con ella y le dio la calificación poco usual y casi insultante de *mention honorable* en una época en la que nadie en Francia presentaba su tesis a menos que previera una vacante académica y estuviera seguro de obtener la *mention très honorable* que se exigía.

No es, pues, sorprendente que esta tesis no tuviera la menor influencia sobre el trabajo de nadie más. Bachelier, a su vez, no fue influido por nada escrito en este siglo, aunque permaneció activo y publicó varios artículos (en las mejores revistas) llenos de un sinfín de manipulaciones algebraicas. Además, su obra divulgativa (Bachelier, 1914) fue reimpressa varias veces y aún hoy merece la pena leerla. No es para recomendarla a todos sin distinción, pues el tema ha sufrido cambios profundos, y tampoco está claro si sus frases cortas resumen cosas establecidas o destacan problemas todavía inexplorados. El efecto acumulado de tal ambigüedad es más bien desconcertante. No fue hasta muy tarde, después de varios fracasos, que Bachelier consiguió una plaza de profesor en la pequeña Universidad de Besançon.

A la vista de su lenta y mediocre carrera y de lo tenue del rastro personal que dejó (a pesar de lo diligente de mi búsqueda, sólo he descubierto algunos raros fragmentos de recopilaciones de estudiantes y colegas, y ni una sola foto), la fama póstuma de su tesis le convierte en una personalidad casi romántica. ¿A qué se debe este contraste tan brusco?

Para empezar, su vida podría haber sido más brillante de no haber sido por un error matemático. En Lévy (1970, págs. 97-98) se explica esa historia y se dan más detalles en una carta que me escribió Paul Lévy el 25 de enero de 1964:

«Oí hablar de él por vez primera después de que apareciera mi *Calcul des Probabilités*, esto es, hacia 1928. Se presentó a una plaza de profesor en la Universidad de Dijon. Gevrey, que era profesor allí, vino a preguntarme mi opinión sobre un trabajo que Bachelier publicó en 1913 (*Annales de l'Ecole Normale*). En él había definido la función de Wiener (anticipándose a éste) del modo siguiente: en cada uno de los intervalos  $[n\tau, (n+1)\tau]$  consideró una función  $X(t|\tau)$  con derivada constante e igual a  $+\nu$  o  $-\nu$ ,

ambos valores con la misma probabilidad. Pasó luego al límite ( $v$  constante y  $\tau \rightarrow 0$ ), y sostuvo que así obtenía una función propia  $X(t)$ . Gevrey estaba escandalizado por este error. Estuve de acuerdo con él y se lo confirmé en una carta que leyó a sus colegas en Dijon. Dieron bola negra a Bachelier. Se enteró del papel que había tenido yo y me pidió una explicación; yo se la dí, pero no le convencí de su error. No diré nada más acerca de las consecuencias inmediatas de este incidente.

»Lo había olvidado ya cuando, en 1931, leyendo el artículo fundamental de Kolmogorov, llegué a “der Bacheliers Fall”. Busqué los trabajos de Bachelier, y vi que este error, que se repite en todas partes, no le impide obtener resultados que hubieran sido correctos sólo con que, en vez de tomar  $v = \text{constante}$ , hubiera escrito  $v = c\tau^{-1/2}$ , y que, antes que Einstein y Wiener, había encontrado algunas propiedades importantes de la llamada función de Wiener o de Wiener-Lévy, a saber, la ecuación de difusión y la distribución de  $\max_{0 \leq \tau \leq t} X(t)$ .

»Nos reconciamos. Le había escrito lamentándome de que una primera impresión, producida por un simple error inicial, me hubiera impedido seguir leyendo un trabajo que contenía tantas ideas interesantes. Me contestó en una larga carta en la que manifestaba un gran entusiasmo por la investigación».

Es bastante trágico que Lévy hubiera interpretado este papel, pues, como veremos muy pronto, su propia carrera estuvo a punto de fracasar también porque sus artículos no eran lo bastante rigurosos.

Llegamos ahora a la segunda razón, y más seria, de los problemas de la carrera de Bachelier. Nos la revela el título de su tesis, que no he mencionado aún (adrede): «Teoría matemática de la especulación». El título no se refiere ni mucho menos a la especulación (filosófica) acerca de la naturaleza del azar, sino a la especulación (avarienta) acerca de las alzas y caídas del mercado de bonos del estado consolidados (*la rente*). La función  $X(t)$  citada por Lévy representaba el precio de estos bonos en el tiempo  $t$ .

Las dificultades profesionales que Bachelier iba a padecer a consecuencia de ello se prefiguraban ya en el comentario delicadamente atenuado de Henri Poincaré, que escribió el informe oficial de esta tesis: «El tema está un tanto alejado de lo que acostumbran a tratar nuestros candidatos». Se podría aducir que Bachelier debería haber evitado buscar el juicio de matemáticos poco dispuestos (la idea de asignar temas de tesis era totalmente ajena a los profesores franceses de aquella época), pero no tenía otra opción: su título inferior era en matemáticas y, aunque Poincaré hizo poca investigación en teoría de la probabilidad, tenía a su cargo dicha asignatura.



La tragedia de Bachelier fue ser un hombre del pasado y del futuro pero no de su presente. Fue un hombre del pasado porque trabajó en las raíces históricas de la teoría de la probabilidad: el estudio del juego. Optó por introducir los procesos estocásticos temporales continuos por medio de la forma continua del juego, *La Bourse*. Fue un hombre del futuro, tanto en matemáticas (como atestigua la carta anterior de Lévy) como en economía, donde se le reconoce como el creador del concepto probabilístico de «martingala» (ésta es la formulación propia del concepto de *juego limpio* o de *mercado eficiente*, véase el capítulo 37), y se avanzó mucho a su tiempo al comprender muchos aspectos concretos de la incertidumbre referida a la economía. Debe su mayor fama a la idea de que los precios siguen el proceso del movimiento browniano. Por desgracia, ninguna comunidad científica organizada de su tiempo estaba en condiciones de entenderle ni de acogerle en su seno. Para hacer que aumentara la aceptación de sus ideas, le habría hecho falta una gran destreza política, de la que evidentemente carecía.

Para sobrevivir y seguir adelante con su producción científica bajo estas circunstancias, Bachelier tenía que estar muy convencido de la importancia de su trabajo. En particular, sabía muy bien que él fue el inventor de la teoría de la difusión de la probabilidad. En un *Curriculum* no publicado que escribió en 1921 (al presentarse a un puesto académico no especificado), afirmaba que su principal contribución intelectual había sido suministrar «imágenes tomadas de la naturaleza, como la teoría de la radiación de la probabilidad, en las que compara una abstracción con la energía —una relación extraña e inesperada que será el punto de partida de grandes avances— Teniendo esta idea en mente, Henri Poincaré escribió: “Mr. Bachelier ha dado muestras de tener una mente clara y precisa”».

La frase anterior está tomada del ya citado informe sobre la tesis, que contiene otros fragmentos dignos de leer: «El modo en que el candidato obtiene la ley de Gauss es muy original y tanto más interesante cuanto que el mismo razonamiento, con pocos cambios, podría extenderse a la teoría de errores. Lo desarrolla en un capítulo que a primera vista podría parecer extraño, pues lo titula “radiación de probabilidad”. En realidad, el autor recurre a una comparación con la teoría analítica de la propagación del calor. Si se reflexiona un poco sobre ello se ve que la analogía es real y la comparación legítima. El razonamiento de Fourier es aplicable casi sin cambios a este problema, tan distinto de aquél para el que fue creado. Es lástima que [el autor] no desarrolle más esta parte de su tesis».

Poincaré había visto, por tanto, que Bachelier había llegado hasta el umbral de una teoría general de la difusión. Sin embargo, Poincaré era

famoso por su mala memoria. Pocos años después, tomó parte activa en una discusión relativa a la difusión browniana, pero ya había olvidado la tesis de Bachelier de 1900.

Vale la pena resumir también otros comentarios del *Curriculum* de Bachelier: «1906: *Théorie des probabilités continues*. Esta teoría no tiene nada que ver con la teoría de la probabilidad geométrica, cuyo ámbito es muy limitado. Es una ciencia cuyo nivel de dificultad y generalidad va más allá del cálculo de probabilidades. La concepción, el método, el análisis, todo es nuevo en ella. 1913: *Probabilités cinématiques et dynamiques*. Estas aplicaciones de la probabilidad a la mecánica son absolutamente originales del autor. No tomó de nadie la idea inicial, ni tampoco se ha realizado nunca un trabajo del mismo tipo. La concepción, el método, los resultados, todo es nuevo.»

A los desventurados autores de los *Curricula* académicos no se les pide que sean modestos, y hasta cierto punto Louis Bachelier exageraba. Además, no daba indicios de haber leído nada escrito en el siglo XX. Por desgracia, sus contemporáneos consideraron que todo eran exageraciones y le negaron el puesto que solicitaba.

¿Sabe alguien algo más de él?

Las afirmaciones de Poincaré se han extraído, con permiso, de un informe guardado en los archivos de la Universidad Pierre y Marie Curie (París VI), heredera de los archivos de la antigua Facultad de Ciencias de París. Este fascinante documento, con el estilo lúcido característico de los escritos de divulgación de Poincaré, hace pensar que se deberían poner a disposición del público selecciones más extensas de las cartas de Poincaré y de sus informes confidenciales para universidades y academias. Por el momento, una parte amplia y misteriosa de su personalidad está ausente de sus libros y sus *Obras completas*.

### *Edmund Edward Fournier d'Albe (1868-1933)*

Fournier d'Albe (*Who's Who in Science*, pág. 593) eligió una vida de periodista científico e inventor independiente: construyó una prótesis para que los ciegos pudieran «oír» letras y fue el primero en transmitir una señal de televisión desde Londres.

Su nombre da fe de un linaje hugonote. A pesar de su educación en parte alemana y su residencia eventual en Londres, donde obtuvo la licenciatura asistiendo a la facultad en horario nocturno, un trabajo en Dublín le convirtió en patriota irlandés y militó en un movimiento pancelta. Creía en el espiritismo y fue un místico religioso.

Se le recuerda por su libro *Two New Worlds*, que fue objeto de críticas muy favorables en *Nature*, en las que sus argumentos se calificaban de «simples y razonables», y en *The Times*, donde se decía que sus especulaciones eran «curiosas y atractivas». Sin embargo, las necrológicas de Fournier d'Albe aparecidas en *Nature* y *The Times* olvidaron, por lo que fuera, citar su libro. Es prácticamente imposible de encontrar y raramente se lo cita sin compañía de algún comentario sarcástico.

Ciertamente, es la clase de obra en la que un físico se sorprende de encontrar algo de valor técnico permanente. De hecho, me aconsejaron no prestarle demasiada atención, para que no tomara en serio la mayor parte de su contenido, que era muy discutible. Pero ¿se habría de usar contra Fournier un argumento que uno ni pensaría en utilizar contra Kepler? No quiero decir que Fournier fuera un Kepler; sus logros apenas llegaron al nivel de los demás autores de este capítulo. Sin embargo, la pretensión de un crítico de que «el trabajo del pretendido “Newton del alma” carece de interés científico» es con mucho demasiado radical.

En efecto, Fournier fue el primero que reformuló una antigua intuición relativa a la agregación galáctica (que se remonta a Kant y a su contemporáneo Lambert) en unos términos suficientemente precisos para permitirnos concluir hoy que para las galaxias debería cumplirse  $D = 1$ . Así pues, le debemos algo de valor duradero.

### *Harold Edwin Hurst (1880-1978)*

Hurst, aclamado como quizá el mejor nilólogo de todos los tiempos y apodado «Abu Nil», Padre del Nilo, pasó la mayor parte de su vida profesional en El Cairo como funcionario de la Corona Británica, y luego de Egipto. (*Who's Who*, 1973, pág. 1625, y *Who's Who of British Scientists 1969/70*, págs. 417-418.)

Vale la pena volver a relatar la formación seguida en sus años jóvenes, tal como Mrs. Marguerite Brunel Hurst me la describió. Hijo de un contratista de obras pueblerino de medios limitados, cuya familia había vivido cerca de Leicester durante casi tres siglos, dejó la escuela a la edad de 15 años. Su padre le había preparado sobre todo en química y también en carpintería. Luego fue maestro en una escuela de Leicester, y asistía a clases nocturnas para continuar su propia formación.

A los 20 años obtuvo una beca que le permitió ir a Oxford en condición de estudiante externo. Al cabo de un año empezó la licenciatura en el restablecido Hertford College, y pronto escogió la especialidad de física y se puso a trabajar en el Clarendon Laboratory.

Su falta de preparación en matemáticas fue un obstáculo, pero gracias al interés que el profesor Glazebrook tomó por un candidato tan poco usual, muy hábil en el trabajo práctico, obtuvo el título con una calificación óptima, lo cual sorprendió a todos, y recibió la oferta de quedarse durante tres años como profesor y ayudante de laboratorio.

En 1906, Hurst fue a Egipto por una corta temporada que habría de durar 62 años, de los que los más fecundos llegaron cuando ya había cumplido los 45. Entre sus primeras obligaciones estaba transmitir la hora normal de la Ciudadela a El Cairo, donde había que disparar un cañonazo a mediodía. Sin embargo, el Nilo le fue cautivando cada vez más, y tanto su estudio como la exploración de su cuenca le hicieron internacionalmente conocido. Viajó mucho navegando por el río y por tierra —a pie con porteadores, en bicicleta, más adelante en coche y después incluso en avión—. La Presa baja de Asuán había sido construida en 1903, pero él se dio cuenta de la importancia que tenía para Egipto prepararse no sólo para los años secos, sino para una serie de años secos seguidos. Los esquemas de depósito para la irrigación deberían ser suficientes para cada situación, más o menos como, según el Antiguo Testamento, José almacenó grano para los años de carestía. Fue uno de los primeros en darse cuenta de la necesidad del «Sudd el Aali», la Gran Presa de Asuán.

Es probable que el nombre de Hurst perdure asociado a un método estadístico introducido por él, que sirvió para descubrir una importante ley empírica relativa a la dependencia a largo plazo en geofísica. A primera vista puede parecer sorprendente que algo de esta clase proceda de un autor tan mal preparado en matemáticas, trabajando lejos de cualquier gran centro de saber, pero si uno lo piensa un poco mejor, estas circunstancias pueden haber sido vitales tanto para la concepción de su idea como para su supervivencia. Hurst estudió el Nilo con un método de análisis de su propia invención, que podría haberse calificado de estrecho de miras y *ad hoc*, pero que en realidad ha resultado eminentemente intrínseco. Como no tenía ninguna prisa y disponía de una cantidad excepcionalmente abundante de datos, estaba en condiciones de compararlos con el modelo estándar de las variables estocásticas (el ruido blanco) por medio de sus respectivos efectos sobre el diseño de la Gran Presa. Esto le condujo a la expresión que en los capítulos 28 y 39 (pág. 387) denotamos por  $R(d)/S(d)$ .

Puede uno imaginarse el ingente y arduo trabajo arduo que supuso esa investigación en una época en la que no se disponía de ordenadores, pero, naturalmente, el Nilo era y es tan importante para Egipto que justificaba unos gastos comparativamente importantes (y hacía impensable obligar a Hurst a retirarse).

Hurst mantuvo con firmeza que su descubrimiento era importante, a pesar de que no existiera ningún test que permitiera evaluar objetivamente esa importancia. Por fin, con 71 y 75 años, leyó dos largos artículos que trataban de su descubrimiento, y en los que se reconocía la importancia potencial del mismo.

En palabras de E.H. Lloyd (aunque en mi notación), Hurst nos pone «en una de esas situaciones, tan saludables para los teóricos, en las que los descubrimientos empíricos se resisten tercamente a concordar con la teoría. Todas las investigaciones descritas más arriba nos llevan a la conclusión de que a la larga  $R(d)$  tendría que crecer según  $d^{0.5}$ , mientras que la extraordinariamente documentada ley empírica de Hurst muestra un crecimiento según  $d^H$ , con  $H$  aproximadamente igual a 0,7. No nos queda otra salida que concluir que, o los teóricos se equivocan en la interpretación de su propio trabajo, o los fundamentos de sus teorías son falsos; y posiblemente ocurran ambas cosas». Análogamente, ahora en palabras de Feller (1951): «Nos enfrentamos aquí con un problema interesante tanto desde del punto de vista estadístico como del matemático».

Mi modelo basado en el movimiento browniano fraccionario (capítulo 28) surgió como una respuesta directa al fenómeno de Hurst, pero la historia de Hurst no acaba aquí. Es difícil hacer objeciones a los comentarios entusiastas del párrafo anterior... pero ambos se basan en una lectura inconscientemente incorrecta de las afirmaciones de Hurst. Lloyd se olvidó de dividir  $R$  por  $S$ , y Feller supo del trabajo de Hurst por una comunicación oral de un tercero (como él mismo reconoció), y no supo darse cuenta de que se había dividido por  $S$ . Esto no afecta para nada al valor del trabajo de Feller. Acerca de la importancia de la división por  $S$ , véase Mandelbrot y Wallis (1969c) y Mandelbrot (1975w).

Vemos de nuevo en este ejemplo que cuando un resultado es verdaderamente inesperado es difícil de comprender, aun por los mejor dispuestos a prestarle atención.

### *Paul Lévy (1886-1971)*

Paul Lévy, que no reconoció alumno alguno pero que estuvo a punto de ser mi mentor, alcanzó metas que Bachelier sólo vio de lejos. Lévy vivió el tiempo suficiente como para ser reconocido como quizá el mayor probabilista de todos los tiempos, y finalmente (cuando andaba cerca de los 80 años) llegó a ocupar el sillón que había sido de Poincaré, y que había dejado vacante Hadamard, en la Académie des Sciences de París. (Véase *Who's Who in Science*, pág. 1035.)

Y sin embargo, casi hasta el final de su vida activa, Lévy había sido mantenido a distancia por el «establishment». Aparte de negársele repetidas veces la antigua cátedra de Poincaré en la Universidad, sus repetidas ofertas de dar conferencias extraacadémicas fueron aceptadas a regañadientes, por temor a que pudiera interferir en el plan de estudios.

Su vida, ideas y opiniones están largamente documentados en Lévy (1970), un libro que vale la pena leer porque no pretende presentarse mejor o peor de como fue realmente. Aunque es mejor saltarse el final, los mejores episodios son espléndidos. En particular, describe en términos conmovedores sus temores a ser «un mero superviviente del siglo pasado», y a ser un matemático «distinto de los demás». Este sentimiento era compartido por otros. Recuerdo a John von Neumann decir en 1954, «creo que entiendo como funciona cualquier matemático, pero Lévy es como un visitante de otro planeta. Parece como si tuviera sus propios métodos particulares para alcanzar la verdad, y ésto me hace sentir incómodo».

Tenía pocas obligaciones que le distrajeran, aparte de unas cuantas lecciones de análisis matemático en la Ecole Polytechnique. Trabajando solo, transformó la teoría de la probabilidad de un pequeño conjunto de resultados raros en una disciplina en la que se podían obtener resultados brillantes y variados por métodos lo bastante directos como para convertirse en clásicos. Se interesó en el tema cuando le pidieron una conferencia sobre errores en el disparo de cañones. Tenía por entonces unos 40 años, era un hombre brillante que no había dado de sí cuanto prometía y era profesor en la Polytechnique en un tiempo en que los nombramientos de la escuela le favorecían como graduado. Escribió sus principales libros a los 50 y 60 años de edad, y buena parte de su trabajo sobre las funciones brownianas reales en espacios de Hilbert llegó mucho después.

Uno de los muchos episodios interesantes de su autobiografía se refiere a un corto artículo que dedicó a la paradoja de Bentley, relativa al potencial gravitatorio newtoniano (capítulo 9). En 1904, a la sazón un estudiante de 19 años, Lévy descubrió independientemente el modelo de universo de Fournier. Sin embargo, le pareció que «el argumento era tan simple que no habría pensado en publicarlo de no haber sido porque, 25 años después, escuchó por casualidad una conversación entre Jean Perrin y Paul Langevin. Estos físicos ilustres estaban de acuerdo en que sólo se podía escapar de la paradoja si se suponía que el universo es finito. Yo intervine para indicarles su error y, aunque no parecían entender mis razones, Perrin, desconcertado por mi confianza en mí mismo, me pidió que expresara por escrito mis ideas, y así lo hice».

A propósito de los resultados «demasiado simples para ser publica-

dos», esta es una frase frecuente en los recuerdos de Lévy. Muchas mentes creativas sobrevaloran sus trabajos más barrocos, y subvaloran los más simples. Cuando la historia invierte esta valoración, los autores prolíficos acaban siendo recordados por «lemas» de proposiciones que les habían parecido «demasiado simples» por sí mismos y que habían publicado sólo como preludios de teoremas olvidados.

Las observaciones siguientes parafrasean parte de lo que dije en una ceremonia en memoria de Lévy: «La traza que dejaron en mi memoria sus clases magistrales en la Polytechnique se ha hecho muy borrosa, pues el azar me asignó un lugar en la última fila de un aula muy grande, y la voz de Lévy era débil y sin amplificar. El recuerdo más vívido es el parecido que alguien de nosotros observó entre su figura —larga, gris y muy acicalada— y su modo un tanto peculiar de trazar en la pizarra el signo de integración.

»Pero sus apuntes del curso eran otra cosa. No eran el tradicional desfile bien ordenado que empieza por un regimiento de definiciones y lemas seguidos de teoremas, con cada hipótesis claramente enunciada, interrumpiendo de vez en cuando este fluir majestuoso con el enunciado de algunos resultados no demostrados, cuya condición queda bien clara. Mi recuerdo es más bien el de un torrente tumultuoso de observaciones y comentarios.

»En su autobiografía, Lévy sugiere que, para interesar a los niños por la geometría, habría que pasar tan aprisa como fuera posible a los teoremas que no puedan resultarles evidentes. Su método en la Polytechnique no era muy diferente. Para dar una idea de ello, somos atraídos irresistiblemente a imágenes tomadas de la geografía y del alpinismo. Nos recuerda así una antigua reseña de un anterior *Course d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*. El curso había sido impartido por Camille Jordan y la reseña era de Henry Lebesgue. Dado que el desdén de Lebesgue por el trabajo de Lévy era público y notorio, resulta irónico que sus elogios de Jordan sean tan aplicables a Lévy. No fue en absoluto “una persona que fuera a intentar alcanzar la cima de una región desconocida sin permitirse mirar alrededor antes de alcanzar su meta. Si otro le llevara allí, quizá tendría una visión dominante de muchas cosas, pero no sabría qué son. En realidad, desde un pico muy alto generalmente no se ve nada; los alpinistas sólo los escalan por el esfuerzo que ello supone.”

»No hace falta decir que las notas del curso de Lévy no eran muy populares. Para muchos buenos estudiantes de la Polytechnique fueron una fuente de preocupaciones cuando empollaban para el examen final. En la última reedición, que tuve que estudiar en 1957 como profesor adjunto suyo, todos estos rasgos se acentuaban aún más. El tratamiento de la teo-

ría de la integración, por ejemplo, no pasaba de ser una aproximación. Nadie puede hacer un buen trabajo, había escrito, intentando forzar su talento. Parecía que en los apuntes de su último curso su talento había sido forzado.

»Pero mi recuerdo del curso que había impartido a la promoción de 1944 sigue siendo extraordinariamente positivo. La intuición, si bien no puede enseñarse, se puede frustrar demasiado fácilmente. Creo que esto era lo que Lévy quería evitar a toda costa, y me parece que generalmente lo conseguía.

»En la Polytechnique, yo había oído hablar mucho de su trabajo creativo. Uno lo elogiaría diciendo que era muy importante, inmediatamente añadiría el comentario de que no tenía una sola demostración matemática impecable y que contenía una barbaridad de argumentos de base incierta. En conclusión, lo más urgente era rigORIZARLO TODO. Esta tarea se ha hecho ya y hoy los nietos intelectuales de Lévy se regocijan de ser aceptados como matemáticos hechos y derechos. Como ha dicho uno de ellos hace un momento, se ven a sí mismos como “probabilistas aburguesados”.

»Me da miedo que el precio pagado por esta aceptación pueda haber sido demasiado alto. Parece como si en cada rama del saber hubiera muchos niveles sucesivos de precisión y de generalidad. Algunos son inadecuados para abordar siquiera los problemas más triviales. Cada vez más, sin embargo, y en todas las ramas del saber, uno puede elevar en exceso la precisión y la generalidad. Pueden hacer falta, por ejemplo, cien páginas de preliminares para demostrar un teorema en una forma apenas más general que su antecesor, y que no abra ningún nuevo horizonte. Pero algunas ramas afortunadas del saber permiten un nivel de precisión y generalidad intermedio que se podría calificar de clásico. Casi la única grandeza de Lévy radica en el hecho de que, en su campo, fue al mismo tiempo un precursor y *el* clásico.

»Lévy rara vez se interesó por nada que no fuera matemática pura. Y también, quienes tengan que resolver un problema que ya haya sido bien planteado rara vez encontrarán en sus trabajos una fórmula que les pueda servir sin más esfuerzo. Por otra parte, si tengo que hacer caso de mi experiencia personal, el enfoque de Lévy de muchos temas fundamentales en la formulación del azar le destaca cada vez más como un gigante.

»En los diversos temas que se tocan en este ensayo o que examino en otros trabajos, una formalización matemática correcta parece pedir urgentemente, ya un instrumento conceptual que Lévy nos hubiera proporcionado, ya otro forjado en el mismo espíritu y con el mismo grado de generalidad. Cada vez más, el mundo interior que Lévy exploró como si fuera su geógrafo parece compartir con el mundo que nos rodea una es-



pecie de armonía premonitoria que es, sin la menor duda, una muestra de su genio.»

*Lewis Fry Richardson (1881-1953)*

La vida de L. F. Richardson es insólita incluso según el criterio de este capítulo, y resulta imposible de integrar en ninguna dirección predominante. Era tío, por cierto, de Sir Ralph Richardson, el actor. (Véase *Who's Who in Science*, pág. 1420, *Obituary Notes of Fellows of the Royal Society*, 9, 1954, 217-235 — resumido en Richardson 1960a y 1960s, y un relato de M. Greiser en *Datamation*, Junio 1980.) Las golosinas personales son una graciosa aportación de un pariente de Richardson, David Edmundson.

En palabras de su influyente contemporáneo G. I. Taylor, «Richardson fue un personaje muy interesante y original cuyo pensamiento sintonizaba rara vez con el de sus contemporáneos, y a menudo no era comprendido». Parfraseando a E. Gold, su trabajo científico fue original, unas veces difícil de seguir y otras iluminado por lúcidas e inesperadas ilustraciones. En sus estudios de la turbulencia y en la publicación que condujo a Richardson (1960a y 1960s), en algunos momentos anduvo a tientas y un poco confuso, aunque sin afectación. Estaba abriendo nuevos terrenos y tenía que encontrar el camino con la ayuda de matemáticas nuevas que iba aprendiendo sobre la marcha —y que no podía sacar de unos conocimientos adquiridos en su carrera universitaria. En vista de su inclinación a explorar nuevos temas (o incluso «pedacitos de temas») sus logros podrían parecer sorprendentes, si uno no repara en su extraordinaria y disciplinada laboriosidad.

Richardson estudió en Cambridge con una beca y obtuvo la licenciatura en física, matemáticas, química, biología y zoología, pues no estaba seguro de qué carrera iba a escoger. A Richardson le parecía que Helmholtz, que fue médico antes que físico, había tomado al revés el banquete de la vida.

Por una razón u otra había reñido con Cambridge y, cuando muchos años después quiso hacer el doctorado, no quiso empezar su “Master of Arts”, que costaba 10 libras, sino que se matriculó en la Universidad de Londres, donde a la sazón estaba dando clases, se sentó junto a sus propios alumnos, y obtuvo el doctorado en psicología matemática a la edad de 47 años.

Había empezado su carrera en el Servicio Meteorológico, pero como era un austero cuáquero y durante la primera guerra mundial fue objetor

de conciencia, renunció cuando, acabada la guerra, el Servicio Meteorológico fue absorbido por el nuevo Ministerio del Aire.

La predicción meteorológica por métodos numéricos es el tema de Richardson (1922-1965), sin duda la obra de un visionario práctico. Al cabo de 33 años fue reimpresa como un clásico, pero durante 20 años tuvo mala fama. El caso es que, al aproximar las ecuaciones diferenciales que dan la evolución de la atmósfera por ecuaciones en diferencias finitas, Richardson había escogido valores inapropiados para los intervalos elementales de espacio y tiempo. Como en aquella época todavía no se había advertido la necesidad de andar con cuidado al realizar la selección de dichos elementos, su error era difícilmente evitable.

Sin embargo, esta obra pronto le valió ser elegido para la Royal Society. Y he aquí seis versos de Richardson (1922, pág. 66) que generalmente se citan:

*Big whorls have little whorls  
Which feed on their velocity;  
And little whorls have lesser whorls,  
And so on to viscosity  
(in the molecular sense).*

En realidad estos versos alcanzaron el nivel más alto de la fama porque a menudo eran citados como anónimos. Al verlos, un erudito en literatura inglesa me hizo observar su parentesco con algunos clásicos. Está claro que Richardson parodiaba la siguiente estrofa de Jonathan Swift (1733, versos 337-340):

*So, Nat'ralists observe, a Flea  
Hath smaller Fleas that on him prey  
And these have smaller Fleas to bit ém,  
And so proceed ad infinitum*

Aunque Richardson evitó la declaración alternativa de deMorgan (1872, pág. 377):

*Great fleas have little fleas upon their backs to bite 'em  
And little fleas have lesser fleas, and so ad infinitum  
And the great fleas themselves, in turn, have greater fleas to go on,  
While these again have greater still, and greater still, and so on.*

La diferencia entre estas dos variantes no es tan trivial como podría parecer. En realidad resulta agradable pensar que Richardson ponía mu-

cho cuidado en armonizar sus preferencias literarias con sus concepciones físicas. En efecto, él pensaba que la turbulencia sólo implica una cascada «directa» de energía de los remolinos grandes a los pequeños —y de ahí que parodiara a Swift—. Si también hubiera creído en una cascada «inversa» de energía de los remolinos pequeños a los grandes —como creen hoy algunos— uno esperaría que hubiera parodiado a deMorgan.

En una vena ligera similar, la segunda sección de Richardson (1926) lleva por título «¿Tiene velocidad el viento?» y empieza del modo siguiente: «Aunque a primera vista parezca ridícula, la pregunta adquiere más sentido a medida que se profundiza en el tema». A continuación, pasa a demostrar cómo se puede estudiar la difusión del viento sin necesidad de recurrir a su velocidad. Para dar una idea del grado de irregularidad del movimiento del aire, se cita de pasada la función de Weierstrass (que es continua pero no tiene derivada en ningún punto; la hemos mencionado en el capítulo 2 y es estudiada en los capítulos 39 y 41). Desafortunadamente, deja el tema de lado inmediatamente. Qué pena que no se diera cuenta de que la función de Weierstrass es escalante. Además, como señala G. I. Taylor, Richardson definió la ley de la dispersión turbulenta mutua de partículas, pero por un pelo no dio con el espectro de Kolmogorov. Sin embargo, parece como si con cada nueva ojeada a sus artículos se descubriera una faceta hasta entonces inadvertida.

Richardson fue también un experimentador cuidadoso y ahorrativo. Sus primeros experimentos consistieron en medidas de la velocidad del viento en el interior de las nubes disparándoles canicas de acero de tamaños que variaban entre el de un guisante y el de una cereza. Para un experimento posterior sobre difusión turbulenta (Richardson y Stommel, 1948) le hacía falta una gran cantidad de boyas, que tenían que ser muy visibles, y por tanto preferentemente blanquecinas, mientras estaban casi totalmente sumergidas para que el viento no las afectara. Lo resolvió comprando un gran saco de chirivías, que fueron lanzadas al agua desde un puente del canal de Cape Cod, mientras él realizaba sus observaciones desde otro puente canal abajo.

Pasó muchos años de su vida haciendo de maestro o de administrador, apartado del camino trillado. Luego una herencia le permitió retirarse pronto para dedicarse plenamente al estudio de la psicología de los conflictos armados entre estados, contra los que había estado combatiendo desde 1919. Dos libros suyos aparecieron póstumamente (Richardson 1960a,s; Newman 1956, págs. 1238-1263 publica sendos resúmenes del autor). Entre los artículos póstumos figura Richardson (1961), la investigación acerca de la longitud de las costas, que se ha descrito en el capítulo 5 y que tanta influencia ha tenido en la génesis del presente ensayo.

*George Kingsley Zipf (1902-1950)*

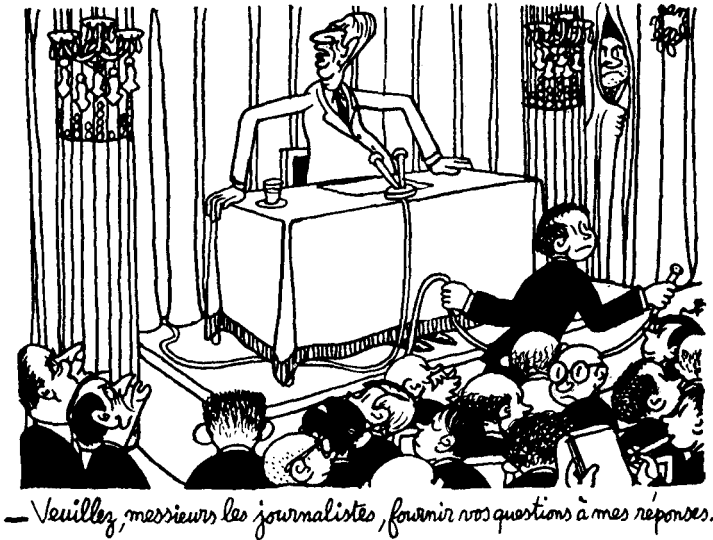
El sabio americano Zipf empezó como filólogo, pero llegó a describirse a sí mismo como ecólogo humano estadístico. Durante 20 años fue catedrático en Harvard y murió poco después de haber publicado, según parece de su propio bolsillo, *Human Behavior and the Principle of Least Effort* (Zipf 1949-1965).

Este es uno de los libros (Fournier 1907 es otro) en los que los destellos de genialidad, que se proyectan en muchas direcciones, son prácticamente anulados por una ganga de ideas estrafalarias y extravagancias. Por una parte, trata de la forma de los órganos sexuales y justifica el Anschluss de Austria en Alemania porque se ajustaba mejor a una fórmula matemática. Por otra, está lleno de figuras y tablas que insisten incesantemente en la ley empírica de que, en la estadística de las ciencias sociales, la mejor combinación de comodidad matemática y ajuste a los datos empíricos lleva a menudo a una distribución de probabilidad escalante. En el capítulo 38 se estudian algunos ejemplos.

Los científicos de la naturaleza reconocen en las «leyes de Zipf» las homólogas de las leyes escalantes que la física y la astronomía aceptan sin demasiados aspavientos (cuando la evidencia señala su validez). Por ello a los físicos les resultaría difícil imaginar la enconada oposición que despertó Zipf —y Pareto antes que él— cuando siguieron el mismo procedimiento, con el mismo resultado, en las ciencias sociales. Se siguen haciendo y se harán intentos de lo más variado para desacreditar de antemano toda evidencia basada en gráficas bilogarítmicas. Pero yo pienso que este método no habría sido discutido, si no hubiera sido por el tipo de conclusiones a las que lleva. Por desgracia, una gráfica bilogarítmica recta indica una distribución que se opone abiertamente al dogma gaussiano, que ha gobernado sin oposición durante mucho tiempo. La incapacidad de los estadísticos aplicados y los sociólogos para hacer caso a Zipf contribuye a explicar el sorprendente atraso de sus campos.

Zipf puso un fervor enciclopédico en recoger ejemplos de leyes hiperbólicas en las ciencias sociales, y una resistencia inacabable en la defensa de sus descubrimientos y de otros análogos debidos a otros autores. Sin embargo, el presente ensayo deja en evidencia que su convicción fundamental carecía de mérito. No es cierto que las distribuciones de frecuencia sean siempre hiperbólicas en las ciencias sociales y siempre gaussianas en las ciencias de la naturaleza. Un defecto más serio aún es que Zipf ligaba sus descubrimientos a un razonamiento verbal vacío, y no llegó, ni por asomo, a integrarlos en un cuerpo doctrinal.

En un momento crucial de mi vida (capítulo 42), leí una sabia reseña



Mi más fervorosa esperanza, querido lector, es que usted quiera plantear muchas nuevas preguntas a mis respuestas.

Este dibujo, de fecha 30 de enero de 1964, se ha reproducido con la autorización de Monsieur Jean Effel.

de *Human Behavior* escrita por el matemático J. L. Walsh. Citando sólo lo bueno, dicha reseña influyó muchísimo en mi obra científica de la primera época, y su influencia indirecta continúa. Por ello, gracias a Walsh, le debo muchísimo a Zipf.

Por lo demás, es probable que la influencia de Zipf siga siendo marginal. Uno ve en él, del modo más claro —y hasta caricaturizadas— las extraordinarias dificultades que rodean a cualquier enfoque interdisciplinario.

Los matemáticos recurren a menudo al aforismo de Gauss, «cuando un edificio está acabado nadie es capaz de ver ningún rastro de los andamios», como excusa para descuidar los móviles que se esconden tras su propio trabajo y tras la historia de su campo. Por suerte, el sentimiento contrario está ganando adeptos, y en numerosos apartados de este ensayo se puede ver de qué lado están mis simpatías. Sin embargo, me quedan algunas historias más largas con las que instruir y entretener al lector. Incluyen fragmentos reunidos en incursiones a bibliotecas inspiradas por mi actual pasión por Leibniz y Poincaré.

*Aristóteles y Leibniz, gran cadena del ser, quimeras y fractales*

Hace tiempo que ya no son necesarias las referencias a Aristóteles y Leibniz en los libros serios. Pero este apartado no es una broma, por inesperado que pueda resultar, incluso para el propio autor. Varias ideas básicas sobre fractales pueden ser consideradas realizaciones matemáticas y científicas de conceptos potentes, aunque vagos, que se remontan a Aristóteles y Leibniz, las cuales impregnan nuestra cultura y afectan incluso a quienes piensan que no están sometidos a influencias filosóficas.

La primera indicación me llegó por una observación de Bourbaki (1960): la idea de la integro-diferenciación fraccionaria, descrita en el capítulo 27, se le ocurrió a Leibniz tan pronto hubo desarrollado su versión del cálculo e inventado las notaciones  $d^k F / dx^k$  y  $(d/dx)^k F$ . En traducción libre de una carta de Leibniz a L'Hôpital, de fecha 30 de septiembre de 1695 (Leibniz 1849-, II, XXIV, 197 sigs.): «Parece ser que Jean Bernoulli le ha contado que yo le había hablado de una maravillosa analogía que permite decir en cierto modo que las diferenciales sucesivas están en progresión geométrica. Uno podría preguntarse que sería una diferencial que

tuviera una fracción por exponente. Ya ve que el resultado se puede expresar por medio de una serie infinita. Aunque todo ello parezca extraño a la Geometría, que todavía no sabe de tales exponentes fraccionarios, está claro que un día estas paradojas traerán consecuencias útiles, pues raramente hay una paradoja sin utilidad. Ideas que en sí son poco importantes pueden dar lugar a otras más bellas». Elaboraciones posteriores fueron comunicadas a Jean Bernouilli el 28 de diciembre de 1695 (Leibniz 1849-, III.1, 226 sigs.).

Mientras Leibniz pensó mucho en esos temas, Newton nunca los tuvo en cuenta en sus ideas sobre el cálculo, y había buenas razones para un enfoque tan diferente. En efecto (véase *The Great Chain of Being*, Lovejoy, 1936), Leibniz estaba profundamente convencido de lo que llamaba «principio de continuidad» o de «plenitud». Aristóteles ya había creído que el vacío entre dos especies vivas cualesquiera se podía llenar continuamente con otras especies. Le fascinaban por ello los animales «intermedios», a los que designó con una voz especial (de la que tuve noticias por G.E.R. Lloyd), *επιμφοτερίζειν*. Véase también el apartado de este capítulo que trata de «Natura non facit saltus».

Este principio de continuidad reflejaba (¿o acaso justificaba?) la creencia en «eslabones perdidos» de todas clases, incluidas las quimeras en el sentido del término en la mitología griega: bestias con cabeza de león y cuerpo de cabra —¡y también con cola de dragón y que escupían fuego por sus fauces! (¿Habría que hablar de las quimeras en este libro? Si llegara a leer que es una relación fractalmente escrita de ideas quiméricas, sabré a quién echarle la culpa.)

Naturalmente, la búsqueda de los orígenes últimos por parte de la teoría atómica moderna se ha decantado por la tradición contraria de la filosofía griega, la de Demócrito. Y la tensión entre estas dos fuerzas opuestas sigue jugando un papel creativo central en nuestro pensamiento. Nótese que en cierto modo el polvo de Cantor le quita pólvora a una antigua paradoja: es divisible indefinidamente sin ser continuo. Por cierto, en la tradición cultural hebrea, las quimeras se rechazaban o se ignoraban, como se demuestra desde un ángulo sorprendente en Soler (1973).

Las quimeras biológicas acabaron desacreditadas, pero esto no importa. En la matemática, la idea de Aristóteles se aplica en la interpolación de la sucesión de números enteros por medio de cocientes de enteros, y luego por los límites de cocientes de enteros. En esa tradición, todo fenómeno descrito por una sucesión de enteros es susceptible de interpolación. Así pues, la prisa de Leibniz por hablar de diferenciales fraccionarias obedecía a una idea que estaba alojada en el mismo centro de su pensamiento (y que estaba en la base de su relleno del círculo, capítulo 18).

Ahora bien ¿qué hay de Cantor, Peano, Koch y Hausdorff? Al crear sus conjuntos monstruosos, ¿no estaban los tres primeros ocupados en convertir en realidad quimeras matemáticas? ¿Y no deberíamos de considerar la dimensión de Hausdorff como una escala con la que ordenar esas quimeras? Los matemáticos de hoy no leen a Leibniz ni a Kant, pero sí lo hacían los estudiantes de 1900. Así, después de leer la estrofa de Jonathan Swift en el apartado sobre RICHARDSON del capítulo anterior, podemos imaginar a Helge von Koch construyendo su curva copo de nieve con el siguiente talante. Define una «gran pulga» como el triángulo original de la lámina 70. Luego coloca una «pulga» triangular menor centrada en medio de cada lomo de la pulga grande; a continuación, pulgas triangulares menores allí donde sea posible en los lomos de las pulgas, ya sean nuevas o viejas. Y así sigue también indefinidamente. Aunque no tengo pruebas de que esto haya ocurrido así realmente, sirve para ilustrar lo que quiero decir. Koch no podía estar fuera de la influencia de las corrientes culturales derivadas del pensamiento de Leibniz. Y la parodia de Swift refleja algunas explicaciones divulgativas de su filosofía.

A continuación, dejaremos los matemáticos que se interesan en el arte por el arte (y convencidos, en palabras de Cantor, de que «la esencia de la matemática es la libertad») para centrarnos en hombres que celebran la naturaleza intentando imitarla.

No soñarían en quimeras, ¿o sí? En realidad muchos de ellos lo hacen. En el capítulo 10 nos hemos referido a los estudiosos prácticos de la turbulencia, fracasando en sus esfuerzos por decidir si el proceso que estudian se concentra en «guisantes, spaghetti o lechugas», irritándose porque parece como si planteando las preguntas de modos diferentes se obtengan respuestas distintas, y acabando con una demanda de figuras «a mitad de camino» entre las líneas y las superficies. En el capítulo 35 se habla de otra banda de buscadores del «a mitad de camino», entre quienes estudian el agrupamiento de las galaxias, que tienen que describir la textura de ciertas figuras que «parecen tener forma de río» aun cuando están formadas por puntos aislados. ¿Sería artificial revelar a estos juiciosos buscadores, inconscientes de estar interesándose en escritos antiguos y viejas pesadillas griegas, que están siguiendo el camino trillado que lleva a las quimeras?

Y todavía encontramos, en el estudio de la agregación estelar y galáctica, un indicio más que señala los orígenes comunes de los cantorianos y los richardsonianos. He aquí un tema delicado para quienes investigan los orígenes de los conceptos, puesto que los astrónomos profesionales están poco dispuestos a reconocer cualquier influencia de la chusma de los astrónomos aficionados, «por atractivas que sus concepciones puedan



ser en su grandiosidad» (citando a Simon Newcomb). Esta aversión podría explicar por qué el primer modelo jerárquico plenamente descrito se suele atribuir a Charlier, que fue astrónomo, y no a Fournier d'Albe (del que hablamos en el capítulo 40) o a Immanuel Kant.

Los comentarios de Kant acerca de la inhomogeneidad de la distribución de materia son elocuentes y claros. Sirvan como testimonio estas pinceladas (que deberían animar a uno a saborear Kant 1755-1969, o Munitz 1957): «Esa parte de mi teoría que le da su mayor encanto... consiste en las siguientes ideas... Es... natural... considerar que las estrellas [nebulosas] son... sistemas de muchas estrellas... No son más que universos y, por así decirlo, Vías Lácteas... Se podría conjeturar también que estos universos superiores no están desconectados entre sí, y que por esta relación mutua constituyen también un sistema más inmenso aún.. ¿que quizá a su vez, como el primero, no es más que un miembro de una nueva combinación de elementos! Nosotros vemos los primeros miembros de una progresión de mundos y sistemas; y la primera parte de esta progresión infinita nos permite ya reconocer qué es lo que hay que conjeturar para el todo. No hay final, sino un abismo... sin fondo.»

Kant nos retrotrae a Aristóteles y Leibniz, y los relatos anteriores podrían explicar por qué tan a menudo Cantor y Richardson suenan parecidos, por lo menos a mí. Para realzar el drama, permítaseme parafrasear algunas de las últimas palabras de Azucena a Luna *Egl'era tuo fratello*, en la ópera de Verdi *Il trovatore*.

Estos líderes de las grandes tradiciones crecieron despreciándose y combatiéndose entre sí, pero en sus orígenes intelectuales *eran hermanos*.

La historia no puede explicar, por supuesto, la poco razonable efectividad de las matemáticas (capítulo 1). El misterio solamente sigue avanzando y cambia de naturaleza. ¿Cómo puede ser que la mezcla de información, observación y búsqueda de unas estructuras interiormente satisfactorias que caracterizan a nuestros autores antiguos hayan de llevarnos repetidamente a temas tan potentes que, mucho después de que se hayan encontrado muchos detalles en contradicción con la observación y de que los propios temas parezcan haberse desvanecido, sigan inspirando progresos útiles tanto en física como en matemáticas?

### *El movimiento browniano y Einstein*

El movimiento browniano natural es «el principal de los fenómenos fundamentales con los que los biólogos han contribuido o ayudado a con-

tribuir a la ciencia de la física» (Thompson 1917). Un biólogo descubrió este fenómeno (mucho antes de 1800), y en 1828 otro biólogo, Robert Brown, encontró que no es de naturaleza biológica sino física. Este segundo paso fue fundamental, y de ahí que el calificativo *browniano* no sea tan inmerecido como lo presentan algunos críticos.

Brown tuvo otros merecimientos para ser famoso, y en su biografía de la novena edición de la *Encyclopaedia Britannica* (1878) no se cita el movimiento browniano. En las ediciones entre la undécima y la decimotercera, entre 1910 y 1926, se le dedican unas pocas palabras de pasada. En las ediciones posteriores al premio Nobel de Perrin, en 1926, ya aparece, por supuesto, tratado a fondo. La lenta aceptación de la naturaleza física del movimiento browniano está relatada en Brush (1968) y Nye (1972). Se pueden encontrar algunas nociones generales en *Britannicas* recientes, en Perrin (1909 y 1913), Thompson (1917) y Nelson (1967).

Los progresos iniciados por Brown culminaron en 1905-1909 con teorías debidas sobre todo a Einstein, y experimentos obra en su mayoría de Perrin. Uno podría pensar que Einstein se propuso explicar las viejas observaciones del siglo diecinueve, pero en realidad no fue así.

El artículo de Einstein de 1905 (reimpreso en Einstein, 1926) empieza con las siguientes palabras: «En este artículo se demostrará que, de acuerdo con la teoría cinética molecular del calor, los cuerpos visibles al microscopio suspendidos en un líquido exhibirán movimientos de una magnitud tal que se puede observar fácilmente al microscopio, debido a los movimientos térmicos moleculares. Es posible que los movimientos que se discuten aquí sean idénticos al llamado “movimiento browniano molecular”; sin embargo, la información de que dispongo acerca de este último es tan imprecisa que no me permite emitir un juicio al respecto.»

Luego leemos en Einstein (1906, reimpreso en Einstein, 1926): «Poco después de la publicación de [Einstein, 1905, fui] informado [de que] los físicos —en primer lugar Gouÿ (de Lyons)— se habían convencido por observación directa de que el llamado movimiento browniano es producido por el movimiento térmico irregular de las moléculas del líquido. Además de las propiedades cualitativas del movimiento browniano, también el orden de magnitud de los caminos descritos por las partículas se corresponde totalmente con los resultados de la teoría. No intentaré aquí una comparación [con] el escaso material de que dispongo!»

Mucho después, en una carta a Michele Besso, fechada el 6 de enero de 1948, Einstein recuerda que había «deducido [el movimiento browniano] partiendo de la mecánica, sin saber que nadie hubiera ya observado nada de esa clase».

Un chiste decía que atribuir el movimiento browniano a Roger Brown violaba una ley fundamental de la eponimia, pues la fama es incompatible con un nombre tan llano como Brown. Esta podría ser la razón por la cual he estado escribiendo sobre polvos de Cantor durante veinte años, antes de caer en la cuenta de que en realidad deberían ser atribuidos a un tal Henry Smith.

H.J.S. Smith (1826-1883) ostentó durante mucho tiempo la Cátedra Saviliana en Oxford, y sus *Scientific Papers* fueron publicados y reimpresos (Smith 1894). En un extraño episodio manejado por Hermite, brilló póstumamente compartiendo un premio con Hermann Minkowski. Fue también uno de los primeros críticos de la teoría de la integración de Riemann. Un chiste (otro) señalaba que, así como las teorías de la integración de Arquímedes, Cauchy y Lebesgue son un regalo de Dios, la de Riemann es inequívocamente una horrible invención humana. En efecto, Smith (1875, capítulo XXV de Smith 1894) demostraba que deja de ser aplicable a funciones cuyas discontinuidades pertenezcan a ciertos conjuntos. ¿Qué contraejemplos presentó? Pues el polvo de Cantor que usamos en el capítulo 8 y el polvo de medida positiva que presentamos en el capítulo 15.

Vito Volterra (1860-1940) reconstruyó el segundo contraejemplo de Smith en 1881.

Naturalmente, Smith y Volterra no hicieron gran cosa con sus ejemplos, ¡pero tampoco Cantor! Estando todo esto descrito en Hawkins (1970) ¿por qué nunca (que yo sepa) se ha mencionado a Smith como acreedor al honor de haber inventado los polvos «de Cantor»?

### *Dimensión*

EUCLIDES (hacia 300 a. de C.) La dimensión está en la base de las definiciones con que empieza el Libro Primero de Euclides sobre la geometría del plano:

1. Punto es lo que no tiene partes
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos
5. Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos de una superficie son líneas.

El tema se desarrolla en las definiciones con que empieza el corto Libro Noveno sobre la geometría del espacio:

1. Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad.

2. Un extremo de un sólido es una superficie. (Heath, 1908, discute este tema.)

Los orígenes de estas ideas son verdaderamente turbios. Guthrie (1971-I) ve trazas del concepto de dimensión en Pitágoras (582-507 a. de C.), pero van der Waerden piensa que hay que descartarlas. Por otra parte, Platón (427-347 a. de C.) comenta a Sócrates, en el Libro VII de *La República*, que «después de las superficies planas... lo correcto, después de la segunda dimensión, es considerar la tercera..., la dimensión de los cubos y la de todo lo que tenga profundidad». Sería bueno saber más acerca de otros estudios de la dimensión anteriores a Euclides.

RIEMANN. La falta de cualquier estudio del concepto de dimensión fue señalada por Riemann en su tesis de 1854, «Sobre las hipótesis que forman los fundamentos de la geometría.»

CHARLES HERMITE. La reputación de Hermite como matemático ultra-conservador (como documentaba su carta a Stieltjes citada en el capítulo 6) es confirmada por sus cartas a Mittag-Leffler (Dugac, 1976c).

13 de abril de 1883: «Leer los escritos de Cantor parece una verdadera tortura... y a nadie de nosotros le seduce la idea de seguirlo... La aplicación de una línea sobre una superficie nos deja absolutamente indiferentes y pensamos que, en la medida en que uno no va a deducir nada de ella, esta observación resulta de consideraciones tan arbitrarias que el autor habría hecho mejor en esperar... [Pero puede que Cantor] encuentre lectores que le estudien con placer e interés, aunque no sea este nuestro caso.»

5 de mayo de 1883: «La traducción [de un artículo de Cantor] fue editada con sumo cuidado por Poincaré... [Su] opinión es que casi todos los lectores franceses serán extraños a unas investigaciones que son al mismo tiempo filosóficas y matemáticas, y que contienen demasiada arbitrariedad, y yo pienso que esta opinión es acertada.»

POINCARÉ. Poincaré presenta una elaboración muy elocuente y a la larga muy fructífera de las ideas de Euclides en sus artículos de 1903 (Poincaré 1905, capítulo III, sección 3) y 1912 (Poincaré, 1913, parte 9). He aquí unos fragmentos en traducción libre.

«Cuando decimos que el espacio tiene dimensión tres, ¿qué queremos decir? Si para dividir un continuo  $C$  nos basta con considerar como cortes un cierto número de elementos distinguibles, decimos que dicho continuo es de *dimensión uno*... Si, por el contrario,... para dividir un continuo basta con usar cortes que forman uno o varios continuos de dimensión uno, decimos que  $C$  es un continuo de *dimensión dos*. Si los cortes forman uno o varios continuos de dimensión dos como máximo, decimos que  $C$  es un continuo de *dimensión tres*; y así sucesivamente.

»Para justificar esta definición es necesario ver cómo los geómetras introducen el concepto de dimensión al principio de sus trabajos. Ahora bien, ¿qué es lo que vemos? Normalmente empiezan por definir las superficies como los límites de los sólidos o pedazos de espacio, las curvas como los límites de las superficies, los puntos como los límites de las curvas, y afirman que ya no se puede seguir más allá.

»Esta es precisamente la idea apuntada más arriba: para dividir el espacio hacen falta unos cortes llamados superficies; para dividir las superficies hacen falta unos cortes llamados curvas; y un punto no se puede dividir, pues no es un continuo. Como las curvas se pueden dividir por cortes no continuos, son continuos de dimensión uno; como las superficies se pueden dividir por cortes continuos de dimensión uno, son continuos de dimensión dos; finalmente, el espacio se puede dividir por cortes continuos de dos dimensiones, con lo que es un continuo de dimensión tres.»

□ Las palabras anteriores no son aplicables a la dimensión fractal. Para los interiores de las diversas islas de este ensayo,  $D$  y  $D_7$  coinciden y son iguales a dos, pero sus costas son harina de otro costal: topológicamente tienen dimensión 1, pero su dimensión fractal es mayor que 1. ■

BROUWER AMENGER. Pasemos ahora a una cita libre de Hurewicz y Wallman (1941):

«En 1913, basándose en la formulación intuitiva de Poincaré, Brouwer dio una definición de dimensión precisa y topológicamente invariante que, para una clase muy general de espacios, equivale a la que usamos hoy. El artículo de Brouwer pasó inadvertido durante muchos años. Y luego, en 1922 y por caminos independientes, Menger y Urysohn reinventaron la definición de Brouwer, con importantes mejoras.

»Antes los matemáticos usaban el término dimensión en un sentido vago. Se decía que una configuración era  $E$ -dimensional si el menor número de parámetros necesario para describir sus puntos, de un modo no especificado, era  $E$ . Los peligros e inconsistencias de este enfoque fueron puestos de manifiesto por dos célebres descubrimientos en la última parte del siglo XIX: la correspondencia biunívoca entre los puntos de una línea y los puntos del plano, descubierta por Cantor, y la aplicación continua de Peano de un intervalo sobre todo un cuadrado. El primero desmentía la intuición de que un plano es más rico en puntos que una línea, y demostraba que la dimensión puede cambiar con una transformación biunívoca. El segundo contradecía la creencia de que la dimensión se puede definir como el menor número de parámetros reales continuos necesarios para describir un espacio, y demostró que la dimensión puede aumentarse con una transformación continua univaluada.

»Quedaba abierta una cuestión sumamente importante: ¿es posible establecer una correspondencia entre espacios euclídeos de dimensiones  $E$  y  $E_0$  combinando las características de ambas construcciones, la de Cantor y la de Peano, es decir, una correspondencia que sea a la vez biunívoca y continua? La pregunta es crucial, ya que la existencia de una transformación de la clase citada entre el espacio euclídeo  $E$ -dimensional y el espacio euclídeo  $E_0$ -dimensional significaría que la dimensión (en el sentido natural de que el espacio euclídeo  $E$ -dimensional tiene dimensión  $E$ ) no tendría ningún sentido topológico en absoluto. La clase de las transformaciones topológicas sería por tanto demasiado amplia para servir de algo en geometría.

»La primera demostración de que el espacio euclídeo  $E$ -dimensional y el espacio euclídeo  $E_0$ -dimensional no son homeomorfos a menos que  $E$  sea igual a  $E_0$  se debe a Brouwer en 1911 [Brouwer, 1975- 2, págs. 430-434; el caso especial  $E \leq 3$  y  $E_0 \geq E$  había sido resuelto previamente en 1906 por J. Luroth]. Sin embargo, esta demostración no revelaba explícitamente ninguna propiedad del espacio euclídeo  $E$ -dimensional que lo distinguiera del espacio euclídeo  $E_0$ -dimensional y fuera responsable de la no existencia de un homeomorfismo entre ambos. El procedimiento de Brouwer de 1913 fue, por tanto, más penetrante. Introdujo una función a valores enteros en un espacio que por su propia definición era topológicamente invariante. En el espacio euclídeo, es precisamente  $E$  (y por tanto es digna de ese nombre).

»Mientras tanto Lebesgue había abordado de otro modo la demostración de la invariancia topológica de la dimensión de un espacio euclídeo. Había observado en 1911 [Lebesgue 1972-, 4, 169- 210] que un cuadrado se puede recubrir con “ladrillos” arbitrariamente pequeños, de tal manera que ningún punto del cuadrado esté contenido en más de tres de dichos ladrillos, pero que, si los ladrillos son lo suficientemente pequeños, por lo menos tres de ellos tienen un punto común. De modo análogo, un cubo en el espacio  $E$ -dimensional puede descomponerse en ladrillos arbitrariamente pequeños de modo que no se intersequen más de  $E + 1$  de tales ladrillos. Lebesgue conjeturó que este número  $E + 1$  no podía reducirse más; esto es, para cualquier descomposición en ladrillos suficientemente pequeños debe haber al menos un punto común a  $E + 1$  de los ladrillos. [La demostración la dio Brouwer en 1913.] El teorema de Lebesgue también muestra una propiedad topológica del espacio euclídeo  $E$ -dimensional que lo distingue del espacio  $E_0$ -dimensional y por tanto implica también la invariancia topológica de la dimensión de los espacios euclídeos.»

En relación a las contribuciones al tema de Poincaré, Brouwer, Lebesgue, Urysohn y Menger, véanse las notas de H. Freudenthal en Brouwer (1975-, 2, capítulo 6) y una respuesta en Menger (1979, capítulo 21).

**DIMENSIÓN FRACCIONARIA Y DELBOEUF.** La historia de la dimensión fractal es mucho más simple: surge ya casi totalmente armada del trabajo de Hausdorff. Aunque en cierto modo queda aún un poco de misterio. En efecto, Russell (1897, pág. 162) ignora las violentas controversias levantadas por Cantor y Peano, pero incluye la siguiente nota de pie de página: «Delboeuf, ciertamente, habla de geometrías con  $m/n$  dimensiones, pero no da ninguna referencia (*Rev. Phil.* xxxvi, pág. 450)». Resultará que Delboeuf es digno de atención (véase el apartado sobre «Cambios de escala en Leibniz y Laplace»); pero mi búsqueda (con la ayuda de F. Verbruggen) entre sus trabajos no descubrió ninguna otra pista acerca de la dimensión fraccionaria.

**BOULIGAND.** La definición de dimensión de Cantor-Minkowski-Bouligand (capítulos 5 y 39) es mucho menos satisfactoria que la de Hausdorff-Besicovitch, pero me gustaría incluir aquí alguna palabra de elogio para Georges Bouligand (1889-1979). Sus muchos libros no son muy leídos en la actualidad, ni siquiera en París, pero tenían un lugar destacado cuando yo estudiaba y pasaba sus exámenes. Hojeando sus trabajos, recuerdo cómo me inicié con ellos en la matemática «moderna». Me pregunto si otras presentaciones menos flexibles y humanas, aunque quizá más duraderas pedagógicamente, habrían proporcionado la misma comprensión intuitiva, susceptible de ser clasificada y guardada para cuando hiciera falta. Creo que no. Si Bouligand hubiera vivido para ver las conquistas actuales de su amada geometría, espero que las contemplaría con satisfacción personal.

*Natura non facit saltus* y  
«La verdadera historia de Theutobocus»

*Natura non facit saltus* es el enunciado más conocido del «principio de continuidad», que se ha discutido en el primer apartado de este capítulo, y que era considerado por Leibniz como «uno de [sus] mejores y mejor verificados». Y es el tenue precursor distante de las figuras geométricas «intermedias»: los fractales. Sin embargo, Bartlett (1968) atribuye esta sentencia a Linneo. Sorprendido por un mérito que me parecía injustamente atribuido, investigué sobre ello y desenterré algunos hechos y una historia.

Ciertamente, el célebre botánico y taxónomo del siglo XVIII Linneo

escribió esta frase, pero sólo de pasada, no como una declaración nueva e importante, sino como sabiduría convencional. Estaba traduciendo la frase *La nature ne fait jamais des sauts*, debida a Leibniz. Este había escrito también un gran número de variantes, entre ellas: *Nulla mutatio fiat per saltum*, *Nullam transitionem fieri per saltum*, *Tout va par degrés en la nature et rien par saut*. Pero las palabras exactas de Linneo en latín puede que no se encuentren en Leibniz.

En segundo lugar, cosa divertida y curiosa, la frase latina exacta de Linneo había sido anticipada mucho antes de Leibniz, en 1613, con la frase, *Natura in suis operationibus non facit saltum* (El singular *saltum* es preferido al plural *saltus* por la malhumorada minoría para quienes *cero* es singular.) ¿Quién escribió esta frase? Stevenson (1956, pág. 1382, No. 18) la atribuye a Jacques Tissot. ¿Quién fue Tissot? El hecho de que nadie parezca saberlo me proporcionó una excusa para colarme en la Bibliothèque Nationale de París.

La frase se encuentra en un panfleto de quince páginas con un título muy largo que empieza así: *La verdadera historia de la vida, muerte y huesos del gigante Theutobocus, rey... que fue derrotado en el 105 (a. de C.) por Mario, cónsul romano y enterrado ... cerca de los romanos*. En una mezcla de francés y latín, el relato es consecuencia del descubrimiento cerca de Grenoble de unos huesos gigantescos, y de las razones para atribuirlos a un ser humano, el llamado Rey Theutobocus.

Se puede encontrar una reimpresión de *La verdadera historia* en *Variétés historiques et littéraires recueil de pièces volantes rares et curieuses*, anotadas por M. Edouard Fournier, tomo IX, 1859, págs. 241-257. Mi curiosidad fue recompensada. En una nota sumamente larga, Fournier describe el siguiente fraude pertinaz. El 11 de enero de 1613, unos trabajadores que excavaban en la arena a una profundidad de 17 o 18 pies desenterraron varios huesos muy largos, a raíz de lo cual circularon rumores de que el hoyo era la tumba de un gigante y estaba marcado por una medalla de Mario y una piedra que llevaba el nombre de Theutobocus. Los huesos, tras ser «autenticados» por dos dignatarios locales y aparecer en los periódicos, fueron mostrados al rey Luis XIII. Se sigue una controversia acerca de su origen, que luego desaparece, y sólo se reanuda en una época en que otros huesos antiguos se estaban atribuyendo a especies desaparecidas. Los paleontólogos entran en la discusión e identifican al rey Theutobocus con un mastodonte.

La nota dice también que en realidad *ningún* Jacques Tissot intervino en este episodio, siendo *La verdadera historia* obra de los dos personajes citados anteriormente, que la publicaron bajo seudónimo... como prospectos de una atracción circense.



Pero el *Natura non...* sigue siendo un misterio. Si hubieran sido pronunciadas por vez primera por unos charlatanes de pueblo haciendo como que citaban a Aristóteles sería decepcionante. Lo más probable es que no hicieran más que repetir una frase corriente en su época, y la cuestión de los orígenes todavía no está cerrada.

### *Poincaré y los atractores fractales*

Contrariamente a los otros apartados de este capítulo, éste está dedicado a descubrimientos que, además de ser divertidos, tuvieron un efecto inmediato y duradero en mi trabajo. Ciertos textos de Henri Poincaré (1854-1912) atrajeron mi atención cuando se estaban corrigiendo las pruebas del *Fractals* de 1977. Estos textos dieron lugar a algunas líneas de investigación esbozadas en los capítulos 18 y 20, y prometí volver a presentarlos más a fondo en otro lugar. Permítaseme contestar algunas cuestiones ineludibles planteadas por estos trabajos de Poincaré y otros relacionados con ellos.

Sí y No: El fue sin duda el primero que estudió los atractores fractales («extraños»). Pero nada de lo que yo conozco de su trabajo le hace precursor, ni siquiera distante, de la geometría fractal de los aspectos visibles de la naturaleza.

Sí: Aunque el hecho había sido olvidado, poco menos de un año después de Cantor (1883), aparecieron en la matemática ortodoxa conjuntos próximos al polvo triádico y a la función de Weierstrass, mucho antes de la creación de las teorías revolucionarias de conjuntos y de funciones de una variable real.

No: Las aplicaciones de estos hallazgos no pasaron inadvertidas en su época. La primera fue en la teoría de las funciones automórficas (capítulo 18), que hizo famosos a Poincaré y a Felix Klein. Esas aplicaciones fueron continuadas por Paul Painlevé (1863-1933), un sabio influyente mucho más allá del dominio de la matemática pura. La ingeniería le fascinaba (fue el primer pasajero de Wilbur Wright después del accidente de Orville Wright) y acabó dedicándose a la política, llegando a primer ministro de Francia. Por cierto, dado que Perrin había sido amigo íntimo de Painlevé, el «ensueño» descrito en el capítulo 2 parece menos insólito.

Sí: Cantor y Poincaré acabaron en bandos opuestos de varias disputas intelectuales, con Cantor, al igual que Peano, como víctima del sarcasmo de Poincaré, como por ejemplo el famoso comentario de que: «El cantorismo [promete] el deleite de un doctor llamado a seguir un interesante caso patológico». Véase también el subapartado «Hermite». Es útil pues

saber que, cuando hacía falta, Poincaré reconocía que los monstruos clásicos podían intervenir, no en descripciones de la naturaleza visible, sino en la física matemática abstracta. Traduzco libremente de *Nuevos métodos en mecánica celeste* (Poincaré 1892-III, págs. 389-390).

«Intentemos representarnos la figura formada por las dos curvas [ $C$  y  $C'$ ] correspondientes a una solución doblemente asintótica [del problema de tres cuerpos]. Sus puntos de intersección forman una especie de malla... infinitamente densa. Cada curva nunca se corta a sí misma, pero se tiene que plegar sobre sí misma de modo tan complejo que interseca cada vértice de la malla con una frecuencia infinita.

»Uno debería sorprenderse por la complejidad de esta figura, que ni tan siquiera intento ilustrar. Nada puede darnos una idea mejor de la complicación del problema de tres cuerpos, y en general de todos los problemas de la dinámica que no tienen ninguna integral uniforme...

»Varias hipótesis nos vienen a la mente:

»1) [El conjunto  $S'$  (o  $S''$ ) definido como  $C'$  (o  $C''$ ) más los puntos límite de esta curva] llena un semiplano. Si es así, el sistema solar es inestable.

»2) [ $S'$  o  $S''$ ] tiene una área [positiva y] finita, y ocupa una región acotada del plano, con posibles "huecos"...

»3) Finalmente [ $S'$  o  $S''$ ] tiene área nula. Es el análogo de un [polvo de Cantor].»

Para reforzar la impresión dejada por estos comentarios inmerecidamente olvidados, he aquí unas traducciones libres de extractos de Hadamard (1912), Painlevé (1895) y Denjoy (1964, 1975).

Primero Hadamard: «Poincaré fue un precursor de la teoría de conjuntos, en el sentido de que la aplicó aun antes de que ésta naciera, en una de sus más sorprendentes y célebres investigaciones. En efecto, demostró que las singularidades de las funciones automórficas forman bien un círculo entero, bien un polvo de Cantor. Esta última categoría era de una especie que la imaginación de sus antecesores no podía concebir siquiera. El conjunto en cuestión es uno de los logros más importantes de la teoría de conjuntos, pero ni Bendixson ni el propio Cantor lo descubrieron hasta más tarde.

»Los ejemplos de curvas sin tangente son verdaderamente clásicos desde Riemann y Weierstrass. Cualquiera puede apreciar, no obstante, la diferencia profunda entre, de una parte, un hecho que se establece en unas circunstancias preparadas para disfrute de la mente, sin otro objetivo ni interés que demostrar su posibilidad, una exposición en una galería de monstruos, y de la otra el mismo hecho inmerso en una teoría que

hunde sus raíces en los problemas más corrientes y esenciales del análisis.»

Ahora Painlevé: «Tengo que insistir en las relaciones que existen entre la teoría de funciones y los polvos de Cantor. Este último tipo de investigación era tan nuevo en espíritu que una revista matemática tenía que ser osada para publicar sobre el tema. Muchos lectores lo consideraban más filosófico que científico. Sin embargo, el progreso de la matemática pronto invalidó esta opinión. En el año 1883 (que será doblemente memorable en la historia de la matemática de este siglo), *Acta Mathematica* alternaba entre los artículos de Poincaré sobre las funciones Fuchsianas y Kleinianas y los artículos de Cantor».

Los artículos de Cantor, que se encuentran en las págs. 305-414 del vol. 2 de las *Acta* (con el conjunto de Cantor en la pág. 407), eran traducciones al francés patrocinadas por Mittag-Leffler, editor de las *Acta*, para ayudar a Cantor en su lucha por ser reconocido. Algunos (véase el subpartado «Hermite» de la pág. 570) fueron editados por Poincaré. Sin embargo, los resultados de Poincaré habían sido esbozados ya en los *Comptes Rendus* antes de que el trabajo de Cantor apareciera en alemán. Poincaré adoptó una de las innovaciones de Cantor con tal prontitud que en su primer artículo de las *Acta* denotaba los *conjuntos* con la voz alemana *mengen*, sin perder tiempo en buscar un equivalente francés.

A continuación, Denjoy (1964): «Algunos científicos consideran que ciertas verdades son de buen gusto, bien educadas y criadas correctamente, mientras que para otras habría que mantener cerrada para siempre la puerta de los caballeros. Me parece que, en general, la teoría de conjuntos es todo un nuevo universo, incomparablemente más vasto y menos artificial, más simple y más lógico, más apto para modelizar el universo físico, en una palabra, más verdadero, que el antiguo universo. El polvo de Cantor comparte muchas propiedades de la materia continua, y parece corresponder a una realidad muy profunda.»

En Denjoy (1975, pág. 23) leemos lo siguiente: «Me parece obvio que los modelos discontinuos expliquen una multitud de fenómenos naturales de un modo mucho más satisfactorio y con más éxito que los actuales. Por tanto, como las leyes de lo discontinuo están mucho menos dilucidadas que las de lo continuo, deberían ser investigadas extensamente y a fondo. Asegurando que los niveles de conocimiento de ambos órdenes sean comparables, se permitirá al físico usar uno u otro según sus necesidades.»

Desafortunadamente, Denjoy no pudo reforzar su «ensueño» con otros avances concretos aparte de las indicaciones generales de Poincaré

y Painlevé. Una excepción es el artículo de Denjoy (1932) sobre ecuaciones diferenciales en el toro. En respuesta a una pregunta planteada por Poincaré, demuestra que la intersección entre una solución y un meridiano puede ser todo el meridiano o cualquier polvo de Cantor prescrito de antemano. El primer comportamiento, pero no el segundo, concuerda con la idea de comportamiento ergódico que tienen los físicos. Antes Bohl (1916) había dado un ejemplo análogo.

Jacques Hadamard (1865-1963) fue un matemático y físico matemático famoso, y Arnaud Denjoy (1884-1974) un prominente matemático muy puro, al que a ningún físico se le ocurriría escuchar. De todos modos, sus observaciones no tuvieron eco en su época. Ambos elogian a Poincaré y Painlevé, y reviven ideas cuyos inventores nunca habían renovado por repetición.

### *Poincaré y la distribución de Gibbs*

La presente reposición de Poincaré puede servir de excusa para referirnos aquí a una golosina técnica que no tiene ninguna relación con el resto de este ensayo.

Se refiere a lo que los físicos conocen como distribución canónica de Gibbs y los estadísticos llaman distribución exponencial. Poincaré (1890) busca las distribuciones de probabilidad tales que la estimación de probabilidad máxima de un parámetro  $p$ , basada en una muestra de  $M$  valores  $x_1, \dots, x_m, \dots, x_M$ , es de la forma  $G[\sum_{m=1}^M F(x_m) / M]$ . En otras palabras, son tales que se pueden cambiar las escalas de  $x$  y  $p$  por las funciones  $F(x)$  y  $G^{-1}(p)$ , de modo que la estimación de  $p$  de máxima verosimilitud es la media muestral de  $x$ . Esto ocurre por supuesto si  $p$  es el valor esperado de una variable gaussiana, pero Poincaré da una solución más general, que ahora se conoce como distribución de Gibbs.

Este hecho fue redescubierto independientemente por Szilard en 1925. Luego, hacia 1935, Koopman, Pitman y Darmois plantearon la misma pregunta referida al procedimiento de estimación más general, sin restringirse a la máxima verosimilitud. Esta propiedad de la distribución de Gibbs, que los estadísticos llaman *suficiencia*, tiene un papel central en la presentación axiomática de la termodinámica estadística de Szilard-Mandelbrot (Mandelbrot 1962t, 1964t). En este enfoque, la arbitrariedad intrínseca de la inferencia estadística está presente en la definición de la temperatura de un sistema cerrado, pero está ausente de la deducción de la distribución canónica. (En otra presentación axiomática posterior basada en el «precepto de máxima información», la propia distribución ca-

nónica se fundamenta en la inferencia estadística, cosa que en mi opinión tergiversa su importancia.)

### *Invariancia por cambios de escala: evidencia empírica antigua*

INVARIANCIA POR CAMBIO DE ESCALA EN LOS HILOS DE SEDA ELÁSTICOS. La observación empírica más temprana que ahora puede reinterpretarse como una prueba de la invariancia por cambio de escala en un sistema físico ocurrió, cosa bastante extraordinaria, *hace ciento cincuenta años*. Incitado por Carl Friedrich Gauss, Wilhelm Weber empezó investigando la torsión de los hilos de seda usados para suspender bobinas móviles en los instrumentos eléctricos y magnéticos. Descubrió que si se aplica una carga longitudinal se produce una extensión inmediata, seguida de un alargamiento posterior con el paso del tiempo. Al quitar la carga tiene lugar una contracción inmediata igual a la extensión inmediata inicial. Esta contracción va seguida a su vez de un nuevo acortamiento gradual hasta que se recupera la longitud original. Las consecuencias de una perturbación siguen una ley de la forma  $t^{-2}$ : decaen hiperbólicamente en el tiempo, y no exponencialmente como cualquiera esperaba por entonces, y espera hasta el día de hoy.

El siguiente trabajo sobre el tema corresponde a Kolrausch (1847), y la torsión elástica de fibras de vidrio es estudiada también por William Thomson, posteriormente lord Kelvin, en 1865, por James Clerk Maxwell en 1867, y por Ludwig Boltzmann, en un artículo de 1874 que Maxwell consideraba lo bastante importante como para ser discutido en la novena (1878) edición de la *Encyclopaedia Britannica*.

Habría que reflexionar cuidadosamente sobre estos nombres y fechas. Demuestran que, para que un problema llegue a ser digno de ser estudiado, no basta con que despierte interés en sabios de la talla de Gauss, Kelvin, Boltzmann y Maxwell. Un problema que les fascine pero al final les derrote podría caer en la mayor de las oscuridades.

INVARIANCIA POR CAMBIO DE ESCALA EN LAS BOTELLAS ELECTROSTÁTICAS DE LEYDEN. Los antecedentes son, en palabras de E. T. Whittaker, los siguientes: «En 1745 Pieter van Musschenbroek (1692-1761), profesor de Leyden, intentó encontrar un método para conservar cargas eléctricas evitando la pérdida de carga que se observaba cuando los cuerpos cargados estaban rodeados de aire. A este fin probó el efecto de rodear una masa de agua cargada con un envoltorio no conductor, vidrio, por ejemplo. En uno de sus experimentos, se suspendía una redoma de agua de un cañón de escopeta por medio de un alambre que se sumergía unas pulga-

das en el agua a través del corcho; y el cañón, suspendido de cuerdas de seda, se aplicaba tan cerca de un globo de vidrio excitado que algunas escobillas metálicas incrustadas en el cañón tocaban el globo en movimiento. En estas circunstancias, un amigo, de nombre Cunaeus, que casualmente tocó la redoma con una mano y el cilindro con la otra, recibió una violenta descarga; con lo que resultó evidente que se había descubierto la manera de acumular o de intensificar la fuerza eléctrica. Nollet dio el nombre de *redoma de Leyden* a este descubrimiento.»

Kolrausch (1854) descubrió el mismo resultado para la velocidad de descarga de la botella de Leyden que para su trabajo con hilos de seda: la carga decae hiperbólicamente con el tiempo. Otros dieléctricos distintos del vidrio son estudiados en detalle en la tesis doctoral de Jacques Curie (hermano y primer colaborador de Pierre Curie), quien encuentra que en algunos dieléctricos la pérdida de carga es exponencial, pero en otros es hiperbólica, con distintos valores del exponente  $\gamma$ .

### *Invariancia por cambio de escala: panaceas antiguas persistentes*

Dispersas por todo un siglo de publicaciones de las revistas más dispares, se encuentran innumerables explicaciones de los decaimientos o de los ruidos escalantes. Da pena leerlas. Su falta de éxito es constante y monótona, pues los callejones sin salida reconocidos en el siglo XIX se exploran una y otra vez, en diferentes contextos y con palabras distintas.

PANACEA DE LA MEZCLA DE HOPKINSON. Frente a la pérdida hiperbólica de carga de una botella de Leyden, Hopkinson (alumno de Maxwell) propone en 1878 la «explicación aproximativa [de que] el vidrio se podría considerar como una mezcla de una variedad de silicatos distintos que tienen comportamientos diferentes». Se tendría entonces que la función de descarga parecida a una hipérbola es en realidad una mezcla de dos o más exponenciales distintas de la forma  $\exp(-s/\tau_m)$ , caracterizadas cada una de ellas por un tiempo de relajación  $\tau_m$  distinto. Sin embargo, incluso los datos más primitivos fueron suficientes para demostrar que no bastaba con dos ni con cuatro exponenciales, con lo que el argumento se abandonó. Aunque sigue reapareciendo cada vez que los datos no son suficientemente abundantes para refutarlo.

LA PANACEA DE LOS TIEMPOS DE RELAJACIÓN DISTRIBUIDOS. Cuando los datos abarcan varias décadas y no se pueden ajustar a menos que la mezcla consista en un número ridículamente grande de exponenciales, pongamos 17 o 23, uno se siente tentado de recurrir a una mezcla consistente

en un número *infinito* de exponenciales. La definición de la función gamma de Euler da

$$t^\gamma = [\Gamma(\gamma)]^{-1} \int_0^\infty \tau^{-(\gamma+1)} \exp(-t/\tau) d\tau.$$

Esta identidad demuestra que, si el tiempo de relajación exponencial  $\tau$  tiene una «intensidad»  $\tau^{-(\gamma+1)}$ , la mezcla es hiperbólica. Sin embargo, este argumento es un círculo vicioso. Se supone que el resultado de una explicación científica debe ser menos obvio a priori que los datos de partida, pero resulta que  $t^\gamma$  y  $\tau^{-(\gamma+1)}$  son funcionalmente idénticos.

PANACEA DEL COMPORTAMIENTO TRANSITORIO. Al saber de los diversos síntomas de invariancia por cambio de escala enumerados en los apartados anteriores, una segunda reacción cuasi universal es esta: seguramente esas funciones hiperbólicas sólo son complicaciones transitorias, recuperándose la exponencial cuando los decaimientos se observen durante un tiempo suficientemente largo. La primera búsqueda sistemática de esta cota está en von Schweidler (1907), quien midió la pérdida de carga de una botella de Leyden, primero a intervalos de 100 segundos y luego con una frecuencia menor, durante un tiempo total de 16 millones de segundos (¡200 días, en verano e invierno!). Y el decaimiento hiperbólico se mantiene puntualmente. Experimentos más recientes acerca de ruidos eléctricos en  $I/f$  habían empezado con unas pocas horas de duración, después una noche, luego un fin de semana, más tarde unas cortas vacaciones. Y en un número sorprendentemente grande de casos el comportamiento  $I/f$  se mantiene puntualmente.

En capítulos anteriores, por ejemplo en el estudio de los cúmulos de galaxias del capítulo 9, se señala que los científicos pueden quedarse tan absortos en la búsqueda de una cota que se olvidan de la necesidad de describir y explicar los fenómenos característicos del dominio escalante. Extrañamente, la preocupación excesiva por la cota puede ser incluso más fuerte entre los ingenieros. Por poner un ejemplo comentado en el capítulo 27, muchos hidrólogos vacilan en usar mi modelo porque implica un corte infinito a la invariancia por cambio de escala. En un proyecto de ingeniería, la finitud del corte no tiene la menor importancia, y no obstante las mentalidades prácticas desean fervientemente un corte finito.

### *Invariancia por cambio de escala en Leibniz y Laplace*

Hacer un muestreo de los trabajos científicos de Leibniz es una experiencia que hace reflexionar. Al lado del cálculo, y otras ideas que se han

realizado plenamente, la cantidad y variedad de avances premonitorios que uno encuentra es abrumadora. Tenemos ejemplos de ello en el «re-lleno» del capítulo 17 y en el primer apartado de este capítulo. Además, Leibniz puso en marcha la lógica formal y fue el primero que sugirió (en una carta a Huygens fechada en 1679) que la geometría debería contener la rama que acabó llamándose topología. (A un nivel menos exaltado, introdujo las letras hebreas en la notación matemática... ¡además de los símbolos del Zodiaco!)

Mi «Leibnizmanía» se ve reforzada cuando descubro que, por un momento, el protagonista dio una cierta importancia a la invariancia geométrica por cambio de escala. En «Euclidis  $\pi\rho\omega\tau\alpha$ » (Leibniz 1849-II.1, págs. 183-211), que es un intento de afinar los axiomas de Euclides, afirma (pág. 185): «IV(2): Tengo varias definiciones de recta. La *línea recta* es una curva tal que cada una de sus partes es semejante al todo, y es la única con esta propiedad, no sólo entre las curvas sino entre los conjuntos». Este enunciado puede demostrarse en la actualidad. Después Leibniz describe las propiedades de la autosemejanza más restringida del plano.

La misma idea se le ocurrió, independientemente, a Joseph Delboeuf (1831-1896), escritor belga cuyas ideas critica benignamente Russell (1897). Fue una personalidad científica poco corriente, que en su entusiasmo inexperto pasó de los clásicos a la filosofía de la geometría. Sin embargo, su «principio de semejanza» añade muy poco a la cita anterior de Leibniz (que él no conocía al realizar su trabajo, y al que hace referencia —y me guió a mí— con una agradable mezcla de generosidad y orgullo). Delboeuf también es la estrella (aunque de poco brillo) en la pág. 573.

Se puede encontrar una referencia de otro tipo a la invariancia por cambio de escala (si uno está dispuesto a ser generoso con los muy ricos) en las máximas 64 y 69 de la *Menadología* de Leibniz, donde se afirma que las porciones pequeñas del mundo son precisamente tan complejas y organizadas como las porciones grandes.

Una idea relacionada con la invariancia por cambio de escala se le ocurrió también a Laplace. En el capítulo V del Libro V de la quinta edición de su *Sistema del mundo*, publicada en 1842 y traducida al inglés (pero no en la cuarta edición de 1813), uno encuentra la siguiente observación (Laplace 1879, Vol. VI): «Una de [las] propiedades notables [de la atracción newtoniana] es que si las dimensiones de todos los cuerpos del universo, sus distancias mutuas y sus velocidades aumentaran o disminuyeran proporcionalmente, describirían unas curvas completamente semejantes a las que describen actualmente; por lo tanto, el universo re-



ducido al menor espacio imaginable tendría siempre el mismo aspecto para un observador. Las leyes de la naturaleza sólo nos permiten observar tamaños relativos... [El texto sigue en una nota a pie de página] Hasta ahora, los intentos de los geómetras de demostrar el axioma de Euclides de las líneas paralelas han fracasado ... El concepto de ... círculo no implica nada que dependa de su tamaño absoluto. Pero si disminuimos su radio, nos vemos obligados a disminuir también en la misma proporción su circunferencia y los lados de todas las figuras inscritas. Esta proporcionalidad parece un axioma mucho más natural que el de Euclides. Y es curioso encontrar esta propiedad en los resultados de la gravitación universal.»

### *Funciones de Weierstrass*

Las funciones continuas y no diferenciables de Weierstrass tuvieron tal impacto en el desarrollo de la matemática que uno siente curiosidad por saber si su historia siguió el mismo patrón que Farkas Bolyai describió a su hijo, János: «Hay algo de verdad en esto, que muchas cosas tienen su época, en la que son descubiertas en varios lugares a la vez, exactamente igual que en primavera las violetas salen por todas partes». Uno espera también ver la prisa por publicar de los coinventores.

Pero en el caso que nos ocupa las cosas se desarrollaron de un modo muy distinto. La casi increíble verdad es que Weierstrass nunca publicó su descubrimiento, aunque si lo leyó en la Academia de Berlín el 18 de julio de 1872. El manuscrito de la charla salió en sus *Obras completas*. (Weierstrass 1895), pero el resultado fue hecho público, reclamando la paternidad de Weierstrass, por Dubois Reymond (1875). Así pues, 1875 no es más que una fecha simbólica para el principio de la gran crisis de la matemática.

Dubois Reymond escribió que «la metafísica de estas funciones parece esconder muchos acertijos, por lo que a mí respecta, y no puedo librarme de la idea de que nos llevarán al límite de nuestro intelecto». Sin embargo, uno se queda con la impresión de que nadie tenía prisa por explorar esos límites. Algunos contemporáneos que por un momento se interesaron por este trabajo (como Gaston Darboux, por ejemplo) inmediatamente se pasaron al conservadurismo radical, y los demás apenas fueron más audaces. El episodio recuerda a la fuerza otro más famoso, el de Gauss escondiendo su descubrimiento de la geometría no euclídea, como él mismo escribió a Bessel el 27 de enero de 1829, «por temor al escándalo de los *boeotians*». (Pero más tarde se lo reveló a János Bolyai —con

desastrosas consecuencias para su mente— después de que éste, hijo de un amigo, hubiera publicado su descubrimiento independientemente). Finalmente, uno piensa en el consejo que Mittag-Leffler daría después a Cantor: que no debía pelearse con los editores, sino retener sus descubrimientos más atrevidos hasta que el mundo estuviera preparado para ellos. Rara vez las vanguardias han estado tan poco dispuestas como en los casos citados.

Además de Weierstrass, hay que citar aquí tres nombres. Se ha rumorado durante mucho tiempo —y Neuenschwander (1978) lo documenta— que, hacia 1861, Riemann contó a sus estudiantes que  $R(t) = \sum n^{-2} \cos(n^2 t)$  es una función continua y no diferenciable. Pero no se conocen enunciados precisos del resultado, ni tampoco demostraciones. En realidad, si «no diferenciable» significa «no diferenciable en ningún punto», cualquier pretendida demostración tiene que contener errores, pues Gerver (1970) y Smith (1972) demuestran que  $R(t)$  tiene derivada positiva y finita en determinados puntos. Kronecker se interesó también por la función de Riemann, y este interés subraya la importancia que se dio a la cuestión en aquella época. (Manheim 1969, T. Haukins 1970 y Dugac 1973, 1976 añaden más datos a estos antecedentes.)

Bolzano, cuyo nombre va unido al de Weierstrass en un contexto distinto y más conocido, interviene también en esta historia. Bernhard Bolzano (1781-1848) fue uno de los pocos héroes secretos de la matemática, y la mayor parte de su trabajo permaneció en estado latente hasta los años veinte. En 1834 descubrió una función muy parecida a la de Weierstrass, pero no supo darse cuenta de la propiedad que la hace interesante para nosotros (Singh 1935, pág. 8).

El tercer hombre, desconocido en su época y también en la nuestra, tiene más que ver que cualquier otro en esta historia aparte de Weierstrass. Charles Cellérier (1818-1890) había sido profesor en Ginebra y no había publicado gran cosa digna de ser mencionada, pero sus archivos, abiertos después de muerto, contenían una «revelación». Una carpeta sin fecha, con la anotación «Muy importante y creo que nuevo. Correcto. Publicable tal como está» contenía un texto de su puño y letra describiendo el caso límite  $D=1$  de la función de Weierstrass y la usaba con los fines corrientes. Las páginas amarillentas fueron mostradas a un académico de nombre Cailler, que añadió una nota (de la que hemos extraído los comentarios anteriores) y publicó inmediatamente el artículo como Cellérier (1890). A continuación hubo una cierta muestra de interés, especialmente de parte de Grace C. Young. Raoul Pictet recordó en 1916 que Cellérier había mencionado su trabajo en clase, cuando Pictet era alumno suyo, hacia 1860. Pero no aparecieron pruebas escritas. Y al final la afirmación de Cellérier resultó ser defectuosa.

Así pues Weierstrass se queda como el único e indiscutible autor de la afirmación atribuida a su nombre, pero nos hemos quedado con algunos hechos verdaderamente raros sobre los que reflexionar. Bolzano publicó una cierta expresión que él mismo consideró inocua, pero los otros dos investigadores que captaron mejor sus implicaciones, tanto el provinciano modesto sin una reputación que empañar como el gran maestro que podría haberse sentido intachable, escogieron sentarse, esperar y ver. La máxima «publicar o perecer» no podría haber estado más lejos de su pensamiento.

Como la función de Weierstrass se usa a menudo como argumento en favor del divorcio por mutuo acuerdo entre la física y las matemáticas, podría ser interesante hablar de la actitud de su descubridor hacia la relación entre ambas ciencias. Su nombre se hizo un lugar en la óptica geométrica (con los puntos de Young-Weierstrass de una lente esférica). Además, en su lección inaugural de 1857 (citada en Hilbert, 1932, 3, págs. 337-338), Weierstrass insiste en que el físico no debería ver la matemática sólo como una disciplina auxiliar, ni el matemático considerar las preguntas del físico como una simple colección de ejemplos para sus métodos. «A la pregunta de si es realmente posible sacar algún provecho de las teorías abstractas que la matemática moderna [=1857] parece apoyar, uno debería contestar que fue basándose únicamente en la especulación pura como los matemáticos griegos dedujeron las propiedades de las secciones cónicas, mucho antes de que nadie pudiera imaginarse que representan las órbitas de los planetas.» AMEN.

Los ensayos sobre fractales que escribí en 1975 y en 1977 empiezan sin prólogo y acaban sin conclusiones. Lo mismo ocurre con la presente obra, pero me quedan aún algunas cosas por decir. Ahora que la geometría fractal da señales amenazadoras de estarse organizando, es un buen momento para dejar constancia a grandes rasgos de su génesis improbable. Y de añadir algunas palabras acerca de sus contribuciones relativas a la comprensión, descripción y explicación científicas. A medida que la nueva geometría avanza en todos los frentes de la descripción a la explicación (ya sea genérica, como en los capítulos 11 y 20, o dirigida a casos concretos), es bueno recordar por qué se había beneficiado de un desduido poco común (y poco popular) de la explicación mediante «modelos».

Ahora el lector ya sabe bien que la distribución de probabilidad característica de los fractales es hiperbólica, y que el estudio de los fractales está lleno de otras leyes potenciales. Aceptando la validez de la invariancia por cambios de escala y explorando cuidadosamente sus implicaciones físico-geométricas, encontramos tantas cosas de que ocuparnos que parece en verdad extraño que, desde ayer, yo sintiera que tenía toda esta tierra nueva para mí sólo. Muchos claros poblados la rodeaban, y muchos autores habían echado una mirada, pero nadie más se había quedado en ella.

Esta dedicación de toda una vida fue provocada por un interés secundario y fortuito por la ley de Zipf (capítulos 38 y 40). Me enteré de esta regularidad empírica de las frecuencias de las palabras leyendo una reseña de un libro. Aunque el suceso parezca demasiado simbólico para ser cierto, la reseña en cuestión había sido recuperada de la papelera de un matemático «puro», para leerla como entretenimiento en el metro de París. La ley de Zipf resultó fácil de explicar, y mi trabajo contribuyó al nacimiento de la lingüística matemática. Pero el estudio de las frecuencias de palabras era una empresa que terminaba en sí misma.

Sin embargo, sus efectos retardados persistían. Habiéndome dado cuenta de que (en palabras actuales) mi trabajo había sido una muestra de la utilidad de las hipótesis escalantes, me sensibilicé con regularidades empíricas análogas en diversos campos, empezando por la economía. Aunque sorprendentemente numerosas, estas regularidades fueron consideradas de poca importancia para las especialidades arraigadas. Cuantos más eran mis éxitos en explicarlas, más se vislumbraban como síntomas visibles de un fenómeno general que la ciencia no había conseguido afrontar, y al que yo podría dedicar mis energías durante algún tiempo.

Mi método de investigación de estas regularidades empezó con la búsqueda habitual de modelos generadores, pero fue cambiando gradualmente, pues no dejaba de encontrar casos en los que cambios menores en supuestos aparentemente poco importantes del modelo producían cambios drásticos en las predicciones. Por ejemplo, muchos casos de distribución gaussiana se suelen «explicar» mediante el teorema del límite central estándar, como resultado de la adición de muchas contribuciones independientes. El valor explicativo de este argumento dependía del hecho de que muchos otros teoremas del límite central ni siquiera eran conocidos por los investigadores científicos, y además Paul Lévy y otros pioneros los consideraban «patológicos». Pero el estudio de las leyes escalantes hizo que me diera cuenta de que el comportamiento del límite central no estándar es en realidad parte de la naturaleza. Desafortunadamente, tan pronto uno reconoce que el argumento del teorema del límite central tiene más de un resultado posible, deja de ser persuasivo. Poca comprensión puede producir una explicación si es más complicada que el resultado que pretende explicar, o si variantes igualmente plausibles dan predicciones totalmente distintas.

De todos modos, la exploración de las *consecuencias* de la autosemejanza estaba resultando llena de sorpresas extraordinarias, que me ayudaban a entender la estructura de la naturaleza. Por contra, la embrollada discusión de *causas* de la invariancia por cambio de escala era poco atractiva. En algunos momentos apenas parecía más seria que los desvaríos de Zipf acerca del principio del mínimo esfuerzo (pág. 562).

Esta disposición de ánimo fue reforzada por una punta de interés renovado en el modelo de cuasi invariancia por cambio de escala en taxonomía presentado en Yule (1922). La pretensión de dar una explicación universal de todos los casos de invariancia por cambio de escala en las ciencias sociales se basaba en un error técnico (como demostré), pero, por la razón que sea, muchos de mis lectores de esa época se quedaron convencidos de que las relaciones escalantes en las ciencias sociales te-

nían una explicación universal e inmediata, y por lo tanto (!) no valía la pena prestarles atención.

Como consecuencia de ello, mi inclinación natural a poner énfasis en las consecuencias antes que las causas quedó reforzada. Pronto demostró ser un regalo del cielo, y en particular sirvió para poner de manifiesto toda la potencia de los métodos escalantes, cuando (en 1961) me puse a estudiar la variación de los precios de las mercancías en los mercados competitivos (capítulo 37). Los economistas se quejan de insuficiencia y mala calidad de sus datos, pero sobre precios e ingresos hay datos a raudales. Y sin embargo la teoría económica y la econometría, que pretenden poder elucidar las relaciones entre centenares de variables mal definidas, no hacen ninguna predicción acerca de la estructura de los registros de precios. Y las técnicas estadísticas comunes resultan incapaces de extraer ninguna estructura a partir de los datos. Esto ilustra la observación de Leontieff: «En ningún ámbito de investigación científica se ha usado una maquinaria estadística tan sofisticada y masivamente con unos resultados tan indiferentes». Pero las descripciones obtenidas por métodos escalantes funcionaban abrumadoramente bien. La propiedad escalante incorpora las dos características más sorprendentes de los precios del mercado competitivo: su marcada discontinuidad, y su «ciclicidad» no periódica. Esta investigación bien podría ser el único ejemplo de la aplicación a la economía de una invariancia-simetría al estilo de la física.

En 1961 generalicé el concepto de invariancia por cambio de escala para abordar varios fenómenos de ruido. Todos estos esfuerzos fueron realizados casi sin ningún contacto con físicos o matemáticos. Pero, durante mi estancia como profesor visitante en Harvard entre 1962 y 1964, Garret Birkhoff señaló algunas analogías entre mi modo de abordar esos problemas y la teoría de la turbulencia iniciada por Richardson y culminada por Kolmogorov en 1941. Aunque yo había oído hablar de esta teoría cuando era estudiante, su influencia no era necesariamente mayor que la de la tradición filosófica descrita en el capítulo 40 en el apartado sobre ARISTÓTELES. En cualquier caso, ¡todo esto ocurría mucho antes de que los físicos se enamoraran de la invariancia por cambio de escala!

Además, las lecciones de G. W. Stewart sobre la intermitencia de la turbulencia me dieron a conocer el trabajo de Kolmogorov (1962). El manuscrito de este trabajo y el de Berger y Mandelbrot (1963) salieron con pocas semanas de diferencia! Mientras Kolmogorov se planteaba un problema más interesante, mi utillaje era más potente, y no me costó nada adaptarlos a la turbulencia, obteniendo la parte esencial de los capítulos 10 y 11.

Finalmente, me enteré de los ruidos  $1/f$ , de Hurst (1951, 1955), de Ri-

chardson (1961), y del asunto del agrupamiento de las galaxias. Y de nuevo sentí que una buena descripción y la exploración de sus consecuencias constituían una gran ayuda para la comprensión de cada caso. Por contra, los modelos primitivos que concebí no parecían sino adornos inútiles añadidos a la descripción. Distraían de las ideas geométricas fundamentales que estaba formulando, y en realidad, a mi modo de ver, entorpecían la comprensión. Seguí sosteniéndolas, aun cuando mis artículos eran rechazados. De nuevo, las explicaciones de los capítulos 11 y 20 son harina de otro costal, y me recreo en ellas.

Así pues, la busca de la invariancia por cambio de escala se fue revitalizando y enriqueciendo constantemente con nuevas ideas y nuevos útiles, gracias a los cambios de ámbito de investigación, y condujeron al nacimiento gradual de una teoría global. Esta no siguió en modo alguno el patrón «descendente» de ser primero revelada, luego formulada y después «aplicada». *En todo momento sorprendió a todo el mundo, y a mí el primero, creciendo desde un modesto fondo hasta una cumbre cada vez más (¡vertiginosamente!) ambiciosa.* Otras visiones generales anteriores se dieron en el Congreso Internacional de Lógica y Filosofía de la Ciencia (1964), en las Conferencias Trumbull de Yale (1971) y en el Collège de Francia (1973 y 1974).

La cara geométrica de esta teoría fue cada vez más importante y constituyó la geometría fractal. Dado el fuerte regusto geométrico de los primeros estudios de la turbulencia y de los fenómenos críticos, se podría haber esperado que en alguno de estos contextos se desarrollara una teoría fractal. Pero no fue así.

Hoy en día, los casos en que técnicas y conceptos nuevos entran en la ciencia a través de ramas poco competitivas son raros, y por ende anómalos. La geometría fractal es un ejemplo más de tal anomalía histórica.





## Apéndices



## Actualización añadida en la segunda impresión (1982)

### *Jornadas de Courchevel: adelanto de las actas de próxima aparición*

En el tiempo transcurrido entre la entrega de este libro al editor y su publicación, y luego en el breve periodo que tardó en agotarse la primera edición, la geometría fractal no permaneció inactiva: siguió avanzando con una velocidad creciente en los dominios en los que ya había sido aceptada y entró en unos cuantos ámbitos nuevos.

En particular, en julio de 1982 organicé un encuentro de una semana de duración sobre fractales, en Courchevel (Francia), y muchos nuevos avances se presentaron allí por primera vez. El principal objetivo de esta actualización es resumir estos resultados y otros íntimamente relacionados con ellos. Algunas referencias suplementarias (marcadas con un asterisco) llaman la atención sobre otros trabajos presentados en ese encuentro.

Más generalmente, cada vez resulta más difícil creer que, hace sólo unos pocos años, la geometría fractal de la naturaleza se reducía casi exclusivamente a mi trabajo y al de colaboradores próximos. Sin embargo, lo más que puedo hacer es llamar la atención sobre algunos nuevos autores, por medio de referencias suplementarias adicionales.

Los temas se han dispuesto más o menos en el mismo orden que en el cuerpo principal del libro.

### *La definición de «fractal»*

Este tema tan soso es por desgracia inevitable, pero gracias a Dios nos ocupará poco espacio.

Con gran disgusto mío, el término «dimensión de Hausdorff» ha empezado a aplicarse indiscriminadamente a cualquiera de las dimensiones enumeradas en el capítulo 39 y a nuevas variantes de éstas. Lo mismo ocurre con la «dimensión de Minkowski», expresión usada una vez en la

página 164 de los *Objets Fractals* de 1975 para denotar la dimensión de Bouligand. Según parece, ciertos artículos escritos en idiomas extranjeros, cuyos autores y temas dejan de ser temidos como consecuencia de mi trabajo, adquieren prestigio, y se les atribuye por tanto todo un conjunto de hazañas ... o delitos.

Otros autores se pasan por el otro extremo: dan excesiva importancia a los métodos usados más a menudo para *estimar D* en la práctica como la dimensión de semejanza, tal como se usaba en las págs. 187 y 308, el exponente de la relación masa-radio o un exponente espectral) y los elevan al rango de definición de «la» dimensión fractal.

Es una pena que la mayoría de estas reacciones al *Fractals* de 1977 se manifestaran un poco demasiado tarde. Me habrían animado a volver en este libro al enfoque genial tomado en los *Objets fractals* de 1975: dejar el término «fractal», sin una definición rebuscada, emplear «dimensión fractal» como expresión genérica aplicable a *todas* las variantes del capítulo 39, y en cada caso concreto usar la definición más apropiada.

### *Turbulencia fractal homogénea*

Mi principal conjetura sobre la turbulencia es el tema del capítulo 11: la turbulencia en el espacio real es un fenómeno soportado por un conjunto fractal de dimensión  $D \sim 2,5$  a  $2,6$ .

Continúan los trabajos numéricos en apoyo de esta conjetura, como lo atestigua Chorin (1982a, b).

Además de ello, Hentschel y Procaccia (1982) han propuesto recientemente un enfoque totalmente diferente, que maneja el alargamiento y plegamiento de los vórtices del capítulo 10 con los métodos desarrollados para tratar con los polímeros del capítulo 36, y sugiere una relación entre la dimensión de la turbulencia y la de los polímeros.

### *Fracturas metálicas y fractales (B. B. M., Passoja y Paullay, 1983)*

Como se señaló en el capítulo 1, los neologismos requieren un cierto cuidado y habría que evitar los conflictos entre significados. Una revisión casual sugirió que, si es muy poco probable que las superficies de fractura de los vidrios sean fractales, muchas superficies de fractura de piedras o metales *sí* lo son. Este indicio informal sugirió que *fractal* y *fractura* no estarían en conflicto.

Mandelbrot, Passoja y Paullay (1983) refuerzan esta impresión infor-

mal mediante muchas pruebas experimentales con probetas de tracción de acero 1040, 1095 y Cor-99 y con probetas de resistencia de acero Maraging. Se comprueba el carácter fractal y se estima el valor de la dimensión  $D$  usando métodos como los usados en los capítulos 5 y 28 para el relieve. El éxito de estos métodos es notable, pues las superficies de las fracturas son claramente *no gaussianas* y completamente *distintas* del relieve.

Recuérdese que los capítulos 5 y 28 procedían a través de las costas de las islas y las secciones verticales. Desgraciadamente, las fracturas no presentan islas de manera natural, y es raro encontrar una dirección que satisfaga la definición de vertical (como la dirección según la cual la altura es una función univaluada de la posición en el plano horizontal).

No obstante, podemos definir una vertical informal por la condición de que la altura sea univaluada para «la mayoría» de puntos. Hacemos luego un análisis espectral de las alturas a lo largo de secciones horizontales rectilíneas y representamos  $\log(\text{energía espectral para frecuencias superiores a } f)$  en función de  $\log f$ .

Además, resulta útil crear «islas rebanada» cortando la muestra según planos casi horizontales (primero se niquela la muestra con un depósito químico de níquel y se monta en una montura de epoxy por impregnación al vacío). A continuación usamos un patrón fijo para medir el área y el perímetro de cada isla sobre una imagen digitalizada, y representamos gráficamente el logaritmo como se sugiere en el capítulo 12, para comprobar la validez del análisis de la dimensión fractal.

Como muestran los dos ejemplos de la página 597, muchísimas superficies de fractura siguen el modelo fractal admirablemente bien: ambos diagramas son muy aproximadamente rectos y sus pendientes dan esencialmente los mismos valores de  $D$ . Además, si se someten al mismo procedimiento distintas muestras del mismo metal se obtiene la misma  $D$ . Esto contrasta con las estimaciones tradicionales de la rugosidad, que son difícilmente repetibles.

Repetiendo un comentario de la página 163 relativo a la lámina 168, en metalurgia hay muy pocos gráficos que afecten a todos los datos disponibles y a una gama muy amplia de tamaños, y que sean tan directos como los nuestros.

Los datos son tan buenos que podemos proceder sin más a una comparación más fina. Observamos que  $|D(\text{espectral}) - D(\text{islas})|$  es sistemáticamente del orden de unas pocas centésimas. Una primera causa posible es un sesgo en la estimación. Por ejemplo, el espectro de altas frecuencias está sobrecargado por el ruido de la medición, y por tanto debe ignorarse. Además, tratamos los «lagos» y las «islas cercanas a la costa» del

modo más fácil: contamos los unos y despreciamos las otras por no estar bien definidas.

Pero la discrepancia podría ser real. En realidad, la cuasi identidad de los valores de  $D$  sugería que los materiales que estábamos estudiando eran muchísimo más isótropos de lo esperado. Y para muestras que *tenían que ser isótropas* por el modo en que habían sido preparadas,  $D$ (espectral) y  $D$ (islas) eran en efecto claramente distintas.

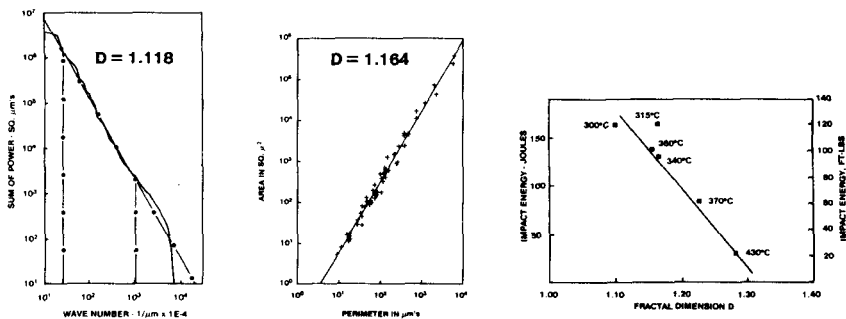
Una explicación alternativa de los distintos valores de  $D$  es que la fractura podría ser isótropa pero no autosemejante, con una  $D$  que varíe con la escala (capítulo 13). Al dar distinto peso a escalas distintas, nuestros dos métodos reflejarían la variación de la  $D$ . Y, en efecto, para algunos metales examinados, las islas rebanada o los diagramas espectrales mostraban dos zonas distintas claramente rectas, y para otros metales los diagramas eran más complejos aún.

Para relacionar  $D$  con otras características del metal, tomamos probetas de resiliencia de Charpy de acero Maraging de grado 300 y tratadas térmicamente a distintas temperaturas. El diagrama resultante, presentado también al final de la página siguiente, muestra también una relación inequívoca entre la energía de impacto y el valor de  $D$ .

Una vez comprobados los hechos, vale la pena reflexionar sobre las posibles causas. Según nuestra opinión, en la fractura interviene una forma atípica de percolación. Recordemos que, al romper en dos una muestra, los huecos que inevitablemente hay alrededor de las inclusiones aumentan de tamaño y se agregan formando hojas que dividen la muestra en varias partes. Si el crecimiento de un hueco fuera independiente de su posición, la percolación sería como en el capítulo 13. En consecuencia, la dimensión de la fractura tomaría algún valor universal independiente del material. En realidad, tan pronto el crecimiento de un hueco local hace que se una a otros formando pequeñas hojas locales, aumentan las tensiones sobre los ligamentos soporte y el hueco crece a un ritmo que depende de su posición. No cabe duda de que esta variabilidad depende de la estructura, y por tanto la  $D$  no tiene por qué ser universal.

*Formas de las zonas lluviosas y de las nubes*  
(Lovejoy, 1981, Lovejoy y B. B. M., 1983)

La notable relación área-perímetro de Lovejoy (lámina 168) es un incentivo para hacer lo mismo que en el capítulo 28 para el relieve terrestre; a saber, generar mapas fractales de nubes o de zonas lluviosas que ni el ojo ni la medida pudieran distinguir de los mapas meteorológicos.



Un ingrediente vital en el caso de las zonas lluviosas nos lo proporciona el descubrimiento de Lovejoy (1981) de que las discontinuidades en las precipitaciones siguen precisamente la misma distribución de probabilidad hiperbólica que las discontinuidades en los precios de las mercancías según Mandelbrot (1963b, véase el capítulo 37).

Lovejoy y Mandelbrot (1983) se basan en este descubrimiento. Se demuestra que las discontinuidades distribuidas hiperbólicamente concuerdan con la bien sabida observación de que las discontinuidades en las precipitaciones se producen según «frentes» aproximadamente rectilíneos. Para mantener la invariancia por cambio de escala, se introduce una lista conveniente de exponentes, que recuerdan los de la teoría de fenómenos críticos, y más aún los exponentes de turbulencia introducidos por Mandelbrot (1976o). El resultado es sumamente provechoso.

### *Cambios de escala, fractales y terremotos (Kagan, Knopoff y Andrews)*

Recordemos lo que decíamos en el capítulo 28, que el relieve terrestre es un fractal escalante que se puede generar por superposición de «fallas» en bruto. Si uno cree esto, estará preparado para oír que los terremotos, que son cambios dinámicos del relieve, son autosemejantes, esto es, que ninguna escala concreta tiene un papel privilegiado en sus patrones de magnitud-distancia-tiempo, y que su geometría es fractal. Estos son en verdad los principales mensajes que retiene un estudiante de fractales si lee (como aprovecho aquí para aconsejarle) a Kagan y Knopoff (1978, 1980, 1981) y a Andrews (1980-1981).

Es aleccionador comprobar que Omori descubrió la invariancia por cambio de escala en los terremotos hace ya casi cien años, y sin embargo

el grueso del trabajo estadístico sobre terremotos siguió basándose en el postulado de que los sucesos eran poissonianos. Otra vez, poco bien se puede esperar (como argumento en el capítulo 42) cuando una ciencia cede a las presiones sociales que priman la modelización y la teorización mientras desdeñan la «mera» descripción sin «teoría».

### *Interfases fractales en las pilas de litio (A. Le Méhauté et al.)*

Una pila eléctrica tiene que almacenar electricidad en grandes cantidades y descargarla rápidamente. Si todo lo demás es fijo, la capacidad de almacenaje depende del volumen, pero la velocidad de descarga depende de la superficie. Esta propiedad no es desconocida para el estudioso de los fractales (capítulos 12 y 15) y convenció a Alan Le Méhauté de que el compromiso entre capacidad y descarga plantea un problema fractal.

Como una pila cuyas secciones planas sean terágonos de Peano (p. e., lámina 104) no se puede realizar en la práctica, Le Méhauté et al. (1982) estudian teóricamente diseños verosímiles y también examinan pilas reales. La efectividad de la geometría fractal es muy sorprendente.

### *Racimos de percolación críticos*

PERCOLACIÓN EN REDES: EXAMEN DEL MODELO DEL CAPÍTULO 13. El modelo fractal concreto de racimos por contacto en la percolación de Bernouilli, propuesto en el capítulo 13, pide a voces una comprobación experimental. Cosa que ya se ha hecho por fin.

Kapitulnik, Aharony, Deutscher y Stauffer (1983) estudian el número de nudos de un racimo que se encuentran a una distancia menor que  $R$  de un origen dado, y recuperan la  $D \sim 1,9$  correcta. Además, recuperan  $\xi$  a partir de la transición entre el dominio fractal y el dominio de homogeneidad.

PERCOLACIÓN EN CAPAS DELGADAS DE ORO Y PLOMO. La percolación de Bernouilli es, por supuesto, un proceso matemático. Hammersley la introdujo con la esperanza de que sirviera para ilustrar y aclarar muchos fenómenos naturales. La aplicabilidad de la geometría fractal de la percolación de Bernouilli fue comprobada con oro no de ley por Voss, Laibowitz y Alessandrini (1982), y con plomo noble por Kapitulnik y Deutscher (1982). Por ejemplo, los que estudiaban el Au preparaban capas delgadas a temperatura ambiente mediante evaporación por haz de electrones sobre ventanas de  $\text{Si}_3\text{N}_4$  amorfo de 30 nm de grueso sobre una oblea de Si.



El grosor de la muestra se hacía variar para producir simultáneamente toda una gama de muestras, de las aislantes a las conductoras. Las predicciones del capítulo 13 se satisfacen puntualmente.

*Modelos fractales de baja lagunaridad de algunos espacios formales en física (Gefen, Mair, B. B. M. y Aharoni, 1983)*

En mecánica estadística es útil postular espacios de dimensión fraccionaria. Para los matemáticos estos espacios son muy desconcertantes, pues su construcción no está en ninguna parte, y tampoco se ha demostrado su existencia ni su unicidad. Sin embargo, se obtienen resultados físicos útiles suponiendo que dichos espacios existen y poseen algunas propiedades importantes y deseables: son invariantes por traslación, y las integrales y relaciones de recurrencia de turno se pueden obtener por prolongación analítica formal de los resultados para espacios euclídeos.

Estos espacios dejan perplejo al estudioso de los fractales. De una parte, existen *muchos* espacios alternativos fractalmente interpolados, con lo que la interpolación habría sido indeterminada. De otra, los fractales que Gefen, Mandelbrot y Aharoni (1980) aplican a la física no son invariantes por traslación. En lo que se refiere a esto, los fractales podrían parecer inferiores a los espacios fraccionarios postulados.

Una crítica similar levantada por mi primer modelo de la distribución de galaxias sugirió una respuesta. Aunque es imposible que un fractal sea *exactamente* invariante por traslación, los capítulos 34 y 35 demuestran que se puede llegar tan cerca como se quiera de esta propiedad dando a la lagunaridad un valor suficientemente bajo.

A la luz de esto, Gefen, Meir, Mandelbrot y Aharoni (1983) consideran una cierta sucesión de alfombras de Sierpinski (capítulo 14) cuyas lagunaridades tienden a 0. Se calculan ciertas propiedades físicas y se demuestra que sus límites para lagunaridad nula son idénticos a los de las propiedades correspondientes de los espacios fraccionarios postulados.

*El tamiz de Sierpinski: juguete de los físicos*

A los físicos les gustan tanto los modelos manejables que cualquier construcción que prometa cálculos sin necesidad de recurrir a aproximaciones atraerá la atención de muchos.

La más importante de entre las figuras ramificadas examinadas en el capítulo 14 es la alfombra de Sierpinski, pero es difícil trabajar con ella.

En cambio, el tamiz de Sierpinski es fácil de manipular. Lo usan de manera divertida y provechosa Stephen (1981), Rammal y Toulouse (1982, 1983) y Alexander y Orbach (1982).

□ Contra mi costumbre, acuñé la expresión “gasket” (junta) sin un equivalente francés. Los autores de un diccionario matemático no sabían que yo tenía en mente la parte que impide las fugas en los motores, y un diccionario corriente les condujo a barcos y cuerdas, y por tanto a *baderne* (baderna) o *garcette* (garceta). ¡Como la palabra no correspondía, se redefinió para ser aplicada al complemento de lo que yo había querido decir! Yo prefiero *tamis* (tamiz). ■

### *Autómatas celulares y fractales*

Preparé el ejemplo de la pág. 460 para mostrar que el orden global puede ser el resultado de fuerzas que actúan solamente entre vecinos. Alguien pronto indicó que este ejemplo implica un «autómata celular» según John von Neumann (Burks 1970). Ullam había demostrado (Burks 1970) que el resultado de tales autómatas puede ser muy enrevesado y parecer aleatorio. Willson (1982), Wolfram (1983) y Vichniac (1983) observan que este resultado puede, de hecho, ser fractal.

### *Iteración de $z \rightarrow z^2 - \mu$ en el plano complejo: nuevos resultados y demostraciones*

Mandelbrot (1983p) contiene muchas ilustraciones para las que faltó espacio en el capítulo 19, e informa de nuevas observaciones.

Dos observaciones importantes del capítulo 19 se han confirmado ya matemáticamente.

Douady y Hubbard (1982), y Douady (1983), demuestran que el conjunto cerrado  $M$  es en efecto conexo. Su método consiste en aplicar el exterior de  $M$  en el de un círculo.

Ruelle (1982) demuestra que la dimensión de Hausdorff de un dragón de Julia es una función analítica del parámetro  $\mu$ .

### *Las aplicaciones cuadráticas en los cuaterniones*

En el capítulo 19 se establecía que las propiedades de la aplicación  $z \rightarrow z^2 - \mu$  para  $z$  reales se entienden mejor como casos especiales de sus

propiedades para  $z$  y  $\mu$  complejos, y que la iteración para valores de  $z$  complejos produce unos gráficos apasionantes e inesperados. Era natural, pues, buscar nuevas ideas y nueva belleza en una nueva generalización de  $z$ . Norton sugirió que el siguiente escalón natural son los cuaterniones de Hamilton. Introducidos en 1847, los cuaterniones son un concepto conocido en matemáticas y física, si bien se han mantenido siempre en un papel marginal. En el contexto de la iteración, no obstante, los cuaterniones han resultado sumamente provechosos tanto en el aspecto matemático como en el aspecto estético, como pronto se verá detalladamente en próximos artículos de Norton y yo mismo.

Una objeción que se hace a menudo contra los cuaterniones es que, mientras los números complejos sumergen un espacio con  $E = 1$  en otro con  $E = 2$ , que puede ser representado, los cuaterniones implican un salto a un espacio con  $E = 4$ , que no puede representarse. Otra objeción es que el producto de cuaterniones no es conmutativo: en particular, las aplicaciones  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$ ,  $z \rightarrow z^2 - \mu$ ,  $z \rightarrow \mu z^2 - 1$ , y  $z \rightarrow \mu^\alpha z^2 \mu^{1-\alpha}$  son distintas si  $z$  es un cuaternión.

Para ilustrar las interconexiones topológicas de los repulsores fractales de la aplicación cuadrática en los cuaterniones, Norton (1982) desarrolla nuevas técnicas infográficas. Los conjuntos de todos los cuaterniones cuyas iteraciones no acaban en el infinito se examinaron por medio de sus secciones tridimensionales. Sus secciones según planos complejos son, a su vez, los dragones fractales del capítulo 19.

La no conmutatividad del producto de cuaterniones ha resultado ser una ventaja fascinante y totalmente inesperada. Para explicarlo, considérese la lámina C6. Pregunta: los dominios amarillo oscuro, en su totalidad o en parte, ¿están interconectados en el espacio de cuaterniones? Respuesta: en general, cada forma de escribir  $z \rightarrow z^2 - \mu$  o  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$  (antes de pasar al espacio de los cuaterniones) induce unos enlaces totalmente distintos entre los dominios amarillo oscuro. De ahí que haga falta más información para concretar las interconexiones topológicas.

Como ejemplo que no induce a confusión, examínese la lámina 604, que es una adaptación de Norton (1982) e ilustra un caso simple con un ciclo cuaternario. Cada segmento principal del dragón obtenido por sección compleja está sumergido en un segmento principal de la figura espacial. En este caso, las secciones espaciales principales son cuasiinvariantes por rotación, y están rodeadas por multitud de cinturones poco ajustados que conectan las secciones secundarias. La lámina II muestra un fractal espacial distinto obtenido más o menos del mismo modo. Stein (1983) reproduce más ilustraciones.

Un contemporáneo de Fatou y Julia, S. Lattés, escogió una razón de cuarto orden entre polinomios cuyas iteraciones son «caóticas» en todo el plano, esto es, no atraídas por ningún conjunto más pequeño. Este ejemplo nos incita a buscar comportamientos caóticos en transformaciones de órdenes inferiores. Un segundo tema a tratar en esta sección son las clases de universalidad de las formas de las islas en los  $\lambda$ -mapas.

$\lambda$ -MAPA DE  $z \rightarrow \lambda(z - 1/z)$ . En el caso especial  $\lambda = 1/2$ ,  $y = -iz$  sigue la ley  $y - 1/2(y + 1/y)$ , que se obtiene de la aplicación del método de Newton en la búsqueda de las raíces de  $z^2 - 1$ . Nótese que podemos escribir  $z = \cotg\theta$ , con lo que  $1/2(z - 1/z)$  se convierte en  $(\cos^2\theta - \sin^2\theta) / 2\cos\theta\sin\theta = \cotg2\theta$ . Así pues,  $z \rightarrow 1/2(z - 1/z)$  sólo es un modo curioso de escribir  $\theta \rightarrow 2\theta$ . Para estudiar otros valores de  $\lambda$  se dibujó un mapa análogo al de las láminas 268 y 269, parte del cual se muestra en la lámina X.

Observamos una forma muy interesante de «universalidad»: las «moléculas isla» de la lámina X tienen precisamente la misma forma que en el caso de la transformación cuadrática. Así pues, las láminas X y 188-189 se construyen con los mismos «bloques elementales». En el disco abierto  $|\lambda| > 1$ , la iteración de  $z \rightarrow \lambda(z - 1/z)$  tiende a infinito excepto para un polvo de puntos  $z$ . En el disco blanco  $|\lambda + i/2| < 1/2$ , la iteración tiene dos puntos límite. Cuando  $\lambda$  cae en una de las «puntas» de la «corona» negra, hay un ciclo límite de tamaño superior a 2, aunque no mucho mayor. En cuanto a los valores de  $\lambda$  del interior de la corona del  $\lambda$ -mapa, dan lugar a movimiento caótico.

□ Al realizar el cálculo se usaron las hipótesis simplificadoras siguientes. A) Cuando  $\lambda$  conduce a un ciclo muy grande, pertenece a un átomo tan pequeño que no vale la pena buscarlo. B) Todos los ciclos convenientemente pequeños caen «cerca» de  $z = 0$ . Así pues, una órbita que se «aleje» de  $z = 0$  será presumiblemente caótica. La aproximación no tiene una justificación concreta, pero el  $\lambda$ -mapa que genera está formado por partes que nos resultan familiares, por lo que el método parece razonable. ■

CONJUNTOS DE JULIA DE  $\lambda(z - 1/z)$ . Cuando  $|\lambda| > 1$ , el infinito es un punto atractor, y el conjunto de Julia es, como en el capítulo 19, la frontera del conjunto de los puntos  $z$  que no convergen hacia infinito. Un ejemplo de conjunto de Julia definido como la frontera de las cuencas de atracción de  $\lambda(z - 1/z)$  se encuentra dibujada en la lámina VIII, frente al prólogo.

CLASES DE «UNIVERSALIDAD» DE UN  $\lambda$ -MAPA. En muchos otros  $\lambda$ -ma-

pas, uno se encuentra las mismas «moléculas isla» que para  $z^2 - \mu$ , excepto por el hecho de que determinados condicionantes específicos pueden dar lugar a un «continente» atípico.

Además, los  $\lambda$ -mapas de  $z \rightarrow z^m - \lambda$  también se dividen en un continente y unas islas. Sin embargo, cada  $m$  induce una forma muy característica de los átomos y de las moléculas isla.

Cuando el comportamiento local de  $z \rightarrow f(z)$  es el mismo cerca de todos los  $z$  críticos donde  $f'(z) = 0$ , la forma de las islas está localmente determinada. Cuando  $f(z)$  se comporta de modo distinto cerca de distintos  $z$  críticos, en el  $\lambda$ -mapa interviene más de un tipo «universal» de bloque elemental. Buscamos una «tabla de Mendeleiev» para este problema.



## Lista de referencias

Cada entrada de esta lista contiene el nombre de un autor o editor, y una fecha. Una fecha seguida de — se refiere al primer volumen de una colección de varios volúmenes. En casos ambiguos, la fecha va seguida de una letra, que en la mayoría de casos está relacionada con el título de la publicación o con el nombre de la revista en la que apareció. Este nuevo convenio pretende tener una utilidad nemotécnica.

Como las revistas contenidas en esta lista pertenecen a disciplinas distintas, sus títulos no están tan abreviados como de costumbre.

Se incluyen pocas referencias generales, y la relación tampoco pretende, ni remotamente, una cobertura equilibrada ni completa de los diversos ámbitos tratados en esta obra.

- ABELL, G. O. 1965. Clustering of galaxies. *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics* **3**, 1-22.
- ABBOT, L. F. & WISE, M. B. 1981. Dimension of a quantum-mechanical path. *American J. of Physics* **49**, 37-39.
- ADLER, R. J. 1981. *The geometry of random fields*, New York: Wiley.
- ALEXANDER, S. S. 1961. Price movements in speculative markets: or random walks. *Industrial Management Review of M.I. T.* **2**, Part 2 7-26. Reprint in *The random character of stock market prices*. Ed. P. H. Cootner, 199-218. Cambridge MA: MIT Press, 1964.
- ALEXANDER, S. S. 1964. Price movements in speculative markets: No. 2. *Industrial Management Review of M.I. T.* **4**, Part 2, 25-46. Reprint in Cootner (preceding ref.) 338-372.
- ALLEN, J. P., COLVIN, J. T., STINSON, D. G., FLYNN, C. P. & STAPLETON, H. J. 1981. Protein conformation from electron spin relaxation data (preprint). Champaign, Illinois.
- APOSTEL, L., MANDELROT, B. B & MORF, A. 1957. *Logique, langage et théorie de l'information*. Paris: Presses Universitaires de France.
- ARTHUR, D. W. G. 1954. The distribution of lunar craters. *J. of the British Astronomical Association* **64**, 127-132.
- AUBRY, S. 1981. *Many defect structures, stochasticity and incommensurabi-*

- lity. *Les Houches 1980*. Ed. R. Balian and M. Kléman. New York: NorthHolland, 1981.
- AVRON, J. E. & SIMON, B. 1981. Almost periodic Hill's equation and the rings of saturn. *Physical Review Letters* **46**, 1166-1168.
- AZBEL, M. YA. 1964. Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field. *Soviet Physics JETP* **19**, 634-645.
- BACHELIER, L. 1900. *Théorie de la spéculation*. Thesis for the Doctorate in Mathematical Sciences (defended March 29, 1900). *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* **III-17**, 21-86. Translation in *The random character of stock market prices*. Ed. P. H. Cootner, 17-78. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.
- BACHELIER, L. 1914. *Le jeu, la chance et le hasard*. Paris: Flammarion.
- BALMINO, G., LAMBECK, K. & KAULA, W. M. 1973. A spherical harmonic analysis of the Earth's topography. *J. of Geophysical Research* **78**, 478-481.
- BARBER, M. N. & NINHAM, B. W. 1970. *Random and restricted walks: theory and applications*. New York: Gordon & Breach.
- BARRENBLOTT, G. I. 1979. *Similarity, selfsimilarity, and intermediate asymptotics*. New York: Plenum.
- BARTLETT, J. 1968. *Familiar quotations* (14th ed.) Boston: Little Brown.
- BATCHELOR, G. K. 1953. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press.
- BATCHELOR, G. K. & TOWNSEND, A. A. 1949. The nature of turbulent motion at high wave numbers. *Pr. of the Royal Society of London A* **199**, 238-255.
- BATCHELOR, G. K. & TOWNSEND, A. A. 1956. Turbulent diffusion. *Surveys in Mechanics* Ed. G. K. Batchelor & R. N. Davies. Cambridge University Press.
- BERGER, J. M. & MANDELBROT, B. B. 1963. A new model for the clustering of errors on telephone circuits. *IBM J. of Research and Development* **7**, 224-236.
- BERMAN, S. M. 1970. Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties. *Annals of Mathematical Statistics* **41**, 1260-1272.
- BERRY, M. V. 1978. Catastrophe and fractal regimes in random waves & Distribution of nodes in fractal resonators. *Structural stability in physics*. Ed. W. Güttinger & H. Eikemeier, New York: Springer.
- BERRY, M. V. 1979. Diffractals. *J. of Physics* **A12**, 781-797.
- BERRY, M. V. & HANNAY, J. H. 1978. Topography of random surfaces. *Nature* **273**, 573.
- BERRY, M. V. & LEWIS, Z. V. 1980. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function. *Pr. of the Royal Society London A* **370**, 459-484.
- BESICOVITCH, A. S. 1934. On rational approximation to real numbers. *J. of the London Mathematical Society* **9**, 126-131.



- BESICOVITCH, A. S. 1935. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system (On sets of fractional dimensions II). *Mathematische Annalen* **110**, 321-330.
- BESICOVITCH, A. S. & TAYLOR, S. J. 1954. On the complementary interval of a linear closed set of zero Lebesgue measure. *J. of the London Mathematical Society* **29**, 449-459.
- BESICOVITCH, A. S. & URSELL, H. D. 1937. Sets of fractional dimensions (V): On dimensional numbers of some continuous curves. *J. of the London Mathematical Society* **12**, 18-25.
- BEYER, W. A. 1962. Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series. *Pacific J. of Mathematics* **12**, 35-46.
- BIDAUX, R., BOCCARA, N., SARMA, G., SÈZE, L., DE GENNES, P. G. & PARODI, O. 1973. Statistical properties of focal conic textures in smectic liquid crystals. *Le J. de Physique* **34**, 661-672.
- BIENAYMÉ, J. 1853. Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. *Comptes Rendus* (Paris) **37**, 309-329.
- BILLINGSLEY, P. 1967. *Ergodic theory and information*. New York: Wiley.
- BILLINGSLEY, P. 1968. *Convergence of probability measures*. New York: J. Wiley.
- BIRKHOFF, G. 1950-1960. *Hydrodynamics* (1st and 2nd eds.). Princeton University Press.
- BLUMENTHAL, L. M. & MENGER, K. 1970. *Studies in geometry* San Francisco: W.H. Freeman.
- BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. 1960c. A dimension theorem for sample functions of stable processes. *Illinois J. of Mathematics* **4**, 308-316.
- BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. 1960m. Some theorems on stable processes. *Tr. of the American Mathematical Society* **95**, 263-273.
- BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. 1962. The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process. *Illinois J. of Mathematics* **6**, 370-375.
- BOCHNER, S. 1955. *Harmonic analysis and the theory of probability*. Berkeley: University of California Press.
- BONDI, H. 1952; 1960. *Cosmology*. Cambridge University Press.
- BOREL, E. 1912-1915. Les théories moléculaires et les mathématiques. *Revue Générale des Sciences* **23**, 842-853. Translated as Molecular theories and mathematics. *Rice Institute Pamphlet* **1**, 163-193. Reprint in Borel 1972-, **III**, 1773-1784.
- BOREL, E. 1922. Définition arithmétique d'une distribution de masses s'étendant à l'infini et quasi périodique, avec une densité moyenne nulle. *Comptes Rendus* (Paris) **174**, 977-979.
- BOREL, E. 1972-. *Oeuvres de Emile Borel*. Paris: Editions du CNRS.
- BOULIGAND, G. 1928. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. *Bulletin des Sciences Mathématiques* **II-52**, 320-334 & 361-376.

- BOULIGAND, G. 1929. Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble plan. *Bulletin des Sciences Mathématiques* **II-53**, 185- 192.
- BOURBAKI, N. 1960. *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.
- BOYD, D. W. 1973a. The residual set dimension of the Apollonian packing. *Mathematika* **20**, 170-174.
- BOYD, D. W. 1973b. Improved bounds for the disk packing constant. *Aequationes Mathematicae* **9**, 99-106.
- BRAGG, W. H. 1934. Liquid crystals. *Nature* **133**, 445 - 456.
- BRAY, D. 1974. Branching patterns of individual sympathetic neurons in culture. *J. of Cell Biology* **56**, 702-712.
- BRODMANN, K. 1913. Neue Forschungsergebnisse der Grossgehirnanatomie... *Verhandlungen der 85 Versammlung deutscher Naturforscher und Aertze in Wien*, 200-240.
- BROLIN, H. 1965. Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv för Matematik* **6**, 103-144.
- BROUWER, L. E. J. 1975-. *Collected works*. Ed. A. Heyting and H. Freudenthal. New York: Elsevier North Holland.
- BROWAND, F. K. 1966. An experimental investigation of the instability of an incompressible separated shear layer. *J. Fluid Mechanics* **26**, 281-307.
- BROWN, G. L. & ROSHKO, A. 1974. On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *J. of Fluid Mechanics* **64**, 775-816.
- BRUSH, S. G. 1968. A history of random processes. I. Brownian movement from Brown to Perrin. *Archive for History of Exact Sciences* **5**, 1-36. Brush 1976, 655-701.
- CANTOR, G. 1872. Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* **5**, 123- 132.
- CANTOR, G. 1883. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. *Mathematische Annalen* **21**, 545-591. Also in Cantor 1932. Trans. H. Poincaré, as Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Mathematica* **2**, 381-408.
- CANTOR, G. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Ed. E. Zermelo. Berlin: Teubner. Olms reprint.
- CANTOR, G. & DEDEKIND, R. 1937. *Briefwechsel. (=Selected Letters)* Ed. E. Noether & J. Cavailles. Paris: Hermann.
- CANTOR, G. & DEDEKIND, R. 1962. *Correspondence*. (=French translation of the 1937 *Briefwechsel*, by Ch. Ehresmann). Insert in Cavailles 1962.
- CANTOR, G. & DEDEKIND, R. 1976. *Unveröffentlichtlicher Briefwechsel. (=unpublished letters)* Appendice XL of Dugac 1976a.
- CARATHÉODORY, C. 1914. Über das lineare Mas von Punktmengen - eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematischphysikalische Klasse* 404-426.

- Also in Carathéodory 1954- *Gesammelte mathematische Schriften*. Munich: Beck, **4**, 249-275.
- CARLESON, L. 1967. *Selected problems on exceptional sets*. Princeton, NJ: Van Nostrand.
- CARTAN, H. 1958. Sur la notion de dimension. *Enseignement Mathématique*, Monographie No. **7**, 163-174.
- CARTIER, P. 1971. Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres. *Séminaire de Probabilités V (Strasbourg)*. *Lecture Notes in Mathematics* **191**, 58-75. New York: Springer.
- CAUCHY, A. 1853. Sur les résultats les plus probables. *Comptes Rendus (Paris)* **37**, 198-206.
- CAVAILLÈS, J. 1962. *Philosophie mathématique*. Paris: Hermann.
- CELLÉRIER, CH. 1890. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Bulletin des Sciences Mathématiques* **14**, 142-160.
- CESÀRO, E. 1905. Remarques sur la courbe de von Koch. *Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli* **XII**, 1-12. Also in Cesàro 1964, **II**, 464-479.
- CESÀRO, E. 1964—. *Opere scelte*. Rome: Edizioni Cremonese.
- CHANDRASEKHAR, S. 1943. Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of Modern Physics* **15**, 1-89. Reprinted in *Noise and Stochastic Processes*. Ed. N. Wax. New York: Dover.
- CHARLIER, C. V. L. 1908. Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* **4**, 1 - 15.
- CHARLIER, C. V. L. 1922. How an infinite world may be built up. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik* **16**, 1-34.
- CHENTSOV, N. N. 1957. Lévy's Brownian motion for several parameters and generalized white noise. *Theory of Probability and its Applications* **2**, 265-266.
- CHORIN, A. J. 1981. Estimates of intermittency, spectra, and blow up in developed turbulence. *Communications in Pure and Applied Mathematics* **34**, 853-866.
- CHORIN, A. J. 1982. The evolution of a turbulent vortex. To appear.
- CLAYTON, D. D. 1975. *Dark night sky, a personal adventure in cosmology*. New York: Quadrangle.
- COLLET, P. & ECKMANN, J. P. 1980. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Boston: Birkhauser.
- COMROE, J. H., Jr., 1966. The lung. *Scientific American* (February) 56-68.
- COOTNER, P. H. (Ed.) 1964. *The random character of stock market prices*. Cambridge, MA: MIT Press.
- CORRSIN, S. 1959d. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence. *J. of Applied Physics* **22**, 469-473.
- CORRSIN, S. 1959b. Outline of some topics in homogeneous turbulence flow. *J. of Geophysical Research* **64**, 2134-2150.

- CORRSIN, S. 1962. Turbulent dissipation fluctuations. *Physics of Fluids* **5**, 1301-1302.
- COXETER, H. S. M., 1979. The non-Euclidean symmetry of Escher's picture 'Circle Limit III. *Leonardo* **12**, 19-25.
- DAMERAU, F. J. & MANDELBROT, B. B. 1973. Tests of the degree of word clustering in samples of written English. *Linguistics* **102**, 58-75.
- DAUBEN, J. W. 1971. The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets. *Archive for History of Exact Sciences* **7**, 181-216.
- DAUBEN, J. W. 1974. Denumerability and dimension: the origins of Georg Cantor's theory of sets. *Rete* **2**, 105- 133.
- DAUBEN, J. W. 1975. The invariance of dimension: problems in the early development of set theory and topology. *Historia Mathematicae* **2**, 273-288.
- DAUBEN, J. W. 1978. Georg Cantor: The personal matrix of his mathematics. *Isis* **69**, 534-550.
- DAVIS, C. & KNUTH, D. E. 1970. Number representations and dragon curves. *J. of Recreational Mathematics* **3**, 66 - 81 & 133 - 149.
- DE CHÉSEAUX, J. P. L. 1744. Sur la force de la lumière et sa propagation dans l'éther, et sur la distance des étoiles fixes. *Traité de la comète qui a paru en décembre 1743 et en janvier, février et mars 1744*. Lausanne et Genève: Chez MarcMichel Bousquet et Compagnie.
- DE GENNES, P. G. 1974. *The physics of liquid crystals*. Oxford: Clarendon Press.
- DE GENNES, P. G. 1976. La percolation: un concept unificateur. *La Recherche* **7**, 919-927.
- DE GENNES, P. G. 1979. *Scaling concepts in polymer physics*. Ithaca, NY: Cornell University Press.
- DENJOY, A. 1964. *Hommes, formes et le nombre*. Paris: Albert Blanchard.
- DENJOY, A. 1975. Evocation de l'homme et de l'œuvre. *Astérisque* **28-28**. Ed. G. Choquet. Paris: Société Mathématique de France.
- DE VAUCOULEURS, G. 1956. The distribution of bright galaxies and the local supergalaxy. *Vistas in Astronomy* **II**, 1584-1606. London: Pergamon.
- DE VAUCOULEURS, G. 1970. The case for a hierarchical cosmology. *Science* **167**, 1203-1213.
- DE VAUCOULEURS, G. 1971. The large scale distribution of galaxies and clusters of galaxies. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **73**, 113- 143.
- DE WIJS, H. J. 1951 & 1953. Statistics of ore distribution. *Geologie en Mijnbouw* (Amsterdam) **13**, 365-375 & **15**, 12-24.
- DHAR, D. 1977. Lattices of effectively nonintegral dimensionality. *J. of Mathematical Physics* **18**, 577.
- DICKSON, F. P. 1968. *The bowl of night; the physical universe and scientific thought*. Cambridge, MA: MIT Press.
- DIEUDONNÉ, J. 1975. L'abstraction et l'intuition mathématique. *Dialectica* **29**, 39-54.

- DOBRUSHIN, R. L. 1979. Gaussian processes and their subordinated self-similar random generalized fields. *Annals of Probability* **7**, 1-28.
- DOMB, C. 1964. Some statistical problems connected with crystal lattices. *J. of the Royal Statistical Society* **26B**, 367-397.
- DOMB, C. & GREEN, M.S. (Eds.) 1972-. *Phase transitions and critical phenomena*. New York: Academic.
- DOMB, C., GILLIS, J. & WILMERS, G. 1965. On the shape and configuration of polymer molecules. *Pr. of the Physical Society* **85**, 625-645.
- DOUADY, A. & OESTERLE, J. 1980. Dimension de Hausdorff des attracteurs, *Comptes Rendus (Paris)*, **290A**, 1136- 1138.
- DUBOIS REYMOND, P. 1875. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argument nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen. *J. für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)* **79**, 21-37.
- DUGAC, P. 1973. Elements d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences* **10**, 41-176.
- DUGAC, P. 1976a. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Paris: Vrin.
- DUGAC, P. 1976b. Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire. *Archive for History of Exact Sciences* **15**, 297-384.
- DUGAC, P. 1976c. Des correspondances mathématiques du XIXe et XXe siècles. *Revue de Synthèse* **97**, 149 - 170.
- DUMOUCHEL, W. H. 1973. Stable distributions in statistical inference: 1. Symmetric stable distributions compared to other symmetric long-tailed distributions. *J. of the American Statistical Association* **68**, 469-482.
- DUMOUCHEL, W. H. 1975. Stable distributions in statistical inference: 2. Information of stably distributed samples. *J. of the American Statistical Association* **70**, 386-393.
- DUPLESSIS, N. 1970. *An introduction to potential theory*. New York: Hafner.
- DUTTA, P. & HORN, P. M. 1981. Low-frequency fluctuation in solids: 1/f noise. *Reviews of Modern Physics* **53**, 497 - 516.
- DVORETZKY, A., ERDÖS, P. & KAKUTANI, S. 1950. Double points of Brownian motion in n-space. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **12**, 75-81.
- DYSON, F. J. 1966. The search for extraterrestrial technology, *Perspectives in Modern Physics: Essays in Honor of Hans A. Bethe*. Ed. R. E. Marshak, 641-655, New York: Interscience.
- EGGLESTON, H. G. 1949. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quarterly J. of Mathematics, Oxford Series* **20**, 31-36.
- EGGLESTON, H. G. 1953. On closest packing by equilateral triangles. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* **49**, 26 - 30.
- EINSTEIN, A. 1926. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Ed. R. Fürth. Tr. A. D. Cowper. London: Methuen (Dover reprint).
- EL HÉLOU, Y. 1978. Recouvrement du tore par des ouverts aléatoires et di-

- mension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert. *Comptes Rendus* (Paris) **287A**, 815-818.
- ELIAS, H. & SCHWARTZ, D. 1969. Surface areas of the cerebral cortex of mammals. *Science* **166**, 111 - 113.
- ESSAM, J. W. 1980. Percolation theory. *Reports on the Progress of Physics* **43**, 833-912.
- FAMA, E. F. 1963. Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. *J. of Business* (Chicago) **36**, 420-429. Reproduced in *The Random Character of Stock Market Prices*, Ed. P. H. Cootner. Cambridge, MA: MIT Press.
- FAMA, E. F. 1965 The behavior of stock-market prices. *J. of Business* **38**, 34-105. Based on a Ph.D. thesis, University of Chicago: *The distribution of daily differences of stock prices: a test of Mandelbrot's stable paretian hypothesis*.
- FAMA, E. F. & BLUME, M. 1966. Filter rules and stock-market trading. *J. of Business* (Chicago) **39**, 226-241.
- FATOU, P. 1906. Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. *Comptes rendus* (Paris) **143**, 546-548.
- FATOU, P. 1919-1920. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Société Mathématique de France* **47**, 161-271; **48**, 33-94, & **48**, 208-314.
- FEDERER, H. 1969. *Geometric measure theory*. New York: Springer.
- FEIGENBAUM, M. J. 1978. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. of Statistical Physics* **19**, 25-52.
- FEIGENBAUM, M. J. 1979. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. of Statistical Physics* **21**, 669-706.
- FEIGENBAUM, M. 1981. Universal behavior in nonlinear systems. *Los Alamos Science* **1**, 4-27.
- FELLER, W. 1949. Fluctuation theory of recurrent events. *Tr. of the American Mathematical Society* **67**, 98- 119.
- FELLER, W. 1951. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Annals of Mathematical Statistics* **22**, 427.
- FELLER, W. 1950-1957-1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1. New York: Wiley.
- FELLER, W. 1966-1971. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2. New York: Wiley.
- FEYNMAN, R. P. 1979 in *Pr. of the Third Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory*, Florence, Ed. Casalbuoni, R., Domokos, G., & Kovesi-Domokos, S. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- FEYNMAN, R. P. & HIBBS, A. R. 1965. *Quantum mechanics and path integrals*. New York: McGraw- Hill.
- FISHER, M. E. 1967. The theory of condensation and the critical point. *Physics* **3**, 255-283.
- FOURNIER D'ALBE, E. E. 1907. *Two new worlds: I The infra world; II The supra world*. London: Longmans Green.

- FRÉCHET, M. 1941. Sur la loi de répartition de certaines grandeurs géographiques. *J. de la Société de Statistique de Paris* **82**, 114-122.
- FRICKE, R. & KLEIN, F. 1897. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Leipzig: Teubner (Johnson reprint).
- FRIEDLANDER, S. K. & TOPPER, L. 1961. *Turbulence: classic papers on statistical theory*. New York: Interscience.
- FRIEDMAN, J. B. 1974. The architect's compass in creation miniatures of the later middle ages. *Traditio, Studies in Ancient and Medieval History, Thought, and Religion*, 419-429.
- FROSTMAN, O. 1935. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications a la théorie des fonctions. *Meddelanden fran Lunds Universitets Matematiska Seminarium* **3**, 1 -118.
- FUJISAKA, H. & MORI, H. 1979. A maximum principle for determining the intermittency exponent  $m$  of fully developed steady turbulence. *Progress of Theoretical Physics* **62**, 54-60.
- GAMOW, G. 1954. Modern cosmology. *Scientific American* **190** (March) 54-63. Reprint in Munitz (Ed.) 1957, 390-404
- GANGOLLI, R. 1967. Lévy's Brownian motion of several parameters. *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **3 B**, 121-226.
- GARDNER, M. 1967. An array of problems that can be solved with elementary mathematical techniques. *Scientific American* **216** (March, April and June issues). Also in Gardner 1977, pp. 207-209 & 215-220.
- GARDNER, M. 1976. In which "monster" curves force redefinition of the word "curve." *Scientific American* **235** (December issue), 124-133.
- GARDNER, M. 1977. *Mathematical magic show*. New York: Knopf.
- GEFEN, Y., MANDELBROT, B. B. & AHARONY, A. 1980. Critical phenomena on fractals. *Physical Review Letters* **45**, 855-858.
- GEFEN, Y., AHARONY, A., MANDELBROT, B. B. & KIRKPATRICK, S. 1981. Solvable fractal family, and its possible relation to the backbone at percolation. *Physical Review Letters*. **47**, 1771-1774.
- GELBAUM, B. R. & OLMSTED, J. M. H. 1964. *Counterexamples in analysis*. San Francisco: Holden-Day.
- GERNSTEIN, G. L. & MANDELBROT, B. B. 1964. Random walk models for the spike activity of a single neuron. *The Biophysical J.* **4**, 41-68.
- GERVER, J. 1970. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of  $p$ . *American J. of Mathematics* **92**, 33-55.
- GILLISPIE, C. C. (Ed.) 1970-1976. *Dictionary of scientific biography*. Fourteen volumes. New York: Scribner's.
- GISPERT, H. 1980. Correspondance de Fréchet....et....théorie de la dimension. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* (Paris) **1**, 69- 120.
- GNEDENKO, B. V. & KOLMOGOROV, A. N. 1954. *Limit distributions for sums of independent random variables*. Trans. K.L. Chung. Reading, MA: Addison Wesley.

- GOLITZYN, G. S. 1962. Fluctuations of dissipation in a locally isotropic turbulent flow (in Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR* **144**, 520-523.
- GRANT, H. L., STEWART, R. W. & MOILLIET, A. 1959. Turbulence spectra from a tidal channel. *J. of Fluid Mechanics* **12**, 241-268.
- GRASSBERGER, P. 1981. On the Hausdorff dimension of fractal attractors (preprint).
- GREENWOOD, P. E. 1969. The variation of a stable path is stable. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **14**, 140-148.
- GRENANDER, U. & ROSENBLATT, M. 1957 & 1966. *Statistical analysis of stationary time series*. New York: Wiley.
- GROAT, R. A. 1948. Relationship of volumetric rate of blood flow to arterial diameter. *Federation Pr.* **7**, 45.
- GROSSMAN, S. & THOMAE, S. 1977. Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes. *Z. für Naturforschung* **32A**, 1353- 1363.
- GUREL, O. & RÖSSLER, O. E. (Eds.) 1979. Bifurcation theory and applications in scientific disciplines. *Annals of the New York Academy of Sciences* **316**, 1-708.
- GURVICH, A. S. 1960. Experimental research on frequency spectra of atmospheric turbulence. *Izvestia Akademii Nauk SSSR; Geofizicheskaya Seriya* 1042.
- GURVICH, A. S. & YAGLOM, A. M. 1967. Breakdown of eddies and probability distribution for small scale turbulence. *Boundary Layers and Turbulence*. (Kyoto International Symposium, 1966), *Physics of Fluids* **10**, S59-S65.
- GURVICH, A. S. & ZUE'KOVSKII, S. L. 1963. On the experimental evaluation of the fluctuation of dissipation of turbulent energy. *Izvestia Akademii Nauk SSSR; Geofizicheskaya Seriya* **12**, 1856-.
- GUTHRIE, W. K. C. 1950. *The Greek philosophers from Thales to Aristotle*. London: Methuen (Harper paperback).
- GUTHRIE, W. K. C. 1971-. *A history of Greek philosophy*. Cambridge University Press.
- HACK, J. T. 1957. Studies of longitudinal streams in Virginia and Maryland. *U.S. Geological Survey Professional Papers* **294B**.
- HADAMARD, J. 1912. L'oeuvre mathématique de Poincaré. *Acta Mathematica* **38**, 203-287. Also in Poincaré 1916-, **XI**, 152-242. Or in Hadamard 1968, **4**, 1921-2005.
- HADAMARD, J. 1968. *Oeuvres de Jacques Hadamard*. Paris: Editions du CNRS.
- HAGGETT, P. 1972. *Geography: a modern synthesis*. New York: Harper & Row.
- HAHN, H. 1956. The crisis in intuition, Translation in *The world of mathematics*, Ed. J. R. Newman. New York: Simon & Schuster, Vol. III, 1956-1976.



- Original German text in *Krise und Neuaufbau in den Exakten Wissenschaften* by H. Mark, H. Thirring, H. Hahn, K. Menger and G. Nöbeling, Leipzig and Vienna: F. Deuticke, 1933.
- HALLÉ, F., OLDEMAN, R. A. A., & TOMLINSON, P. B., 1978. *Tropical trees and forests*. New York: Springer.
- HALLEY, J. W. & MAI, T. 1979. Numerical estimates of the Hausdorff dimension of the largest cluster and its backbone in the percolation problem in two dimensions. *Physical Review Letters* **43**, 740-743.
- HANDELMAN, S. W. 1980 A high-resolution computer graphics system. *IBM Systems J.*, **19**, 356366.
- HARDY, G. H. 1916. Weierstrass's nondifferentiable function. *Tr. of The American Mathematical Society* **17**, 322-323. Also in Hardy 1966—, **IV**, 477-501.
- HARDY, G. H. 1966-. *Collected papers*. Oxford: Clarendon Press.
- HARRIS, T. E. 1963. *Branching processes*. New York: Springer.
- HARRISON, E. R. 1981. *Cosmology*. Cambridge University Press.
- HARISON, R. J., BISHOP, G. J. & QUINN, G. P. 1978. Spanning lengths of percolation clusters. *J. of Statistical Physics* **19**, 53-64.
- HARTER, W. G. 1979-1981. Theory of hyperfine and superfine links in symmetric polyatomic molecules. I Trigonal and tetrahedral molecules. II Elementary cases in octahedral hexafluoride molecules. *Physical Review*, **A19**, pp. 2277-2303 & **A24**, pp. 192-263.
- HARTMANN, W. K. 1977. Cratering in the solar system. *Scientific American* (January) 84-99.
- HARVEY, W. 1628. *De motu cordis*. Trans. Robert Willis, London, 1847, as *On the motion of the heart and blood in animals*. Excerpt in *Steps in the scientific tradition: readings in the history of science*. Ed. R.S. Westfall et al. New York: Wiley.
- HAUSDORFF, F. 1919. Dimension und äusseres Mass. *Mathematische Annalen* **79**, 157- 179.
- HAWKES, J. 1974. Hausdorff measure, entropy and the independence of small sets. *Pr. of the London Mathematical Society* (3) **28**, 700-724.
- HAWKES, J. 1978. Multiple points for symmetric Lévy processes. *Mathematical Pr. of the Cambridge Philosophical Society* **83**, 83-90.
- HAWKINS, G. S. 1964. Interplanetary debris near the Earth. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **2**, 149- 164.
- HAWKINS, T. 1970. *Lebesgue's theory of integration: Its origins and development*. Madison: University of Wisconsin Press.
- HEATH, T. L. 1908. *The thirteen books of Euclid's elements translated with introduction and commentary*. Cambridge University Press. (Dover reprint).
- HELLEMAN, R. H. G. (Ed.) 1980. Nonlinear dynamics. *Annals of the New York Academy of Sciences* **357**, 1-507.
- HENDRICKS, W. J. 1979. Multiple points for transient symmetric Lévy processes in  $R^d$ . *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **49**, 13-21.

- HERMITE, C. & STIELTJES, T. J. 1905. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. 2 vols. Ed. B. Baillaud & H. Bourget. Paris: Gauthier-Villars.
- HEYDE, C. C. & SENETA, E. 1977. *I. J. Bienaymé: statistical theory anticipated*. New York: Springer.
- HILBERT, D. 1891. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen* **38**, 459-460. Also in Hilbert 1932, **3**, 1-2.
- HILBERT, D. 1932. *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin: Springer (Chelsea reprint).
- HILEY, B. J. & SYKES, M. F. 1961. Probability of initial ring closure in the restricted random walk model of a macromolecule. *J. of Chemical Physics* **34**, 1531-1537.
- HILLE, E. & TAMARKIN, J. D. 1929. Remarks on a known example of a monotone continuous function. *American Mathematics Monthly* **36**, 255-264.
- HIRST, K. E. 1967. The Apollonian packing of circles. *J. of the London Mathematical Society* **42**, 281 -291.
- HOFSTADTER, D. R. 1976. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Physical Review* **B14**, 2239-2249.
- HOFSTADTER, D. R. 1981. Strange attractors: mathematical patterns delicately poised between order and chaos. *Scientific American* **245** (November issue), 16-29.
- HOLTSMARK, J. 1919. Über die Verbreiterung von Spektrallinien. *Annalen der Physik* **58**, 577-630.
- HOOGE, F. N., KEINPENNING, T. G. M. & VANDAMME, L. K. J. 1981. Experimental studies on 1/f noise. *Reports on Progress in Physics* **44**, 479-532.
- HOPKINSON 1876. On the residual charge of the Leyden jar. *Pr. of the Royal Society of London* **24** 408-
- HORN, H. 1971. *Trees*. Princeton University Press.
- HORSFIELD, K. & CUMMINGS, G. 1967. Angles of branching and diameters of branches in the human bronchial tree. *Bulletin of Mathematics Biophysics* **29**, 245-259.
- HORTON, R. E. 1945. Erosional development of streams and their drainage basins; Hydrophysical approach to quantitative morphology. *Bulletin of the Geophysical Society of America* **56**, 275-370.
- HOSKIN, M. 1973. Dark skies and fixed stars, *J. of the British Astronomical Association*, **83**, 4-
- HOSKIN, M. A. 1977. Newton, Providence and the universe of stars. *J. for the History of Astronomy* **8**, 77-101.
- HOWARD, A. D. 1971. Truncation of stream networks by headward growth and branching. *Geophysical Analysis* **3**, 29-51.
- HOYLE, F. 1953. On the fragmentation of gas clouds into galaxies and stars. *Astrophysical J.* **118**, 513-528.
- HOYLE, F. 1975. *Astronomy and cosmology. A modern course*. San Francisco: W.H. Freeman.

- HUREWICZ, W. & WALLMAN, H. 1941. *Dimension theory*. Princeton University Press.
- HURST, H. E. 1951. Long-term storage capacity of reservoirs. *Tr. of the American Society of Civil Engineers* **116**, 770-808.
- HURST, H. E. 1955. Methods of using long-term storage in reservoirs. *Pr. of the Institution of Civil Engineers Part I*, 519-577.
- HURST, H. E., BLACK, R. P., AND SIMAIKA, Y. M. 1965. *Long-term storage, an experimental study*. London: Constable.
- HUTCHINSON, J. E. 1981. Fractals and selfsimilarity, *Indiana University Mathematics J.* **30** 713-747.
- HUXLEY, J. S. 1931. *Problems of relative growth*. New York: Dial Press.
- IBERALL, A. S. 1967. Anatomy and steady flow characteristics of the arterial system with an introduction to its pulsatile characteristics. *Mathematical Biosciences* **1**, 375-395.
- JACK, J. J. B., NOBLE, D. & TSIEN, R. W. 1975. *Electric current flow in excitable cells*. Oxford University Press.
- JAKI, S. L. 1969. *The paradox of Olbers paradox*. New York: Herder & Herder.
- JEANS, J. H. 1929. *Astronomy and cosmogony*. Cambridge University Press. (Dover reprint).
- JERISON, H. J. 1973. *Evolution of the brain and intelligence*. New York: Academic.
- JOEVEER, M., EINASTO, J. & TAGO, E. 1977. Preprint of Tartu Observatory.
- JOHNSON, D. M. 1977. Prelude to dimension theory: the geometric investigation of Bernard Bolzano. *Archive for History of Exact Sciences* **17**, 261-295.
- JOHNSON, D. M. 1981. The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology. *Archive for history of exact sciences Part I, Part II*, **25**, 85-267.
- JULIA, G. 1918. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. de Mathématiques Pures et Appliquées* **4**: 47-245: Reprinted (with related texts) in Julia 1968, 121-319.
- JULIA, G. 1968. *Oeuvres de Gaston Julia*. Paris: Gauthier-Villars,
- KAHANE, J. P. 1964. Lacunary Taylor and Fourier series. *Bulletin of the American Mathematical Society* **70**, 199 - 213.
- KAHANE, J. P. 1968. *Some random series of functions*. Lexington, MA: D. C. Heath.
- KAHANE, J. P. 1969. Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. *Enseignement mathématique* **15**, 185-192.
- KAHANE, J. P. 1970. Courbes étranges, ensembles minces. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* **49**, 325-339.
- KAHANE, J. P. 1971. The technique of using random measures and random

- sets in harmonic analysis. *Advances in Probability and Related Topics*, Ed. P. Ney, **1**, 65-101. New York: Marcel Dekker.
- KAHANE, J. P. 1974. Sur le modele de turbulence de Benoit Mandelbrot. *Comptes Rendus (Paris)* **278A**, 621 - 623.
- KAHANE, J. P. & MANDELBROT, B. B. 1965. Ensembles de multiplicité aléatoires. *Comptes Rendus (Paris)* **261**, 3931-3933.
- KAHANE, J. P. & PEYRIERE, J. 1976. Sur certaines martingales de B. Mandelbrot. *Advances in Mathematics* **22**, 131-145.
- KAHANE, J. P. & SALEM, R. 1963. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Paris: Hermann.
- KAHANE, J. P., WEISS, M. & WEISS, G. 1963. On lacunary power series. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* **5**, 1-26.
- KAKUTANI, S. 1952. Quadratic diameter of a metric space and its application to a problem in analysis. *Pr. of the American Mathematical Society* **3**, 532-542.
- KANT, I. 1755-1969. *Universal natural history and theory of the heavens*. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- KASNER, E. & SUPNICK, F. 1943. The Apollonian packing of circles. *Pr. of the National Academy of Sciences U.S.A.* **29**, 378-384.
- KAUFMAN, R. 1968. On Hausdorff dimension of projections. *Mathematika* **15**, 153- 155.
- KELLY, W. 1951. *The best of Pogo*. New York: Simon and Schuster.
- KERKER, M. 1974. Brownian movement and molecular reality prior to 1900. *J. of Chemical Education* **51**, 764-768.
- KERKER, M. 1976. The Svedberg and molecular reality. *Isis* **67**, 190-216.
- KIRKPATRICK, S. 1973. Percolation and conduction. *Reviews of Modern Physics* **45**, 574-588.
- KIRKPATRICK, S. 1979. Models of disordered materials. *III-condensed matter -Matière mal condensée*, Ed. R. Balian, R. Ménard & G. Toulouse, New York: North Holland, **1**, 99-154.
- KLINE, S. A. 1945. On curves of fractional dimensions. *J. of the London Mathematical Society* **20**, 79-86.
- KNIGHT, F. B. 1981. *Essentials of Brownian motion and diffusion*. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
- KNUTH, D. 1968—. *The art of computer programming*. Reading, MA: Addison Wesley.
- KOHLRAUSCH, R. 1847. Über das Dellmann'sche Elektrometer. *Annalen der Physik und Chemie (Poggendorf)* **III-12**, 353-405.
- KOHLRAUSCH, R. 1854. Theorie des elektrischen Rückstandes in der Leidener Flasche. *Annalen der Physik und Chemie (Poggendorf)* **IV-91**, 56-82 & 179-214.
- KOLMOGOROV, A. N. 1940. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* **26**, 115-118.
- KOLMOGOROV, A. N. 1941. Local structure of turbulence in an incompressi-

- ble liquid for very large Reynolds numbers. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* **30**, 299-303. Reprinted in Friedlander & Topper 1961, 151-155.
- KOLMOGOROV, A. N. 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. of fluid Mechanics* **13**, 82-85. Original Russian text and French translation in *Mécanique de la Turbulence*, 447-458 (Colloque International de Marseille, 1961), Paris: Editions du CNRS.
- KOLMOGOROV, A. N. & TIHOMIROV, V. M. 1959-1961. Epsilon-entropy and epsilon-capacity of sets in functional spaces. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk (N.S.)* **14**, 3-86. Translated in *American Mathematical Society Translations (Series 2)* **17**, 277-364.
- KORC:AK, J. 1938. Deux types fondamentaux de distribution statistique. *Bulletin de l'Institut International de Statistique* **III**, 295-299.
- KRAICHNAN, R. H. 1974. On Kolmogorov's inertial range theories. *J. of Fluid Mechanics* **62**, 305330.
- KUO, A. Y. S. & CORRSIN, S. 1971. Experiments on internal intermittency and fine structure distribution functions in fully turbulent fluid. *J. of Fluid Mechanics* **50**, 285-320.
- KUO, A. Y. S. & CORRSIN, S. 1972. Experiments on the geometry of the fine structure regions in fully turbulent fluid. *J. of Fluid Mechanics* **56**, 477-479.
- LAMPERTI, J. 1962. Semi-stable stochastic processes. *J. of the American Mathematical Society* **104**, 62-78.
- LAMPERTI, J. 1966. *Probability: a survey of the mathematical theory*. Reading, MA: W. A. Benjamin.
- LAMPERTI, J. 1972. Semi-stable Markov processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, **22**, 205-225.
- LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. 1953-1959. *Fluid mechanics*. Reading: Addison Wesley.
- LANDKOF, N. S. 1966-1972. *Foundations of modern potential theory*. New York: Springer.
- LANDMAN, B. S. & RUSSO, R. L. 1971. On a pin versus block relationship for partitions of logic graphs. *IEEE Tr. on Computers* **20**, 1469-1479.
- LAPLACE, P. S. DE 1878-. *Oeuvres complètes*. Paris: Gauthier-Villars.
- LARMAN, D. G. 1967. On the Besicovitch dimension of the residual set of arbitrarily packed disks in the plane. *J. of the London Mathematical Society* **42**, 292-302.
- LAVOIE, J. L., OSLER, T. J. & TREMBLAY, R. 1976. Fractional derivatives of special functions. *SIAM Review* **18**, 240-268.
- LAWRANCE, A. J. & KOTTEGODA, N. T. 1977. Stochastic modelling of riverflow time series. *J. of the Royal Statistical Society A*, **140**, Part I, 1-47.
- LEATH, P. L. 1976. Cluster size and boundary distribution near percolation threshold. *Physical Review* **B14**, 5046-5055.

- LEBESGUE, H. 1903. *Sur le problème des aires*. See Lebesgue 1972-, IV, 29-35.
- LEBESGUE, H. 1972-. *Oeuvres scientifiques*. Genève: Enseignement Mathématique.
- LEIBNIZ, G. W. 1849-. *Mathematische Schriften*. Ed. C.I. Gerhardt. Halle: H.W. Schmidt (Olms reprint) .
- LEOPOLD, L. B. 1962. Rivers. *American Scientist* **50**, 511 -537.
- LEOPOLD, L. B. & LANGBEIN, W. B. 1962. The concept of entropy in landscape evolution. U.S. *Geological Survey Professional Papers* **500A**.
- LEOPOLD, L. B. & MADDOCK, T., JR. 1953. The hydraulic geometry of stream channels and some physiological implications. *U.S. Geological Survey Professional Papers* **252**.
- LEOPOLD, L. B. & MILLER, J. P. 1956. Ephemeral streams: Hydraulic factors and their relation to the drainage net. *U.S. Geological Survey Professional Papers* **282-A**, 1-37.
- LERAY, J. 1934. *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. *Acta Mathematica* **63**, 193-248.
- LÉVY, P. 1925. *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier Villars.
- LÉVY, P. 1930. Sur la possibilité d'un univers de masse infinie. *Annales de Physique* **14**, 184-189. Also in Lévy 1973- II, 534-540.
- LÉVY, P. 1937-1954. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris: Gauthier Villars.
- LÉVY, P. 1938. Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblables au tout. *J. de l'Ecole Polytechnique*, III, **7-8**, 227-291. Also in Lévy 1973- II, 331-394.
- LÉVY, P. 1948-1965. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Paris: Gauthier-Villars.
- LÉVY, P. 1957. Brownian motion depending on  $n$  parameters. The particular case  $n=5$ . *Pr. of the Symposia in Applied Mathematics* **VII**, 1-20. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
- LÉVY, P. 1959. Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann. *Circolo matematico di Palermo, Rendiconti* II, **8**, 297-310.
- LÉVY, P. 1963. Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres. *Rendiconti di Matematica* (Roma) **22**, 24-101.
- LÉVY, P. 1965. A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions. *Pr. of the Third Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability Theory*. Ed. J. Neyman, **2**, 133-175. Berkeley: University of California Press.
- LÉVY, P. 1970. *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. Paris: Albert Blanchard.
- LÉVY, P. 1973-. *Oeuvres de Paul Lévy*. Ed. D. Dugué, P. Deheuvels & M. Ibéro. Paris: Gauthier Villars.
- LIEB, E. H. & LEBOWITZ, J. L. 1972. The constitution of matter: existence of thermodynamics for systems composed of electrons and nuclei. *Advances in Mathematics* **9**, 316-398.

- LLINAS, R. R. 1969. *Neurobiology of cerebellar evolution and development*. Chicago: American Medical Association.
- LOEMKER, L. E. 1956-1969. *Philosophical papers and letters of Leibniz*. Boston: Reidel.
- LORENZ, E. N. 1963. Deterministic nonperiodic flow. *J. of the Atmospheric Sciences* **20**, 130-141.
- LOVE, E. R. & YOUNG, L. C. 1937. Sur une classe de fonctionnelles linéaires. *Fundamenta Mathematicae* **28**, 243-257.
- LOVEJOY, S. 1982. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science* **216**, 185-187.
- LUKACS, E. 1960-1970. *Characteristic functions*. London: Griffin. New York: Hafner.
- LYDALL, H. F. 1959. The distribution of employment income. *Econometrica* **27**, 110-115.
- MAITRE, J. 1964. Les fréquences des prénoms de baptême en France. *L'Année sociologique* **3**, 31-74.
- MANDELBROT, B. B. 1951. Adaptation d'un message à la ligne de transmission. I & II. *Comptes Rendus-(Paris)* **232**, 1638-1640 & 2003-2005.
- MANDELBROT, B. B. 1953t. Contribution à la théorie mathématique des jeux de communication (Ph.D. Thesis). *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* **2**, 1-124.
- MANDELBROT, B. B. 1954w. Structure formelle des textes et communication (deux études). *Word* **10**, 1-27. Corrections. *Word*; **11**, 424. Translations into English, Czech and Italian.
- MANDELBROT, B. B. 1955b. On recurrent noise limiting coding. *Information Networks, the Brooklyn Polytechnic Institute Symposium*, 205-221. Ed. E. Weber. New York: Interscience. Translation into Russian.
- MANDELBROT, B. B. 1956c. La distribution de Willis-Yule, relative au nombre d'espèces dans les genres taxonomiques. *Comptes Rendus (Paris)* **242**, 2223-2225.
- MANDELBROT, B. B. 1956l. On the language of taxonomy: an outline of a thermo-statistical theory of systems of categories, with Willis (natural) structure. *Information Theory, the Third London Symposium*. Ed. C. Cherry. 135-145. New York: Academic.
- MANDELBROT, B. B. 1956t. Exhaustivité de l'énergie d'un système, pour l'estimation de sa température. *Comptes Rendus (Paris)* **243**, 1835-1837.
- MANDELBROT, B. B. 1956m. A purely phenomenological theory of statistical thermodynamics: canonical ensembles. *IRE Tr. on Information Theory* **112**, 190-203.
- MANDELBROT, B. B. 1959g. Ensembles grand canoniques de Gibbs; justification de leur unicité basée sur la divisibilité infinie de leur énergie aléatoire. *Comptes Rendus (Paris)* **249**, 1464-1466.
- MANDELBROT, B. B. 1959p. Variables et processus stochastiques de Pareto-

- Lévy et la répartition des revenus, I & II. *Comptes Rendus* (Paris) **249**, 613-615 & 2153-2155.
- MANDELBROT, B. B. 1960i. The Pareto-Lévy law and the distribution of income. *Internatiornal Economic Review* **1**, 79 - 106.
- MANDELBROT, B. B. 1961b. On the theory of word frequencies and on related Markovian models of discourse. *Structures of language and its mathematical aspects*. Ed. R. Jakobson. 120-219. New York: American Mathematical Society
- MANDELBROT, B. B. 1961e. Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income. *Econometrica* **29**, 517 - 543.
- MANDELBROT, B. B. 1962c. Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy. *Comptes Rendus* (Paris) **254**, 3968-3970.
- MANDELBROT, B. B. 1962e. Paretian distributions and income maximization. *Quarterly J. of Economics of Harvard University* **76**, 57-85.
- MANDELBROT, B. B. 1962n. Statistics of natural resources and the law of Pareto. IBM Research Note NC-146, June 29, 1962 (unpublished).
- MANDELBROT, B. B. 1962t. The role of sufficiency and estimation in thermodynamics. *The Annals of Mathematical Statistics* **33**, 1021-1038.
- MANDELBROT, B. B. 1963p. The stable Paretian income distribution, when the apparent exponent is near two. *International Economic Review* **4**, 111-115.
- MANDELBROT, B. B. 1963b. The variation of certain speculative prices. *J. of Business* (Chicago) **36**, 394-419. Reprinted in *The random character of stock market prices*. Ed. P. H. Cootner, 297337. Cambridge, MA.: MIT Press).
- MANDELBROT, B. B. 1963e. New methods in statistical economics. *J. of Political Economy* **71**, 421-440. Reprint in *Bulletin of the International Statistical Institute, Ottawa Session: 40* (2), 669720.
- MANDELBROT, B. B. 1964j. The epistemology of chance in certain newer sciences. Read at *The Jerusalem International Congress on Logic, Methodology and the Philosophy of Science* (unpublished).
- MANDELBROT, B. B. 1964t. Derivation of statistical thermodynamics from purely phenomenological principles. *J. of Mathematical Physics* **5**, 164-171.
- MANDELBROT, B. B. 1964o. Random walks, fire damage amount, and other Paretian risk phenomena. *Operations Research* **12**, 582-585.
- MANDELBROT, B. B. 1964s. *Self-similar random processes and the range* IBM Research Report RC- 1163, April 13, 1964 (unpublished).
- MANDELBROT, B. B. 1965c. Self similar error clusters in communications systems and the concept of conditional stationarity. *IEEE Tr. on Communications Technology* **13**, 71-90.
- MANDELBROT, B. B. 1965h. Une classe de processus stochastiques homothétiques a soi: application a la loi climatologique de H. E. Hurst. *Comptes Rendus* (Paris) **260**, 3274-3277.



- MANDELBROT, B. B. 1965s. Leo Szilard and unique decipherability. *IEEE Tr. on Information Theory* **IT-11**, 455-456.
- MANDELBROT, B. B. 1965z. Information theory and psycholinguistics. *Scientific Psychology: Principles and Approaches*, Ed. B. B. Wolman & E. N. Nagel. New York: Basic Books 550-562.. Reprint in *Language, Selected Readings*. Ed. R. C. Oldfield & J. C. Marshall. London: Penguin. Reprint with appendices, *Readings in Mathematical Social Science*. Ed. P. Lazarfeld and N. Henry. Chicago, Ill.: Science Research Associates (1966: hardcover). Cambridge, MA: M.I.T. Press (1968: paperback). Russian translation.
- MANDELBROT, B. B. 1966b. Forecasts of future prices, unbiased markets, and 'martingale' models. *J. of Business* (Chicago) **39**, 242-255. Important errata in a subsequent issue of the same *Journal*.
- MANDELBROT, B. B. 1967b. Sporadic random functions and conditional spectral analysis; selfsimilar examples and limits. *Pr. of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* **3**, 155-179. Ed. L. LeCam & J. Neyman. Berkeley: University of California Press.
- MANDELBROT, B. B. 1967k. Sporadic turbulence. *Boundary Layers and Turbulence* (Kyoto International Symposium, 1966), *Supplement to Physics of Fluids* **10**, S302-S303.
- MANDELBROT, B. B. 1967j. The variation of some other speculative prices. *J. of Business* (Chicago) **40**, 393-413.
- MANDELBROT, B. B. 1967p. Sur l'épistémologie du hasard dans les sciences sociales: invariance des lois et vérification des hypothèses, *Encyclopédie de la Pléiade: Logique et Connaissance Scientifique*. Ed. J. Piaget. 1097 - 1113. Paris: Gallimard.
- MANDELBROT, B. B. 1967s. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* **155**, 636-638.
- MANDELBROT, B. B. 1967i. Some noises with  $1/f$  spectrum, a bridge between direct current and white noise. *IEEE Tr. on Information Theory* **13**, 289 - 298.
- MANDELBROT, B. B. 1968p. Les constantes chiffrées du discours. *Encyclopédie de la Pléiade: Linguistique*, Ed. J. Martinet, Paris: Gallimard, 46-56.
- MANDELBROT, B. B. 1969e. Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variance. *International Economic Review* **10**, 82-111.
- MANDELBROT, B. B. 1970p. On negative temperature for discourse. Discussion of a paper by Prof. N. F. Ramsey. *Critical Review of Thermodynamics*, 230-232. Ed. E. B. Stuart et al. Baltimore, MD: Mono Book.
- MANDELBROT, B. B. 1970e. Statistical dependence in prices and interest rates. *Papers of the Second World Congress of the Econometric Society*, Cambridge, England (8-14 Sept. 1970).
- MANDELBROT, B. B. 1970y. *Statistical Self Similarity and Very Erratic Chance Fluctuations*. Trumbull Lectures, Yale University (unpublished).
- MANDELBROT, B. B. 1971e. When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *Review of Economics and Statistics* **LIII**, 225-236.

- MANDELBROT, B. B. 1971f. A fast fractional Gaussian noise generator. *Water Resources Research* **7**, 543-553.
- NOTE: in the first fraction on p. 545, 1 must be erased in the numerator and added to the fraction.
- MANDELBROT, B. B. 1971n. *The conditional cosmographic principle and the fractional dimension of the universe*. (Submitted to several periodicals, but first published as part of Mandelbrot 1975o.)
- MANDELBROT, B. B. 1972d. On Dvoretzky coverings for the circle. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **22**, 158-160.
- MANDELBROT, B. B. 1972j. Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. *Statistical models and turbulence*. Ed. M. Rosenblatt & C. Van Atta. Lecture Notes in Physics **12** 333-351. New York: Springer,
- MANDELBROT, B. B. 1972b. Correction of an error in "The variation of certain speculative prices (1963)". *J. of Business* **40**, 542-543.
- MANDELBROT, B. B. 1972c. Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to the R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement* **1**, 259-290.
- MANDELBROT, B. B. 1972w. Broken line process derived as an approximation to fractional noise. *Water Resources Research* **8**, 1354-1356.
- MANDELBROT, B. B. 1972z. Renewal sets and random cutouts. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **22**, 145-157.
- MANDELBROT, B. B. 1973c. Comments on "A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices", by Peter K. Clark. *Econometrica* **41**, 157-160.
- MANDELBROT, B. B. 1973f. Formes nouvelles du hasard dans les sciences. *Economie Appliquée* **26**, 307-319.
- MANDELBROT, B. B. 1973j. Le problème de la réalité des cycles lents, et le syndrome de Joseph. *Economie Appliquée* **26**, 349-365.
- MANDELBROT, B. B. 1973v. Le syndrome de la variance infinie, et ses rapports avec la discontinuité des prix. *Economie Appliquée* **26**, 321-348.
- MANDELBROT, B. B. 1974c. Multiplications aléatoires itérées, et distributions invariantes par moyenne pondérée. *Comptes Rendus (Paris)* **278A**, 289-292 & 355-358.
- MANDELBROT, B. B. 1974d. A population birth and mutation process, I: Explicit distributions for the number of mutants in an old culture of bacteria. *J. of Applied Probability* **11**, 437-444. (Part II distributed privately).
- MANDELBROT, B. B. 1974f. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. of Fluid Mechanics* **62**, 331-358.
- MANDELBROT, B. B. 1975b. Fonctions aléatoires pluri-temporelles: approximation poissonien ne du cas brownien et généralisations. *Comptes Rendus (Paris)* **280A**, 1075-1078.
- MANDELBROT, B. B. 1975f. On the geometry of homogeneous turbulence,

- with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars. *J. of Fluid Mechanics* **72**, 401-416.
- MANDELBROT, B. B. 1975m. Hasards et tourbillons: quatre contes a clef. *Annales des Mines* (November), 61-66.
- MANDELBROT, B. B. 1975o. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Paris: Flammarion.
- MANDELBROT, B. B. 1975u. Sur un modele décomposable d'univers hiérarchisé: déduction des corrélations galactiques sur la sphère céleste. *Comptes Rendus* (Paris) **280A**, 1551 - 1554.
- MANDELBROT, B. B. 1975w. Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Pr. of the National Academy of Sciences USA* **72**, 3825-3828
- MANDELBROT, B. B. 1975h. Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **31**, 271-285.
- MANDELBROT, B. B. 1976c. Géométrie fractale de la turbulence. Dimension de Hausdorff, dispersion et nature des singularités du mouvement des fluides. *Comptes Rendus* (Paris) **282A**, 119-120.
- MANDELBROT, B. B. 1976o. Intermittent turbulence & fractal dimension: kurtosis and the spectral exponent  $5/3+B$ . *Turbulence and Navier Stokes Equations* Ed. R. Teman, *Lecture Notes in Mathematics* **565**, 121-145. New York: Springer.
- MANDELBROT, B. B. 1977b. Fractals and turbulence: attractors and dispersion. *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977* Ed. P. Bernard & T. Ratiu. *Lecture Notes in Mathematics* **615** 83-93. New York: Springer. Russian translation.
- MANDELBROT, B. B. 1977f. *Fractals: form, chance, and dimension*. San Francisco: W. H. Freeman & Co.
- MANDELBROT, B. B. 1977h. Geometric facets of statistical physics: scaling and fractals. *Statistical Physics 13*, International IUPAP Conference, 1977. Ed. D. Cabib et al. *Annals of the Israel Physical Society*. 225-233.
- MANDELBROT, B. B. 1978b. The fractal geometry of trees and other natural phenomena. *Buffon Bicentenary Symposium on Geometrical Probability*, Ed. R. Miles & J. Serra *Lecture Notes in Biomathematics* **23** 235-249. New York: Springer.
- MANDELBROT, B. B. 1978r. Les objets fractals. *La Recherche* **9**, 1-13.
- MANDELBROT, B. B. 1978c. Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle: les cordonnets discrets et fractals. *Comptes Rendus* (Paris) **286A**, 933-936.
- MANDELBROT, B. B. 1979n. Comment on bifurcation theory and fractals. *Bifurcation Theory and Applications*, Ed. Gurel & O. Rössler. *Annals of the New York Academy of Sciences* **316**, 463-464.
- MANDELBROT, B. B. 1979u. Corrélations et texture dans un nouveau modele d'Univers hiérarchisé, base sur les ensembles trémas. *Comptes Rendus* (Paris) **288A**, 81-83.

- MANDELBROT, B. B. 1980b. Fractals and geometry with many scales of length. *Encyclopedia Britannica 1981 Yearbook of Science and the Future*, 168-181.
- MANDELBROT, B. B. 1980n. Fractal aspects of the iteration of  $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$  for complex  $\lambda$  and  $z$ . *Non Linear Dynamics*, Ed. R. H. G. Helleman. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **357**, 249-259.
- MANDELBROT, B. B. 1981l. Scalebound or scaling shapes: A useful distinction in the visual arts and in the natural sciences. *Leonardo* **14**, 45-47.
- MANDELBROT, B. B. 1982m. On discs and sigma discs, that osculate the limit sets of groups of inversions. *Mathematical Intelligencer*: **4**.
- MANDELBROT, B. B. 1982s. The inexhaustible function  $z^{2-m}$  (tentative title). *Scientific American* (tentative).
- MANDELBROT, B. B. & MCCAMY, K. 1970. On the secular pole motion and the Chandler wobble. *Geophysical J.* **21**, 217-232.
- MANDELBROT, B. B. & TAYLOR, H. M. 1967. On the distribution of stock price differences. *Operations Research*: **15**, 1057- 1062.
- MANDELBROT, B. B. & VAN NESS, J. W. 1968. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review* **10**, 422.
- MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1968. Noah, Joseph and operational hydrology. *Water Resources Research* **4**, 909-918.
- MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969a. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resources Research* **5**, 228.
- MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969b. Some long-run properties of geophysical records. *Water Resources Research* **5**, 321-340.
- MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969c. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long runstatistical dependence. *Water Resources Research* **5**, 967-988.
- MANDELBROT, B. B., *see also* Apostel, M. & Morf, Berger & M., Damerau & M., Gefen, M., & Aharony, Gefen, Aharony, M. & Kirkpatrick, Gerstein & M., & Kahane & M..
- MANHEIM, J. H. 1964. *The genesis of point-set topology*. New York: Macmillan.
- MARCUS, A. 1964. A stochastic model of the formation and survivance of lunar craters, distribution of diameters of clean craters. *Icarus* **3**, 460-472.
- MARCUS, M. B. 1976. Capacity of level sets of certain stochastic processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **34**, 279-284.
- MARSTRAND, J. M. 1954a. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimension. *Pr. of the London Mathematical Society* (3) **4**, 257-302.
- MARSTRAND, J. M. 1954b. The dimension of Cartesian product sets. *Pr. of the London Mathematical Society* **50**, 198-202.
- MATHERON, G. 1962. *Traité de Géostatistique Appliquée* Cambridge Philosophical Society, Tome 1, Paris: Technip.
- MATTILA, P. 1975. Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersec-

- tions with planes. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A Mathematica* **I**, 227-244.
- MAX, N. L. 1971. *Space filling curves*. 16 mm color film. Topology Films Project. International Film Bureau, Chicago, III. Accompanying book (preliminary edition), Education Development Center, Newton, MA.
- MAXWELL, J. C. 1890. *Scientific papers* (Dover reprint).
- MCKEAN, H. P., JR. 1955a. Hausdorff-Besicovitch dimension of Brownian motion paths. *Duke Mathematical J.* **22**, 229-234.
- MCKEAN, H. P., JR. 1955b. Sample functions of stable processes. *Annals of Mathematics* **61**, 564-579.
- MCKEAN, H. P., JR. 1963. Brownian motion with a several dimensional time. *Theory of Probability and its Applications* **8**, 357-378.
- MCMAHON, T. A. 1975. The mechanical design of trees. *Scientific American* **233**, 92-102.
- MCMAHON, T. A. & KRONAUER, R. E. 1976. Tree structures: Deducing the principle of mechanical design. *J. of Theoretical Biology* **59**, 433-466.
- MEJIA, J. M., RODRIGUEZ-ITURBE, I. & DAWDY, D. R. 1972. Streamflow simulation. 2. The broken line process as a potential model for hydrological simulation. *Water Resource Research*, **8**, 931-941.
- MELZAK, Z. A. 1966. Infinite packings of disks. *Canadian J. of Mathematics* **18**, 838-852.
- MENGER, K. 1943. What is dimension? *American Mathematical Monthly* **50**, 2-7. Reprint in Menger 1979, Ch. 17.
- MENGER, K. 1979. *Selected papers in logic and foundations, didactics and economics*. Boston: Reidel.
- MENSCHKOWSKI, H. 1967. *Probleme des Unendlichen*. Braunschweig: Vieweg.
- METROPOLIS, N., STEIN, M. L. & STEIN, P. R. 1973. On finite limit sets for transformations on the unit interval. *J. of Combinatorial Theory* **A15**, 25-44.
- MINKOWSKI, H. 1901. Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung* **9**, 115-121. Also in Minkowski 1911 **2**, 122-127.
- MINKOWSKI, H. 1911. *Gesammelte Abhandlungen*, Chelsea reprint.
- MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1963. On the laws of small scale turbulent flow of liquids and gases. *Russian Mathematical Surveys* (translated from the Russian). **18**, 89-109.
- MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1971 & 1975. *Statistical fluid mechanics, Volumes 1 and 2* (translated from the Russian). Cambridge, MA: MIT Press.
- MOORE, E. H. 1900. On certain crinkly curves. *Tr. of the American Mathematical Society* **1**, 72-90.
- MORI, H. 1980. Fractal dimensions of chaotic flows of autonomous dissipative systems. *Progress of Theoretical Physics* **63**, 1044-1047.
- MORI, H. & FUJISAKA, H. 1980. Statistical dynamics of chaotic flows. *Progress of Theoretical Physics* **63**, 1931-1944.

- MUNITZ, M. K. (Ed.) 1957. *Theories of the universe*. Glencoe, IL: The Free Press.
- MURRAY, C. D. 1927. A relationship between circumference and weight in trees. *J. of General Physiology* **IV**, 725-729.
- MYRBERG, P. J. 1962. Sur l'itération des polynômes réels quadratiques. *J. de Mathématiques pures et appliquées* (9)**41**, 339-351.
- NELSON, E. 1966. Derivation of the Schrodinger equation from Newtonian mechanics. *Physical Review* **150**, 1079- 1085.
- NELSON, E. 1967. *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton University Press.
- NEUENSCHWANDER, E. 1978. Der Nachlass von Casorati (1835-1890) in Pavia. *Archive for History of Exact Sciences* **19**, 1-89.
- NEWMAN, J. R. 1956. *The world of mathematics*. New York: Simon & Schuster.
- NORTH, J. D. 1965. *The measure of the universe*. Oxford: Clarendon Press.
- NOVIKOV, E. A. 1963. Variation in the dissipation of energy in a turbulent flow and the spectral distribution of energy. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* **27**, 944-946 (translation, 1445- 1450).
- NOVIKOV, E. A. 1965a. On correlations of higher order in turbulent motion (in Russian). *Fizika Atmosfery i Okeana* **1**, 788-796.
- NOVIKOV, E. A. 1965b. On the spectrum of fluctuations in turbulent motion (in Russian). *Fizika Atmosfery i Okeana* **1**, 992-993.
- NOVIKOV, E. A. 1966. Mathematical model of the intermittency of turbulent motion (in Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR* **168**, 1279 - 1282.
- NOVIKOV, E. A. 1971. Intermittency and scale similarity in the structure of a turbulent flow. *Prikladnaia Matematika i Mekhanika* **35**, 266-277. English in *P.M.M. Applied Mathematics and Mechanics*
- NOVIKOV, E. A. & STEWART, R.W. 1964. Intermittency of turbulence and the spectrum of fluctuations of energy dissipation (in Russian). *Isvestia Akademii Nauk SSR; Seria Geofizicheskaja* **3**, 408-413.
- NYE, M. J. 1972. *Molecular reality. A perspective on the scientific work of Jean Perrin*. London: Macdonald. New York: American Elsevier.
- OBUKHOV, A. M. 1941. On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* **32**, 22-24.
- OBUKHOV, A. M. 1962. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. of Fluid Mechanics* **13**, 77-81. Also in *J. of Geophysical Research* **67**, 3011 - 3014.
- OLBERS, W. 1823. Über die Durchsichtigkeit des Weltraums. *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1826 nebst einer Sammlung der neuesten in die astronomischen Wissenschaften einschlagenden Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten*, **150**, 110-121. Berlin: C.F.E. Späthen.

- OLDHAM, K. B. & SPANIER, J. 1974. *The fractional calculus*. New York: Academic.
- OREY, S. 1970. Gaussian sample functions and the Hausdorff dimension of level crossings. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **15**, 249-156.
- OSGOOD, W. F. 1903. A Jordan curve of positive area. *Tr. of the American Mathematical Society* **4**, 107-112.
- PAINLEVÉ, P. 1895. Leçon d'ouverture faite en présence de Sa Majesté le Roi de Suède et de Norvège. First printed in Painlevé 1972— **1**, 200-204.
- PAINLEVÉ, P. 1972-. *Oeuvres de Paul Painlevé*. Paris: Editions du CNRS.
- PALEY, R. E. A. C. & WIENER, N. 1934. *Fourier transforms in the complex domain*. New York: American Mathematical Society.
- PARETO, V. 1896-1965. *Cours d'économie politique*. Reprinted as a volume of *Oeuvres Complètes*. Geneva: Droz.
- PARTRIDGE, E. 1958. *Origins*. New York: Macmillan
- PAUMGARTNER, D. & WEIBEL, E. 1981. Resolution effects on the stereological estimation of surface and volume and its interpretation in terms of fractal dimension. *J. of Microscopy* **121**, 51-63.
- PEANO, G. 1890. Sur une courbe, qui remplit une aire plane. *Mathematische Annalen* **36**, 157-160. Translation in Peano 1973.
- PEANO, G. 1973. *Selected works*. Ed. H. C. Kennedy. Toronto University Press.
- PEEBLES, P. J. E. 1980. *The large-scale structure of the universe*. Princeton University Press.
- PERRIN, J. 1906. La discontinuité de la matière. *Revue du Mois* **1**, 323-344.
- PERRIN, J. 1909. Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Annales de chimie et de physique VIII* **18**, 5-114. Trans. F. Soddy, as *Brownian Movement and Molecular Reality*. London: Taylor & Francis.
- PERRIN, J. 1913. *Les Atomes*. Paris: Alcan. A 1970 reprint by Gallimard supercedes several revisions that had aged less successfully. English translation: *Atoms*, by D. L. Hammick; London: Constable. New York: Van Nostrand. Also translated into German, Polish, Russian, Serbian and Japanese.
- PETERSON, B. A. 1974. The distribution of galaxies in relation to their formation and evolution. *The formation and dynamics of galaxies*, Ed. Shakeshaft, J. R. IAU Symposium 58. Boston: Reidel, 75-847.
- PEYRIÈRE, J. 1974. Turbulence et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus (Paris)* **278A**, 567-569.
- PEYRIÈRE, J. 1978. Sur les colliers aleatoires de B. Mandelbrot. *Comptes Rendus (Paris)* **286A**, 937-939.
- PEYRIÈRE, J. 1979. Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction (privately distributed) .
- PEYRIÈRE, J., 1981. Processus de naissance avec interaction des voisins, Evolution de graphes, *Annales de l'Institut Fourier*, **31**, 187-218.
- POINCARÉ, H. 1890. *Calcul des probabilités* (2nd ed., 1912) Paris: Gauthier-Villars.

- POINCARÉ, H. 1905. *La valeur de la science*. Paris: Flammarion. English tr. by G. B. Halsted.
- POINCARÉ, H. 1913. *Dernières pensées*, Paris: Flammarion.
- POINCARÉ, H. 1916-. *Oeuvres de Henri Poincaré*. Paris: Gauthier Villars.
- PONTRJAGIN, L. & SCHNIRELMAN, L. 1932. Sur une propriété métrique de la dimension. *Annals of Mathematics* **33**, 156-162.
- PRUITT, W. E. 1975. Some dimension results for processes with independent increments. *Stochastic Processes and Related Topics*, **I**, 133-165. Ed. M. L. Puri. New York: Academic.
- PRUITT, W. E. 1979. The Hausdorff dimension of the range of a process with stationary independent increments. *J. of Mathematics and Mechanics* **19**, 371-378.
- PRUITT, W. E. & TAYLOR, S. J. 1969. Sample path properties of processes with stable components. *Z. fur Wahrscheinlichkeitstheorie* **12**, 267-289.
- QUEFFELEC, H. 197. Dérivabilité de certaines sommes de séries de Fourier lacunaires. (Thèse de 3e Cycle de Mathématiques.) Orsay: Université de Paris-Sud.
- RALL, W. 1959. Branching dendritic trees and motoneuron membrane resistivity. *Experimental Neurology* **1**, 491-527.
- RAYLEIGH, LORD 1880. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and arbitrary phase. *Philosophical Magazine* **10**, 73. Also in Rayleigh 1899 **1**, 491-.
- RAYLEIGH, LORD 1899. *Scientific papers*. Cambridge University Press. Dover reprint.
- RÉNYI, A. 1955. On a new axiomatic theory of probability. *Acta Mathematica Hungarica* **6**, 285335.
- RICHARDSON, L. F. 1922. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press. The Dover reprint contains a biography as part of a new introduction by J. Chapman.
- RICHARDSON, L. F. 1926. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Pr. of the Royal Society of London*. **A**, **110**, 709-737.
- RICHARDSON, L. F. 1960a. *Arms and insecurity: a mathematical study of the causes and origins of war*. Ed. N. Rashevsky & E. Trucco. Pacific Grove, CA: Boxwood Press.
- RICHARDSON, L. F. 1960s. *Statistics of deadly quarrels*. Ed. Q. Wright & C. C. Lienau. Pacific Grove, CA: Boxwood Press.
- RICHARDSON, L. F. 1961. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. *General Systems Yearbook* **6**, 139- 187.
- RICHARDSON, L. F. & STOMMEL, H. 1948. Note on eddy diffusion in the sea. *J. of Meteorology* **5**, 238- 240.
- ROACH, F. E. & GORDON, J. L. 1973. *The light of the night sky*. Boston: Reidel.



- ROGERS, C. A. 1970. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press.
- ROLL, R. 1970. *Behavior of interest rates: the application of the efficient market model to U.S. treasury bills*. New York: Basic Books.
- ROSE, N. J. 1981. The Pascal triangle and Sierpinski's tree. *Mathematical Calendar* 1981, Raleigh, NC: Rome Press.
- ROSEN, E. 1965. *Kepler's conversation with Galileo's sidereal messenger*. New York: Johnson Reprint.
- ROSENBLATT, M. 1961. Independence and dependence. *Proc. 4th Berkeley Symposium Mathematical Statistics and Probability* 441-443. Berkeley: University of California Press.
- ROSENBLATT, M. & VAN ATTA, C. (Eds.) 1972. *Statistical models and turbulence*. Lecture Notes in Physics **12**. New York: Springer.
- ROSS, B. (Ed.) 1975. *Fractional calculus and its applications*. Lecture Notes in Mathematics **457**. New York: Springer.
- RUELLE, D. 1972. Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence. In Rosenblatt & Van Atta. *Lecture Notes in Physics* **12**, 292-299. New York: Springer.
- RUELLE, D. & TAKENS, F. 1971. On the nature of turbulence. *Communications on Mathematical Physics* **20**, 167-192 & **23**, 343-344.
- RUSSELL, B. 1897. *An essay on the foundations of geometry*. Cambridge University Press (Dover reprint).
- SAFFMAN, P. G. 1968. Lectures on homogeneous turbulence. *Topics in Nonlinear Physics* Ed. N. J. Zabusky. New York: Springer.
- SALEM, R. & ZYGMUND, A. 1945. Lacunary power series and Peano curves. *Duke Mathematical J.* **12**, 569 - 578.
- SAYLES, R. S. & THOMAS, T. R. 1978. Surface topography as a nonstationary random process. *Nature* **271**, 431-434 & **273**, 573.
- SCHEFFER, V. 1976. Equations de Navier-Stokes et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus (Paris)* **282A**, 121-122.
- SCHEFFER, V. 1977. Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equation. *Pacific J. of Mathematics*.
- SCHÖNBERG, I. J. 1937. On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding on Hilbert space. *Annals of Mathematics* **38**, 787 - 793.
- SCHÖNBERG, I. J. 1938a. Metric spaces and positive definite functions. *Tr. of the American Mathematical Society* **44**, 522-536.
- SCHÖNBERG, I. J. 1938b. Metric spaces and completely monotone functions. *Annals of Mathematics* **39**, 811-841.
- SELETY, F. 1922. Beiträge zum kosmologischen Problem. *Annalen der Physik* **IV**, **68**, 281-334.
- SELETY, F. 1923a. Une distribution des masses avec une densité moyenne nulle, sans centre de gravité. *Comptes Rendus (Paris)* **177**, 104-106.
- SELETY, F. 1923b. Possibilité d'un potentiel infini, et d'une vitesse moyenne de toutes les étoiles égale a celle de la lumiere. *Comptes Rendus (Paris)* **177**, 250-252.

- SELETY, F. 1924. Unendlichkeit des Raumes und allgemeine Relativitätstheorie. *Annalen der Physik* **IV**, **73**, 291-325.
- SHANTE, V. K. S. & KIRKPATRICK, S. 1971. An introduction to percolation theory. *Advances in Physics* **20**, 325-357.
- SHEPP, I. A. 1972. Covering the circle with random arcs. *Israel J. of Mathematics* **11**, 328-345.
- SIERPINSKI, W. 1915. Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Comptes Rendus* (Paris) **160**, 302. More detail in Sierpinski 1974—, **11**, 99-106.
- SIERPINSKI, W. 1916. Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée. *Comptes Rendus* (Paris) **162**, 629. More detail in Sierpinski, 1974-, **11**, 107-119.
- SIERPINSKI, W. 1974-. *Oeuvres choisies*. Ed. S. Hartman et al. Warsaw: Éditions scientifiques.
- SINAI, JA. G. 1976. Self-similar probability distributions. *Theory of Probability and its Applications* **21**, 64-80.
- SINGH, A. N. 1935-53. *The theory and construction of nondifferentiable functions*. Lucknow (India): The University Press. Also in *Squaring the Circle and Other Monographs*. Ed. E. W. Hobson, H. P. Hudson, A. N. Singh & A. B. Kempe. New York: Chelsea.
- SMALE, S. 1977. Dynamical systems and turbulence. *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977*. Ed. P. Bernard & T. Ratiu, *Lecture Notes in Mathematics* **615** 48-70. New York: Springer.
- SMITH, A. 1972. The differentiability of Riemann's function. *Pr. of the American Mathematical Society* **34**, 463-468.
- SMITH, H. J. S. 1894. *Collected mathematical papers* (Chelsea reprint).
- SMYTHE, R. T. & WIERMANN, J. C., (Eds.) 1978. *First-passage percolation on the square lattice*. *Lecture Notes in Mathematics*, **671**, New York: Springer.
- SODERBLOM, L. A. 1980. The Galilean moons of Jupiter. *Scientific American*, **242**, 88-100.
- SOLER, J. 1973. Sémiotique de la nourriture dans la Bible. *Annales: Economies, Sociétés, Civilisations*. English translation: The dietary prohibitions of the Hebrews. *The New York Review of Books*, June 14, 1979, or *Food and Drink in History*: Ed. R. Foster & O. Ranum. Baltimore: Johns Hopkins University Press.
- STANLEY, H. E. 1977. Cluster shapes at the percolation threshold: an effective cluster dimensionality and its connection with critical-point phenomena. *J. of Physics* **A10**, L211 - L220.
- STANLEY, H. E., BIRGENEAU, R. J., REYNOLDS, P. J. & NICOLL, J. F. 1976. Thermally driven phase transitions near the percolation threshold in two dimensions. *J. of Physics* **C9**, L553-L560.
- STAPLETON, H. B., ALLEN, J. P., FLYNN, C. P., STINSON, D. G. & KURTZ, S. R. 1980. Fractal form of proteins. *Physical Review Letters* **45**, 1456-1459. (See also Allen et al. 1981)

- STAUFFER, D. 1979. Scaling theory of percolation clusters. *Physics Reports* **34**, 1-74.
- STEIN, P. R. & ULAM, S. 1964. Non-linear transformation studies on electronic computers. *Rozprawy Matematyczne* **39**, 1-66. Also in Ulam 1974, 401-484.
- STEINHAUS, H. 1954. Length, shape and area. *Colloquium Mathematicum* **3**, 1-13.
- STENT, G. 1972. Prematurity and uniqueness in scientific discovery. *Scientific American* **227** (December) 84-93.
- STEVENSON, B. 1956. *The home book of quotations* (8th ed.), New York: Dodd-Mead.
- STONE, E. C. & MINER, E. D. 1981. Voyager I Encounter with the Saturnian system. *Science* **212**, Cover & 159-163.
- STRAHLER, A. N. 1952. Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography. *Geological Society of American Bulletin* **63**, 1117-1142.
- STRAHLER, A. N. 1964. Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks. In *Handbook of Applied Hydrology* sect. 4-11. Ed. V. T. Chow. New York: McGraw-Hill.
- SULLIVAN, D. 1979. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications Mathematiques* **50**.
- SUWA, N. & TAKAHASHI, T. 1971. *Morphological and morphometrical analysis of circulation in hypertension and ischemic kidney*. Munich: Urban & Schwarzenberg.
- SUWA, N., NIWA, T., FUKASAWA, H. & SASAKI, Y. 1963. Estimation of intravascular blood pressure gradient by mathematical analysis of arterial casts. *Tohoku J. of Experimental Medicine* **79**, 168-198.
- SUZUKI, M. 1981. Extension of the concept of dimension—phase transitions and fractals. *Suri Kagaku (Mathematical Sciences)* **221**, 13-20.
- SWIFT, J. 1733. On Poetry, a Rhapsody.
- TAQQU, M. S. 1970. Note on evaluation of R/S for fractional noises and geophysical records. *Water Resources Research*, **6**, 349-350.
- TAQQU, M. S. 1975. Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **31**, 287-302.
- TAQQU, M. S. 1977. Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of the Gaussian variables that exhibit a long range dependence. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, **40**, 203-238.
- TAQQU, M. S. 1978. A representation for selfsimilar processes. *Stochastic Processes and their Applications*, **7**, 55-64.
- TAQQU, M. S. 1979a. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **50**, 53-83.
- TAQQU, M. S. 1979b. Self-similar processes and related ultraviolet and infrared catastrophes. *Random Fields: Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum field Theory*. Amsterdam: North Holland.

- TAYLOR, G. I. 1935. Statistical theory of turbulence; parts I to IV. *Pr. of the Royal Society of London* **A151**, 421-478. Reprinted in Friedlander & Topper 1961, 18-51.
- TAYLOR, G. I. 1970. Some early ideas about turbulence. *J. of Fluid Mechanics* **41**, 3-11.
- TAYLOR, S. J. 1955. The  $\alpha$ -dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* **51**, 265-274.
- TAYLOR, S. J. 1961. On the connection between Hausdorff measures and generalized capacities. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* **57**, 524-531.
- TAYLOR, S. J. 1964. The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* **60**, 253-258.
- TAYLOR, S. J. 1966. Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **5**, 247-264.
- TAYLOR, S. J. 1967. Sample path properties of a transient stable process. *J. of Mathematics and Mechanics* **16**, 1229 - 1246.
- TAYLOR, S. J. 1973. Sample path properties of processes with stationary independent increments. *Stochastic Analysis*. Ed. D.G. Kendall & E.F. Harding. New York: Wiley.
- TAYLOR, S. J. & WENDEL, J. C. 1966. The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **6**, 170-180.
- TENNEKES, H. 1968. Simple model for the small scale structure of turbulence. *Physics of Fluids* **11**, 669-672.
- TESNIERE, M. 1975. Fréquences des noms de famille. *J. de la Société de Statistique de Paris* **116**, 24-32.
- THOMA, R. 1901. Über den Verzweigungsmodus der Arterien. *Archiv der Entwicklungsmechanik* **12**, 352-413.
- THOMPSON, D'A. W. 1917-1942-1961. *On growth and form*. Cambridge University Press. The dates refer to the first, second and abridged editions.
- ULAM, S. M. 1957. Infinite models in physics. *Applied Probability*. New York: McGraw-Hill. Also in Ulam 1974, 350-358.
- ULAM, S. M. 1974. *Sets, numbers and universes: selected works*. Ed. W. A. Beyer, J. Mycielski & G.-C. Rota. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
- URYSOHN, P. 1927. Mémoire sur les multiplicités cantoriennes. II: les lignes cantoriennes. *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*. (Eerste Sectie) **XIII** no. 4.
- VAN DER WAERDEN, B. L. 1979. *Die Pythagoreer*.
- VILENKIN, N. YA. 1965. *Stories about sets*. New York: Academic.
- VON KOCH, H. 1904. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv for Matematik, Astronomioch Fysik* **1**, 681-704.

- VON KOCH, H. 1906. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Mathematica* **30**, 145-174.
- VON NEUMAN N, J . 1949-1963. Recent theories of turbulence. The dates refer to publication as a report to ONR and in von Neumann, 1961-**6**, 437-472.
- VON NEUMANN, J. 1961- *Collected works*. Ed. A. H. Traub. New York: Pergamon.
- VON SCHWEIDLER, E. 1907. Studien über die Anomalien in Verhalten der Dielektrika. *Annalen der Physik* (**4**)**24**, 711 -770.
- VON WEIZSACKER, C. F. 1950. Turbulence in interstellar matter. *Problems of Cosmical Aerodynamics* (IUTAM & IAU). Dayton: Central Air Documents Office.
- VOSS, R. F. & CLARKE, J. 1975. "1/f noise" in music and speech. *Nature* **258**, 317-318.
- VOSS, R. F. 1978. 1/f noise in music; music from 1/f noise. *J. of the Acoustical Society of America* **63**, 258-263.
- VOSS, R. F. 1982. Fourier synthesis of Gaussian fractals: 1/f noises, landscapes, and flakes (to appear) .
- WALLENQUIST, A. 1957. On the space distribution of galaxies in clusters. *Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik* **2**, 103-110.
- WALSH, J. L. 1949. Another contribution to the rapidly growing literature of mathematics and human behavior. *Scientific American* (August issue) 56-58.
- WEIBEL, E. R. 1963. *Morphometry of the human lung*. New York: Academic.
- WEIBEL, E. 1979. *Stereological methods* (2 vols.). London: Academic.
- WEIERSTRASS, K. 1872. Über kontinuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotient besitzen. Unpublished until Weierstrass 1895-, II, 71-74.
- WEIERSTRASS, K. 1895-. *Mathematische Werke*. Berlin: Mayer & Muller.
- WEYL, H. 1917. Bemerkungen zum begriff der differentialquotienten gebrochener ordnung. *Vierteljahrschrift der Naturforscher Gesellschaft in Zurich* **62**, 296-302.
- WHITTAKER, E. T. 1953. *A history of the theories of aether and electricity*. New York: Philosophical Library.
- WHYBURN, G. T. 1958. Topological characterization of the Sierpinski curve. *Fundamenta Mathematicae* **45**, 320 - 324.
- WIENER, N. 1948-1961. *Cybernetics*. Paris: Hermann. New York: Wiley (1st edition). Cambridge, MA: M.I.T. Press (2d edition).
- WIENER, N. 1953. *Ex-prodigy*. New York: Simon & Schuster. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
- WIENER, N. 1956. *I am a mathematician*. Garden City, N.Y.: Doubleday. Cambridge, MA: M.I.T., Press.
- WIENER, N. 1964. *Selected papers*. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
- WIENER, N. 1976-. *Collected works*. Ed. P. Masani. Cambridge, MA: M.I.T. Press.

- WIGNER, E. P. 1960. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13**, 1-14. Also in Wigner 1967, 222-237.
- WIGNER, E. P. 1967. *Symmetries and reflections*. Indiana University Press. MIT Press Paperback.
- WILLIS, J. C. 1922. *Age and area*. Cambridge University Press.
- WILSON, A. G. 1965. Olbers' paradox and cosmology. Los Angeles, Astronomical Society.
- WILSON, A. G. 1969. Hierarchical structures in the cosmos. *Hierarchical Structures*, 113-134. Ed. L. L. Whyte, A. G. Wilson & D. Wilson. New York: American Elsevier.
- WILSON, K. 1975. The renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem. *Reviews of Modern Physics* **47**, 773-840.
- WILSON, K. G. 1979. Problems in physics with many scales of length. *Scientific American* **241** (August issue) 158-179.
- WILSON, J. T. (Ed.) 1972. *Continents adrift*. Readings from *Scientific American*. San Francisco: W. H. Freeman.
- WILSON, T. A. 1967. Design of the bronchial tree. *Nature* **213**, 668-669.
- WOLF, D. (Ed.) 1978. *Noise in physical systems*. (Bad Neuheim Conference) New York: Springer.
- YAGLOM, A. M. 1957. Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes. *Theory of Probability and its Applications* **2**, 273-320. Tr. R. A. Silverman.
- YAGLOM, A. M. 1966. The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulence characteristics in the inertial interval. *Doklady Akademii Nauk SSSR* **16**, 49-52. (English trans. *Soviet Physics Doklady* **2**, 26-29.)
- YODER, L. 1974. Variation of multiparameter Brownian motion. *Pr. of the American Mathematical Society* **46**, 302-309.
- YODER, L. 1975. The Hausdorff dimensions of the graph and range of N-parameter Brownian motion in d-space. *Annals of Probability* **3**, 169-171.
- YOUNG, W. H. & YOUNG, G. C. 1906. *The theory of sets of points*. Cambridge University Press.
- YULE, G. UDNY 1924. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J. C. Willis, F. R. *Philosophical Tr. of the Royal Society (London)* **213 B**, 21-87.
- ZIMMERMAN, M. H. 1978. Hydraulic architecture of some diffuse-porous trees. *Canadian J. of Botany*, **56**, 2286-2295.
- ZIPF, G. K. 1949. *Human behavior and the principle of least-effort*. Cambridge, MA: AddisonWesley. (Hefner reprint.)
- ZYGMUND, A. 1959. *Trigonometric series*. Cambridge University Press.

## Referencias de la actualización y breve bibliografía suplementaria

- ALEXANDER, S. & ORBACH, R. 1982. Density of states on fractals: "fractons". *Journal de Physique Lettres* **43**, 625-
- \*AGTENBERG, F. P. 1982. Recent developments in geomathematics. *Geo-processing* **2**.
- ANDREWS, D. J. 1980-81. A stochastic fault model. I Static case, II Time-dependent case. *Journal of Geophysical Research* **85B**, 3867-3877 and **86B**, 10821 - 10834.
- \*BLEI, R. 1983. Combinatorial dimension: a continuous parameter. *Symposia Mathematica* (Italia). To appear.
- BURKS, A. W. (Ed.) 1970. *Essays on Cellular Automata*, Urbana, IL: University of Illinois Press
- \*BURROUGH, P. A. 1981. Fractal dimensions of landscapes and other environmental data. *Nature* **294**, 240-242.
- \*CANNON, J. W. 1982. Topological, combinatorial and geometric fractals. *The 31st Earle Raymond Hedrick Lectures of the Mathematical Association of America*, delivered at the Toronto Meeting.
- CHORIN, A. 1982a. The evolution of a turbulent vortex. *Communication in Mathematical Physics* **83**, 517-535.
- CHORIN, A. 1982b. Numerical estimates of Hausdorff dimension. *Journal of Computational Physics* **46**.
- \*DEKKING, F. M. 1982. Recurrent sets. *Advances in Mathematics* **44**, 78-104.
- DOUADY, A. & HUBBARD, J. H. 1982. Itération des polynômes quadratiques complexes. *Comptes Rendus* (Paris) **2941**, 123-126.
- GEFEN, Y., AHARONY, A. & MANDELBROT, B. 1983. Phase transitions on fractals: I. Quasi-linear lattices. *Journal of Physics A*.
- GEFEN, Y., MEIR, Y., MANDELBROT, B. & AHARONY, A. 1983. Geometric implementation of hypercubic lattices with noninteger dimensionality, using low lacunarity fractal lattices. To appear.
- \*GILBERT, W. T. 1982. Fractal geometry derived from complex bases. *Mathematical Intelligencer* **4**, 78-86.
- \*HATLEE, M. D. & KOZAK, J. J. 1981. Stochastic flows in integral and fractal dimensions and morphogenesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* **78**, 972-975.

- HENTSCHEL, H. G. E. & PROCACCIA, I. 1982. Intermittency exponent in fractally homogeneous turbulence. *Physical Review Letters* **49**, 1158-1161.
- \*HENTSCHEL, H. G. E. & PROCACCIA, I. 1983. Fractal nature of turbulence as manifested in turbulent diffusion. *Physical Review A* (Rapid Communication).
- \*HUGHES, B. D., MONTROLL, E. W. & SHLESINGER, M. F. 1982. Fractal random walks. *Journal of Statistical Physics* **28**, 111-126.
- \*KAC, M. Recollections concerning Peano curves and statistical independence. *Probability, Number Theory and Statistical Physics (Selected Papers)* Cambridge, MA: M.I.T. Press, ix-xiii.
- KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF, L. 1978. Statistical study of the occurrence of shallow earthquakes. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **55**, 67-86.
- KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF, L. 1980. Spatial distribution of earthquakes: the two-point correlation function. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **62**, 303-320.
- KAGAN, Y. Y. & KNOPOFF, L. 1981. Stochastic synthesis of earthquake catalogs. *Journal of Geophysical Research* **86B**, 2853-2862.
- \*KAHANE, J. P. 1976. Mesures et dimensions. *Turbulence and Navier-Stokes Equations* (Ed. R. Temam) Lecture Notes in Mathematics **565** 94-103, New York: Springer.
- KAPITULNIK, A. & DEUTSCHER, G. 1982. Percolation characteristics in discontinuous thin films of Pb. *Physical Review Letters* **49**, 1444-1448.
- KAPITULNIK, A., AHARONY, A., DEUTSCHER, G. & STAUFFER, D. 1983. Self-similarity and correlation in percolation. To appear.
- \*KAYE, B. H. 1983. Fractal description of fine particle systems. *Modern Methods in Fineparticle Characterization* (Ed. J. K. Beddow) Boca Raton, FL: CRC Press.
- LE MEHAUTÉ, A. & CREPY, G. 1982. Sur quelques propriétés de transferts électrochimiques en géométrie fractale. *Comptes Rendus (Paris)* **294-11**, 685-688.
- LE MEHAUTÉ, A., DE GUIBERT, A., DELAYE, M. & FILIPPI, C. 1982. Note d'introduction de la cinétique des échanges d'énergies et de matières sur les interfaces fractales. *Comptes Rendus (Paris)* **294-11**, 835-838.
- LOVEJOY, S. 1981. *Preprints 20th Conference on Radar Meteorology*. A.M.S., Boston, 476-
- \*LOVEJOY, S. & SCHERTZER, D. 1983. Bouyancy, shear, scaling and fractals. *Sixth Symposium on Atmospheric and Oceanic Waves and Stability* (Boston).
- LOVEJOY, S. & MANDELBROT, B. B. 1983. To appear.
- MANDELBROT, B. B. 1983p. On the quadratic mapping  $z \rightarrow z^2 - \mu$  for complex  $\mu$  and  $z$ : the fractal structure of its  $M$  set, and scaling. *Order in Chaos* (Ed. D. Campbell) and *Physica D*.
- MANDELBROT, B. B. & NORTON, V. A. 1983. To appear.



- MANDELBROT, B. B., PASSOJA, D. & PAULLAY, A. 1983. To appear.
- \*MANDELBROT, B. B. 1982c. Comments on computer rendering of fractal stochastic models. *Communications of the Association for Computing Machinery* **25**, 581-583.
- \*MENDES-FRANCE, M. & TENENBAUM, G. 1981. Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **109**, 207-215.
- \*MONTROLL, E. W. & SHLESINGER, M. F. 1982. On  $1/f$  noise and other distributions with long tails. *Proceedings of the National Academy of Science of the USA* **79**, 3380-3383.
- NORTON, V. A. 1982. Generation and display of geometric fractals in 3-D. *Computer Graphics* **16**, 61-67.
- RAMMAL, R. & TOULOUSE, G. 1982. Spectrum of the Schrodinger equation on a self-similar structure. *Physical Review Letters* **49**, 1194 - 1197.
- RAMMAL, R. & TOULOUSE, G. 1983. Random walks on fractal structures and percolation clusters. *Preprint*.
- \*ROTHROCK, D. A. & THORNDIKE, A. S. 1980. Geometric properties of the underside of sea ice. *Journal of Geophysical Research* **85C**, 3955-3963.
- RUELLE, D. 1982. Analytic repellers. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*.
- \*SERRA, J. 1982. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. New York: Academic.
- \*SHLESINGER, M. F., HUGHES, B. D. 1981. Analogs of renormalization group transformations in random processes. *Physica* **109A**, 597-608.
- STEIN, K. 1983. *Omni* (February issue).
- STEPHEN, M. J. 1981. Magnetic susceptibility of percolating clusters. *Physics Letters* **A87**, 67-68.
- \*STEVENS, R. J., LEMAR, A. F. & PRESTON, F. H. Manipulation and presentation of multidimensional image data using the Peano scan.
- \*SUZUKI, M. 1981. *Phase transitions and fractals* (in Japanese) *Suri Kagaku* **221**, 13-20.
- \*TRICOT, C. 1981. Douze définitions de la densité logarithmique. *Comptes Rendus (Paris)* **293I** 549-552.
- VICHNIAC, G. 1983. To appear.
- VOSS, R. F., LAIBOWITZ, R. B. & ALESSANDRINI, E. I. 1982. Fractal (scaling) clusters in thin gold films near the percolation threshold. *Physical Review Letters* **49**, 1441-1444.
- WILLSON, S. J. 1982. Cellular automata can generate fractals. *Preprint*.
- WOLFRAM, S. 1983. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*.



## Créditos de las ilustraciones por ordenador

Sigmund W. Handelman, Richard F. Voss, Mark R. Laff, V. Alan Norton y Douglas M. McKenna son los autores de la mayor parte de las ilustraciones por ordenador de este ensayo. Están ordenados según el orden cronológico de su primera contribución.

En la lista pormenorizada de esta página, referida a las ilustraciones en blanco y negro, el número de cada lámina va seguido de la inicial del autor del programa generador. Las ilustraciones que fueron mejoradas por varias manos se han atribuido a todos los colaboradores directos. Los programas de ordenador empleados para las ilustraciones en color fueron preparados por Richard F. Voss (láminas C9 a C15) y V. Alan Norton (láminas C5 y C7).

La amable ayuda de otras muchas personas fue también vital; a continuación doy una relación de ellas en orden cronológico. Hirsh Lewitan contribuyó a las láminas 296 y 297. Gerald B. Lichtenberger colaboró indirectamente en varias láminas. La lámina 170 es de Jean-Louis Oneto, que empleó un paquete gráfico de vanguardia de Cyril N. Alberga. La lámina 271 es una forma revisada de otra debida a Arthur Appel y Jean-Louis Oneto. Scott Kirkpatrick colaboró en la lámina 132 y proporcionó programas que sirvieron para la preparación de las láminas 220 a 223, y 306 a 309. Peter Oppenheimer contribuyó a los diagramas de la página 173. Peter Moldave colaboró en las láminas 188 a 191. David Mumford y David Wright contribuyeron a la lámina 178.

La portada y las hojas de la encuadernación son obra de V. A. Norton.

25:V	73:HL	83:V
26:V	74:H	85:H
57:L	75:L	86:V
58:H	76:M	93:H
70:H	78:V	96:H
71:H	80:V	97:M
72:H	82:V	100:H

102:L	266:N	375:V
103:L	268:LN	376:V
104:H	269:LN	377:V
105:M	271:LN	378: H
108:LM	272:N	379:V
117:H	274:M	383:H
118:M	282:L	404:H
121:H	283:L	405:L
139:H	313:H	406:L
140:H	314:L	415:L
176:V	315:H	418:H
204:H	316:H	416:HM
205:N	317:H	417:HM
208:L	318:H	419:M
221:H	324:H	420:M
233:H	325:V	421:H
234:H	326:L	429:H
235:H	327:L	430:H
245:H	328:L	431: H
248:L	342:N	432:H
255:N	343:N	444:M
256:N	347:H	451:L
257:N	362:H	453:L
265:LN	374:V	

## Agradecimientos

Al contrario de lo que ocurre con los libros que se escriben con una idea precisa del estilo y del objetivo final, la presente, «*macedoine de livre*» surgió gradualmente, en un largo proceso. Directamente o entre líneas, en digresiones y en los esbozos biográficos e históricos, ya he reconocido mis principales deudas intelectuales. Su cantidad y diversidad, que crecen incesantemente, ya subrayan el hecho de que ninguna prevalearca sobre las demás.

Sin embargo, los azares de las citas han dejado desairados a Norbert Wiener y a John von Neumann: ambos elogiaron mi trabajo y me influyeron en gran medida, más con su ejemplo que con sus actos.

Otras influencias intelectuales importantes de otra clase muy distinta, que no he agradecido apropiadamente todavía, son las de mi tío y mi hermano.

Una traducción preliminar de la primera versión (en francés) se hizo con la colaboración de J. S. Lourie. R. W. Gosper, de Stanford, me mostró su curva de Peano antes de publicarla. M. P. Schützenberger de París, J. E. Marsden de Berkeley, M. F. M. Osborne de U.S.N.R.L., Jacques Peyrière de Orsay, Y. Gefen y A. Aharony de Tel Aviv, y D. Mumford y P. Moldave de Harvard me ayudaron de diversas maneras.

P. L. Renz, editor de W. H. Freeman & Co, demostró que su gremio no es del todo irredimible. Le estoy agradecido por aceptar la idiosincrática composición que yo deseaba experimentar. Estoy también muy agradecido a R. Ishikawa, de W. H. Freeman & Co.

Algunas citas interesantes me fueron indicadas por M. V. Berry, K. Brecher, I. B. Cohen, H. de Long, M. B. Girsdansky, A. B. Meador, J. C. Pont, M. Serres, B. L. van den Waerden, y Zajdenweber. Otras citas fueron usadas anteriormente por G. Birkhoff, R. Bonola, J. Bromberg, C. Fadiman, T. Ferris, J. Gimpel, C. J. Glacken, D. M. Johnson, P. S. Stevens, y E. T. Whittaker.

M. C. Gutzwiller, P. E. Seiden, J. A. Armstrong, y P. Chaudhari, directores de departamento en IBM, contribuyeron a que esta obra se desarrollara sin sobresaltos.

D. F. Bantz nos permitió usar el equipo de gráficos en color de su proyecto. I. M. Cawley, C. H. Thompson, P. G. Capek, J. K. Rivlin y otros miembros del personal de biblioteca, tratamiento de textos y gráficos de IBM Research fueron extraordinariamente serviciales y toleraron una política deliberada de aprovechar todos y cada uno de sus aparatos con un rendimiento superior a aquel para el que fueron diseñados.

## Índice de dimensiones escogidas: euclídea ( $E$ ), fractal ( $D$ ) y topológica ( $D_T$ )

Los números en **negrita** se refieren a los capítulos dedicados al artículo.

Cuando la dimensión euclídea se denota por  $E$ , su valor es un entero positivo arbitrario.

### I. FIGURAS GEOMÉTRICAS FUNDAMENTALES, Y SUS $D$ Y $D_T$ RIGUROSAS

	$E$	$D$	$D_T$	páginas
• <i>Conjuntos euclídeos «estándar», <math>D = D_T</math></i>				
Un punto solo	$E$	0	0	
Número finito de puntos	$E$	0	0	
Conjunto numerable	$E$	0	0	
Recta, circunferencia y otras curvas estándar	$E$	1	1	72
Disco plano y otras superficies estándar	$E$	2	2	72
Bola en $R^3$ o en $R^E$ y otros volúmenes estándar	$E$	$E$	$E$	
• <i>Conjuntos que (contra lo que sería de esperar) no son fractales</i>				
«Curva» de Peano que llena el plano	2	2	2	7, 181, 187
Escalera del diablo de Cantor	2	1	1	121
Escalera del diablo de Lévy	2	1	1	405
Trayectoria browniana ordinaria en $R$	1	1	1	
Trayectoria browniana fraccionaria en $R^E$ con $H < 1/2$	$E$	$E$	$E$	359
• <i>Conjuntos fractales no aleatorios que satisfacen <math>D &gt; D_T</math></i>				
Polvo de Cantor: conjunto triádico en la recta	1	$\log_2 / \log_3$	0	110 y sigs.
Polvos de Cantor: no triádicos	$E$	$0 < D < E$	0	113 y sigs.
Curva de Koch: copo de nieve triádico	2	$\log_4 / \log_3$	1	<b>6</b>
Curva de Koch: contorno del copo deforme	2	$\log_4 / \log_3$	1	107, 108
Curva de Koch: piel del dragón de Harter-Heightway	2	1,5236	1	99, 100
Curvas de Koch en $R^2$ , no triádicas	2	$1 < D < 2$	1	<b>6</b>

Tamiz de Sierpinski y curva punta de flecha	2	$\log 3 / \log 2$	1	<b>14</b>
Curvas monstruosas de Lebesgue-Osgood	2	2	1	<b>15</b>
Superficies monstruosas de Lebesgue-Osgood	3	3	2	<b>15</b>

• *Conjuntos fractales aleatorios*

Fractales brownianas de una variable real:

— trayectoria para $E \geq 2$	$E$	2	1	330
— función en $R^2$	2	$3/2$	1	336
— función en $R^{E-1}$ con $E > 2$	$E$	$1+(E-1)/2$	1	522
— conjunto de ceros de la función real	1	$1/2$	0	335

Fractales brownianas reales definidas en el espacio (o sobre la esfera):

— función de $R^2$ en $R$	3	$5/2$	2	364-365
— conjunto de ceros de esta función	2	$3/2$	1	364-365
— isosuperficies escalares de turbulencia de Burgers	3	$5/2$	2	<b>30</b>

Fractales brownianas  $H$  fraccionarias de una variable real:

— trayectoria cuando $H > 1/E$	$E$	$1/H$	1	358
— conjunto de ceros	1	$1-H$	0	358
— función	2	$2-H$	1	358

Fractales brownianas  $H$  fraccionarias reales de varias variables:

— función de $R^2$ en $R$	3	$3-H$	2	495
— conjunto de ceros de esta función 2	2	$2-H$	1	495
— isosuperficies escalares de				
— turbulencia de Kolmogorov	3	$8/3$	2	<b>30</b>

Procesos estables según Lévy con  $D < 2$ : trayectoria

$E$	$D$	0	519
-----	-----	---	-----

II: OTRAS FIGURAS GEOMÉTRICAS SU  $D_T$  Y SU  $D$  ESTIMADAS

• *Conjuntos fractales no escalantes y no aleatorios*

Tamiz y red apolonianas

(cotas exactas: $1,300197 < D < 1,314534$ )	2	1,3058	1	247
---------------------------------------------	---	--------	---	-----

• *Conjuntos fractales aleatorios*

Paseo/polígono aleatorio autoevitante y reescalado en  $R^2$

2	1,33	1	339
---	------	---	-----

Paseo aleatorio autoevitante y reescalado en  $R^3$

3	1,67	1	339
---	------	---	-----

Río de una red de Leopold y Langbein

2	1,28	1	465 y sigs.
---	------	---	-------------

Racimo de percolación crítica de Bernouilli

— todo el racimo en el plano	2	1,89	1	186
— espina dorsal en el plano	2	1,6	1	191
— espina dorsal en $R^E$ para $E$ pequeño	$E$	$\log 2(E+1)$	1	192



### III. OBJETOS NATURALES ESTANDAR (EUCLIDEOS) Y SUS $D$ Y $D_T$

Bola muy pequeña	$E$	0	0	36
Hilo muy fino	$E$	1	1	36
Esfera hueca (pulida por dentro y por fuera)	3	2	2	36
Bola pulida (maciza)	3	3	3	36

### IV. OBJETOS FRACTALES NATURALES, SU $D_T$ ESTIMADA Y SU $D$ TÍPICA

Costa marina (exponente de Richardson)	2	1,2	1	59
Ribera total de una red fluvial	2	2	1	7
Perfil de un río (exponente de Hack)	2	1,2	1	160
Sistema vascular 3	3	3	2	214
Membrana pulmonar en escalas de ramificación	3	2,90	2	165, 224
Corteza de un árbol	3	3	2	
Errores fractales	1	0,30	0	8
Galaxias en el dominio escalante	3	1,23	0	9
Turbulencia: soporte de la disipación	3	2,50-2,60	2	10, 11
Frecuencias de palabras	n.a.	0,9	n.a.	38



# Índice onomástico y de materias

- Abbott, L.F., 339  
Adler, R.J., 364, 495, 507  
afinidad, 335-36  
aglutinación (*véase* polvos)  
aglutinación para los polvos, 136  
Aharony, A., 191, 199  
alargamiento de los vórtices, 144  
aleatorio, paseo, 340-341  
    autoevitante, 461  
    límite fractal, 458  
aleatorios/as  
    cadenas, 320, 322, 325-326  
    garabatos, 321-324, 327-328  
    modelos, cap. 21-22  
    semillas pseudoaleatorias, 290  
Alexander, S., 468, 470  
álgebra, 19  
alometría, 490  
alveolos (pulmonares), 166, 225  
análisis armónico, 33, cap. 39  
análisis dimensional  
    fractal, cap. 12  
    estándar, 159  
análisis espectral, 33  
análisis R/S, 538  
anatomía pulmonar, 165, 224  
anatomía, 164-66, 213-14, 224-25, 229  
anchura de los ríos, 231  
anchura del río Missouri, 231  
anillos de Saturno, 118  
anómala, dimensión, 34  
antipersistencia, 355, 359, 494  
apoloniano/a  
    red/tamiz/relleno, 243-44, 254  
árbol de los monos, 57  
árboles, cap. 16-17  
    botánicos, 157, 228, 240  
    fluviales, 88-89, 106-108  
    jerárquicos, 486-487  
    lexicográficos, 482  
    que llenan el plano, cap. 7, 106-108  
    racimos, 175  
árboles lexicográficos, 482  
arco de Koch, 67  
archipiélago de Koch, cap. 13  
argumento de renormalización, 264  
arte geométrico, 43  
arte, 18, 43, 347, C16  
arteras y venas, 213-214  
Arthur, D.W.G., 424  
aspectos logísticos, 44  
atracción newtoniana, 20, 132, 134, 532  
atractor Hénon, 281  
atractores extraños, cap. 20, 281  
atractores, cap. 20, 574  
ausencia de tangente, cap. 2, 70  
autoafinidad, 335-336, 360, 489  
    invocación vacía frente a descripción,  
        291  
    con autoligaduras, 291  
    sin/con ligaduras, 291, 344-45  
autoevitante  
    curvas de Koch, 61, 66  
    movimiento browniano, 342-343  
    paseo aleatorio, 323, 461  
    polígono, 464  
autosemejanza, 60, 489  
Avron, J.E., 119  
azar benigno, 537-538  
azar, cap. 21 y 22  
Azbel, M.Ya., 121  
  
Bachelier, L., 467, 490, 548-549, 555  
baldosa, 74, 88, 242  
Band, W., 164  
Barber, M.N., 461  
barra, 143  
barridos en copo de nieve, 102-103

- Batchelor, G.K., 145, 147  
 Bentley, R., 22  
 Bentley, R.W., 136  
 Berger, J.M., 111, 306, 397-398, 401  
 Bernouilli, J., 564-565  
 Berry, M.V., 457, 542  
 Besicovitch, A.S., 18, 32, 33, 501-502, 506, 509, 521, 543  
 Beyer, W.A., 543  
 Bidaux, R., 253  
 Bienaymé, J., 304, 514  
 Bijl, A., 164  
 Billingsley, P., 507  
 Birgenau, R.J., 187  
 Birkhoff, G., 154, 160, 392, 588  
 Bishop, G.J., 187  
 Blumenthal, L.M., 198, 206-207  
 Blumenthal, R.M., 520  
 Boccara, N., 253  
 Bochner, 411  
 Boltzmann, L., 579  
 Bolzano, B., 18, 584  
 Bondi, H., 295  
 Borel, E., 131  
 botellas de Leyden, 579  
 Bouligand, G., 54, 501, 573  
 Bourbaki, N., 564  
 Boyd, D.W., 247, 502  
 Bragg, W.H., 253  
 Brodman, K., 165  
 Brolin, H., 259  
 bronquios, 224, 234-235  
 Brouwer, L.E.J., 32, 571-573  
 Browand, F.K., 143  
 Brown, G.L., 143  
 Brown, R., 568  
 browniano (*véase* también brownianos fraccionarios)  
   conjuntos, 329-330, cap. 28, 30, 490  
   conjunto de ceros, 335  
   costas, 364-365, 376-377, C 9-15  
   envolturas, 342-343  
   fractales, 329-30, capítulos 28 y 30, 490  
   función y trayectoria, 330  
   huecos, 332  
   islas, 342-343, 376-377  
   paisajes, 374-375, 378  
   *Pangea*, 379, C 9  
   puente, 492-493  
   redes, 332  
   relieve  
     efectos globales 365-366  
     sobre una tierra esférica, 366-367  
     sobre una tierra plana, 363-364  
   sábana, 364  
   trayectoria, 330-31, 334  
 brownianos fraccionarios  
   curvas de nivel, 378  
   funciones, 355  
   modelo de descarga fluvial, 359  
   relieve, 368, 370  
   trayectorias, 358, 362  
   trayectorias planas, 358, 362  
 Brush, S.G., 568  
  
 cadenas (aleatorias), 319-20, 322, 325-26  
 Calisto, satélite joviano, 428  
 calmado, 537  
 calles aleatorias, 404  
 calles Kármán, 142  
 Cantor, G., 18, 31, 41, 111-112, 565-567  
 Cantor  
   barra/tarta/cortinas, 117-119  
   conjunto (*véase* polvo de Cantor)  
   dimensión de Minkowski-Bouligand, 499  
   discontinuo (*véase* polvo de Cantor), 111  
   escalera del diablo, 120-121  
   espacio (*véase* polvo de Cantor)  
   polvo, capítulo 8, 259-260, 437, 569  
   recubrimiento, 499  
 caos/caótico, 242, cap. 20  
 capacidad  
   para entropía ( $\log M(p)$ ), 502  
   para potencial, 532-533  
 Carathéodory, C., 507  
 Cartier, P., 498  
 cascadas  
   ascendente, 113  
   Cantor, 112  
   descendente, 60  
   Hoyle, 131  
   intuitiva, 60  
   Koch, 60-61  
   Novikov & Steward, 149  
   Richardson, 53-54, 82  
 catástrofe infrarroja, 542  
 catástrofe ultravioleta, 541  
 Cauchy, A., 514-15  
 Cauchy  
   mecánica celeste, 576  
   variable/estable, 512-513

- vuelo/movimiento, 409-411
- celdas de Bénard, 142
- celosías fractales, 194
- celosías reducidas, 337
- Cellérier, Ch., 584
- cementerio de los poetas jóvenes, 478-479
- Cesàro, E., 18, 65, 71, 90
- Chandrasekhar, S., 519
- Charlier, C.V.L., 126, 130-131
- Chentsov, N.N., 498
- Chorin, A., 155
- cielo en llamas, efecto de (*véase* paradoja de Olbers)
- cielo, 134
- circunnavegación, 421
- cirros, cap. 34
- Clarke, J., 523
- chorros/turbulencias, 142
- Clayton, D.D., 135
- coagulación
  - aleatoria, cap. 23, 529
  - de galaxias (Hoyle), 132
  - de turbulencia (Novikov & Stewart), 149
  - en la recta (Cantor), 112, 117
  - ponderada (Besicovitch), 526
- coágulo lognormal límite, 529
- codimensión, 509-510
- Collet, P., 259, 263-264
- complejidad de un conjunto, 68-69
- Comroe, J.H., 224
- condensación de agua, 164
- condicional
  - estacionariedad, 296, 397, 404
  - principio cosmográfico, 295-297, 416
  - probabilidad, 402-403
- conexión topológica
  - en coagulación aleatoria, 309-315
  - percolación de Bernouilli, 183
  - subcolaridad, cap. 34
  - tremas circulares, 429-432
- conjunto límite (kleiniano), cap. 18
- conjunto (mapa)  $\lambda$ , 269
- conjunto (mapa)  $\mu$ , 268
- conjuntos de ceros
  - de la función browniana, 43, 335, 341
  - de las funciones de Weierstrass, 543
- conjuntos de Salem o de unicidad, 504
- conjuntos diático y ternario o triádico (=polvo de Cantor), 111
- conjuntos dimensionalmente concordantes, 31
- conjuntos dimensionalmente discordantes, 31
- conjuntos  $\sigma$ 
  - $\sigma$ -disco, 251
  - $\sigma$ -circuito, 171
- construcción cuadrangular, 93, 95
- continuo, Cantor (*véase* polvo de Cantor)
- convergencia, fuerte contra débil, 457-458
- copo deforme, 106
- copos de jabón, 23-24, 28
- copos, 28
- corrección de las proyecciones de las galaxias sobre el cielo, 137-138, 413, 425
- corriente del Golfo, 143-144
- Corrsin, S., 82, 148, 152
- corte interno
  - costas, 65-66
  - gráficas, 42
  - polvos de Cantor, 112
  - turbulencia, 149
- corte superior
  - arracimamiento galáctico, 127
  - costas, 66
  - errores fractales, cap. 8
  - gráficos, 42
  - lagunaridad, 441
  - polvos de Cantor, 112
  - proyectos de ingeniería, 580
  - relieve terrestre, 371
  - turbulencia, 149, cap. 10-11
- costa (*véase* también islas), cap. 5-6, 465
- costa de Breñaña, 24, 49, 287
- cota superior, 127
- covariancia Wiener-Khinchin, 491
- Coxeter, H.S.M., 242
- cráteres lunares, 423-425
- cráteres, 423-425
- cristales líquidos esméticos, 252-253
- criterio de Jeans, 132, 532
- cuadráticos, cap. 19
- cuarteto, 106
- cuenca, 88, 204, 388
- cuerda, 143
- Cummings, G., 225
- cúmulos de galaxias, cap. 9, 413, 425-426, 436, 524
- Curie, J., 580
- Curie, P., 580
- curtosis de la turbulencia, 152
- curva de Cesàro-Peano, cap. 7, 96-97
- curva dragón
  - autocuadrática, 262, 271, C5

- dragones siameses, 99
- de Harter-Heightway, 98
- curva de Koch, cap. 6
  - aleatoria, 287
  - continente/isla, 170
  - cuadrangular, 78-82
  - generalización, 85
  - Peano, 93-105
  - punta de flecha de Sierpinski, 203
  - triádica, cap. 6
- curva triádica (*véase* copo de nieve de Koch), cap. 6
- curvas, 65
  - de área positiva, 213
  - autoevitante, 62-63, 66
  - sin tangente, 23-24, 30
  - curvas que llenan el espacio (*véase* curvas de Peano)
- curvas de Julia, 262
- curvas de Peano, 18, 31, cap. 7, 93, 99
  - aleatorias, 326, 330
  - Cesàro, 95-97, 411
  - distancia, 91-92, 95-97
  - dragón, 272
  - Gosper, 104
  - intervalos, 90
  - Koch, 93-105
  - longitudes, 90
  - monstruos, 88
  - Moore, 93
  - movimiento, 87
  - su verdadera naturaleza, 88
  - Polya, 95-96
- Cusa, Nicolás de, 295
  
- Darboux, G., 583
- Davis, C., 98
- De Chéseaux, J.P.L., 135
- De Gennes, P.G., 183, 253, 461
- De l'Hospital, M., 564
- De la Vallée Poussin, 532
- De Morgan, A., 561
- decimación fractal, 306
- Dedekind, R., 31
- Delboeuf, J., 573
- Delbrück, M., 516
- delta media, 287
- delta variancia, 287
- delta variancia fraccionaria, 355
- Demócrito, 565
- Denjoy, A., 577
- densidad
  - generalizada, 408
  - de materia, 126, 297
  - media, 115
- densidad global de la materia, 126
- densidad global nula, 126
- depresiones (economía), 473
- depresiones, 385
- derivada (funciones sin), 18, 22, 30, cap. 6, 145
- descarga fluvial
  - modelo browniano fraccionario, 360
  - persistencia de, 353
- desigualdad de los sumandos, 516
- desigualdad de Szpilrajn, 32
- desplazamiento del punto medio, 71, 332, cap. 26, 372
- De Vaucouleurs, G., 126, 136, 299, 434, 524
- De Wijs, H.J., 138, 525
- Dickson, F.P., 135
- Dieudonné, J., 88
- diamantes, 138
- difusión (radiación de probabilidad), 551
- dimensión
  - Besicovitch & Taylor, 501
  - Bouligand, 54, 501
  - Boyd, 502
  - Cantor-Minkowski, 54, 499
  - concentrado de una medida, 530
  - convención para distinguir entre valores empíricos y teóricos, 44
  - crítica, 77
  - distintas facetas de la, cap. 3
  - efectiva, 35, 67
  - entre cero y uno, 113
  - entre uno y dos, 66
  - esbozo histórico, 569
  - Euclides, 569
  - de Fourier, 503
  - fraccionaria, 33
  - fractal, 15, 32, 54
  - función generatriz, 85
  - del habla, 484
  - Hausdorff-Besicovitch, cap. 3, 32, 55, 507-508
  - idea de, 31
  - Kolmogorov & Tihomirov, 501
  - Menger-Urysohn, 32, 571
  - Minkowski-Bouligand, 54, 499
  - sobre Poincaré, 570
  - Pontrjagin & Schnirelman, 54, 501
  - productos, 412

- quebrada, 34  
 de recubrimiento, 54  
 de semejanza, 54, 63  
 subordinada, cap. 32  
 típica de los conjuntos aleatorios, 292  
 topológica, 32, 65
- dimensión crítica  
 curvas de Koch, 76-77  
 percolación de Bernouilli, 183-184  
 percolación fractal, 309-310
- dimensión máxima, 81
- dimensión de las secciones  
 coágulos, 307  
 fractales ramificados, 195  
 regla básica, 194  
 vuelo de Cauchy, 409
- dimensiones quebradas anómalas, 34
- dimensiones de recubrimiento, 54, 499
- dimensión de semejanza, 54, 63
- discontinuidad de los precios, 467
- discontinuo de Cantor (*véase* polvo de Cantor), 111, 116
- disipación turbulenta, 142
- dispersión (turbulenta), 82, 144
- Dimotakis, P., 84
- distribución, 20
- distribución de frecuencia de palabras, 481
- distribución de galaxias, cap. 9
- distribución de Gibbs, 578
- distribución hiperbólica, 292, 398, 477, 480, 586  
 su prefactor, 434  
 en los teoremas del límite central, 517
- distribución de ingresos, 486
- distribución de Pareto, 480, 562  
 ley para ingresos, 486-487  
*véase* también distribución hiperbólica
- distribuciones potenciales (*véase* distribución hiperbólica)
- Ditlevsen, O., 346
- divergencia, 38  
 longitudes de las costas, cap. 5-6  
 número de islas, 173  
 número de puntos de ramificación, 189  
 varianza del cambio de un precio, 471
- Dobrushin, R.L., 499
- Domb, C., 183, 461-462
- doma de los monstruos  
 curva de Koch, 62  
 curva de Peano, 88  
 monstruo de Lebesgue-Osgood, 214-215
- polvo de Cantor, 116  
 tamiz de Sierpinski, 189, 198
- dominio escalante, 127
- dragón famélico, 273
- dragón, muda del, 271
- dragón de San Marcos, 265, 282
- dragones siameses, 100
- drenaje (*véase* cuenca)
- DuBois Raymond, P., 18, 583
- Dugac, P., 584
- Dumouchel, W.H., 516
- du Plessis, N., 531
- Dvoretzky, A., 510
- Dyson, F.J., 17, 44, 137
- Eckman, J.P., 259, 263
- economía, cap. 37, 472, 551
- ecuación de Euler para el movimiento de un fluido, cap. 11
- ecuaciones Navier-Stokes, cap. 11
- efectos  
 Bienaymé, 304  
 José, 352  
 Lindy, 478  
 Noé, 352  
 Richardson, 53
- efectos globales  
 debidos al azar autocondicionado, cap. 36  
 en las superficies brownianas, 365
- Effel, J., 563
- eficacia del relleno de Peano, 98-99
- Eiffel, G., 190
- Einasto, J., 435
- Einstein, A., 288, 295, 548, 567-568
- El Hérou, Y., 423, 445, 447
- elasticidad y cambios de escala, 579
- elección primitiva cuádruple, 148
- electroestática y cambios de escala, 579
- Elias, H., 165
- eliminación de la tendencia y sus abusos, 492
- embaldosado, 74, 242
- enlace receptor de átomos en un mapa  $\lambda$ , 263
- ensoñación de Perrin, 27  
*επιμφοτερίζειν*, 565
- Erdős, P., 510
- ergodicidad, 537
- errante, 537
- erudición, 39
- escala musical templada, 522

- escalante, 37, cap. 38, 579-581  
 escaleras/terrazas del diablo, 116, 120-121, 386, 405-406, 459, 504, 506, 518  
 Escher, M.C., 43  
 esmécticos, cristales líquidos, 252-253  
 espanto y horror, 62  
 esperanza
  - notación, 287
  - paradojas, 478
 espina dorsal de la percolación, 183  
 esponja de Menger, 193  
 esponja de Sierpinski, 193  
 espuma (fractal), 192  
 esquema Strahler-Horton, 105  
 Essam, J.W., 183  
 estacionariedad
  - condicional, 294, 296
  - grados de, 534
  - no intuitiva, 535
  - ordinaria, 294, 535
 estratificado/estratificación, 298-299, 303  
 estructura granular, 24  
 expansión del Universo, 134, 408-409, 442-443  
 explicación, 39  
 exponentes críticos, 187, 190
  - esmécticos, 253
 exponente diametral, 223  
 exponentes distintos de  $D$ , 178-179, 187-188, 223  
 exponente  $R/S$ , 538-539  
 extrapolación
  - conjunto de Cantor, 113
  - curva de Koch, 66
 Euclides, 15, 18, 569  
  
 Faber, S.M., 127  
 fallas, 365  
 Fama, E.F., 473  
 Fatou, P., cap. 19  
 Feigenbaum, M.J., 259, 264, 278  
 Feller, W., 42, 340, 398, 411, 513, 555  
 Feynman, R.P., 220, 339  
 figuras intermedias, 148, 307, 567, 573  
 Fisher, M.E., 164  
 física de redes, 459  
 física, cap. 36  
 Flory, P.J., 461  
 forma biológica, 240  
 forma canónica de coagulación, 304  
 forma, 34  
 Fourier
  - análisis, 33, cap. 39
  - dimensión, 503
  - serie Fourier-Brown-Wiener, 493
 Fournier d'Albe, E.E., 126, 128, 139, 140, 314, 532, 553  
 fractales
  - atractores, cap. 20, 574
  - celosía, 194
  - conjunto, 18
  - copo, 28, 393
  - curvas, 13, 56
  - definición, 32, 33, 505
  - dimensión, 15, 33-34
  - homogeneidad, 120, 129
  - errores, cap. 8
  - etimología, 19
  - natural, 19
  - neologismo, 19
  - no lagunar, 524
  - no uniforme, cap. 16
  - percolación, 311
  - polvo, cap. 8-9, 418
  - racimos, cap. 8-9
  - redes, 194, 332
  - ruido, cap. 8
  - sucesos, cap. 8
  - zonas, 36, cap. 8
 fractales acotados, 259  
 fractales autocuadráticos, cap. 19  
 fractales autoinversos, cap. 18, C7  
 fractalmente homogéneo
  - barra de Cantor, 120
  - distribuciones estelares, 129
  - turbulencia, 149
 fragmentación
  - medida por la dimensión fractal, 172
  - en la naturaleza, cap. 2
 Frenkel, J., 164  
 Frisch, U., 151  
 Frostman, O., 506, 531, 532  
 Fuchs, L., 242, 577  
 fuchsiano, 242, 577  
 Fujisaka, H., 281  
 funciones
  - aleatorias, y estacionariedad, 534
  - brownianas fraccionarias, cap. 27, 28 y 30
  - continuas sin derivada, 18, 22, 26-27, 30
  - por oposición a la trayectoria, 330
 funciones aleatorias gaussianas con un espectro de Wierstrass, 542



- función de Cellérier, 584  
 función coindicador, 512  
 función lognormal límite, 529  
 función de prueba (de Hausdorff), 507  
 funciones continuas y no diferenciables, 18,  
 22, 27, 30, cap. 6, 145  
 funciones estables de Lévy, 408-409, 504,  
 512, 518  
 funciones singulares, 120
- galería de los monstruos, 18, 27  
 Galois, E., 547  
 Gallagher, J.S., 127  
 Gamow, G., 135  
 Gangoli, R., 498  
 garabato hexagonal, 328  
 garabatos (aleatorios), 320-324, 327-328  
 Gardner, M., 74, 98, 104, 523  
 Gauss, C.F., 547  
 Gefen, Y., 190, 199  
 generador  
   de Cantor, 111  
   de Cantor aleatorio, 303  
   de costas, 170-171  
   de una curva de Koch autoevitante, 62  
   directo, 76-77  
   de islas, 170  
   reflejado, 77  
 geometría de los ordenadores, 166  
 geometría de los polímeros, 323, 461  
 geometría fluvial  
   anchura, 231-232  
   árbol, 88  
   cuenca, 88  
   desviación del curso rectilíneo, 162,  
   323, 465-466  
   ribera, longitud de una, 52  
 geometría vascular, 213  
 Gerver, J., 541, 584  
 Getoor, R.K., 520  
 Gevrey, M., 549  
 Gnedenko, B.V., 513  
 Gomory, R.E., 97  
 Gosper, W., 74, 104  
 gotitas de agua, 164  
 Grant, H.L., 392  
 Grassberger, P., 278  
 gravedad y la dimensión  $D=1$  para las ga-  
 laxias, 126, 133  
 Green, M.S., 183  
 Greenhill, G., 230  
 Greiser, M., 559
- Grenander, U., 537  
 Groat, R.A., 228  
 Grossman, P., 259, 264  
 Groth, E., 414  
 grupos  
   círculos apolonianos, 243, 253  
   esferas no solapantes, 201  
   triángulos de Sierpinsky, 203  
 Gurel, O., 259
- Hack, J.T., 162  
 Hadamard, J., 555, 576  
 Hahn, H., 62, 88, 189, 219  
 Hallé, E., 228  
 Halley, E., 135  
 Halley, J.W., 187  
 Hammersley, J.M., 183  
 Hardy, G.H., 521, 541  
 Harris, T.E., 304  
 Harrison, E.R., 135  
 Harrison, R.J., 187  
 Harter, W.G., 119  
 Hartmann, W.K., 424  
 Harvey, W., 214  
 Hastings, H.M., 188  
 Hausdorff, F., 15, 18, 33, 35, 54, 507, 547,  
 566  
 Hausdorff  
   dimensión Besicovitch, 507  
   medida, 491, 506-507  
 Hawkes, J., 501, 510  
 Hawking, G.W., 193  
 Hawkins, G.S., 426  
 Hawkins, T., 111, 584  
 Helleman, R.H.G., 259  
 Helmholtz, H., 559  
 Hermite, C., 62, 570  
 Hersfield, K., 225  
 heurística de Lipschitz-Hölder, 521  
 Heyde, C.C., 304, 514  
 Hibbs, A.R., 339  
 híbridos de Peano y Brown, 331  
 hidrología, 90, 353  
 Hilbert, D., 585  
 Hiley, B.J., 464  
 hilos de seda, 579  
 Hille, E., 120, 504  
 Hofstadter, D.R., 259  
 Hokusai, K., 141, C16  
 Holtsmark, J., 512, 519  
 homogeneidad, 36  
   clásica, 149

- fractal, 120, 129, 149
- hondonadas, 386
- Hopkinson, 580
- horizonte, 369-370
- Horton, R.E., 105
- Howard, A.D., 466
- Hoyle, F., 126, 131, 306, 313-314, 317, 532
- Huber, 230
- huecos, 110, 194, 332, 335, 400, cap. 34
- Hurewicz, W., 32, 507, 571
- Hurts, H.E., 553, 588
- Hurst
  - ruido, 354
  - fenómeno, 354, 538
- Hurwitz, A., C8
- Hutchinson, J., 489
  
- ignorancia instruida, 295
- Il Trovatore*, 567
- ilustraciones geométricas, 42
- incorformista, 548
- índice de orientación, 77, 100-101
- inestabilidad de Jeans, 132, 532
- infinito interno, 71
- infinito/divergencia, 38
  - de la longitud de una costa, cap. 5-6
  - número de islas, 173
  - número de puntos de ramificación, 189
  - variancia del cambio de los precios, 471
- iniciador, 61, 173
- integral Riemann-Lionville, 356, 496
- integródiferenciación fraccionaria, 355, 496
- intermitencia
  - relativa, 524
  - de la turbulencia, 145-147, 149
- intuición, 62, 89, 215
- invariancia por traslación, 36, 294, 442
- inversión geométrica, cap. 18
- irregularidad, 69
  - y fragmentación en la naturaleza, cap. 2
- islas, cap. 13
  - ambigüedad en la definición de la costa, 170
  - áreas y ley de Korcak generalizada, 170
  - cadena, 376-377, C15
  - contribución a la dimensión, cap. 13
  - cuadrangular de Koch, 78
  - generadas como conjuntos de ceros de una superficie browniana (fraccionaria), 376-377, C14, C15
  - generador, 171
  - longitud de la costa, cap. 5
  - paisajes, cap. 28, C15
  - relación área-número, 169-170, 176
  - triádicas de Koch, cap. 6
- isla de Koch cuadrangular, 78-84
  
- jabón, 252
  - modelo fluvial, 360
- Jack, J.J.B., 231
- Jaki, S.L., 135
- James, W., 53
- jerárquico
  - agregación, 296
  - árbol, 486
- Jerison, H.J., 165
- Joêveer, M., 435
- Jordan, C., 557
- Julia, G., cap. 19
  
- Kahane, J.P., 493, 496, 501, 503, 506, 521, 528
- Kakutani, S., 97, 343, 510
- Kant, I., 567
- Kasner, E., 52
- Kelly, Walt., 188
- Kelvin, Lord, 579
- Kepler, 135, 532, 553
- Kesten, H., 461
- Keyes, R.W., 167
- Kirkpatrick, S., 183, 187, 190, 199
- Klein, F., cap. 18
- Kleiniano, cap. 18
- Knight, F., 491
- Knuth, D.E., 98-99
- Koch, H. von, 18, 566
- Kohlrausch, R., 579
- Kolmogorov, A.N., 37,84, 148-149, 151, 153, 155, 501, 392, 494, 497, 513, 550, 588
- Korčak, J., 170, 479
- Kolmogorov
  - delta variancia, 392
  - dimensión Kolmogorov & Tihomirov, 501
  - espectro, 561
  - exponente 5/3 o 2/3, 150
- Kottogoda, N.T., 494
- Kraichnan, R.H., 149
- Kronauer, R.E., 229-230
- Kuo, A.Y., 148

Lacey, G., 232  
 lago Ness, monstruo del, 28  
 lagos, 175, 384  
 lagunaridad, 314, cap. 34  
 Lambert, H., 135, 553  
 lamentable plaga, 62  
 laminar (=no turbulento), 146  
 Landau, L.D., 145  
 Landkof, N.S., 531  
 Landman, B.S., 166  
 Langbein, W.B., 465  
 Langevin, P., 556  
 Laplace, P.S. de, 41, 156, 581-582  
 laplaciano, 538  
 Lavoie, J.L., 497  
 Lawrance, A.J., 494  
 lblgraph, C8  
 Leath, P.L., 187  
 Lebesgue, H., 18, 33, 40, 213, 557, 572-573  
 Lebowitz, J.L., 201  
 Leibniz, G.W., 37, 245, 356, 564, 573, 581-582  
 Leonardo da Vinci, 141, C3, 223, 229, 232  
 Leontief, W., 588  
 Leopold, L.B., 105, 232, 465  
 Leray, J., 156  
 Lévy, P., 62, 364, 399, 405-407, 473, 490-491, 498, 504, 509, 512-513, 515-516, 518-519, 549-551, 555  
 Lévy  
   escaleras del diablo, 504, 518  
   estabilidad, 409, 504, 512, 518  
   movimiento en el espacio, 420-421  
   polvo, 341, 504  
   polvo como subordinado, 412  
   vuelo, 409, 414  
 Lewis, Z., 542  
 ley de Zipf, 481  
 leyes potenciales, 67, 114, 187, 193, 333, 335  
 Lieb, E.H., 201  
 Lifshitz, E.M., 145  
 límite central, teorema, 409, 517  
 límite de Schwarzchild, 136  
 líneas de transmisión de datos, 110  
 lingüística, 481  
 Lloyd, E.H., 555  
 Lloyd, G.E., 565  
 lluvia, 163  
 longitud  
   arbitrariedad, 51  
   de las costas, cap. 5  
   longitud G, 161  
   medición, cap. 5  
   relación longitud-área en las cuencas fluviales, 160-161  
   verdadera, 49  
 longitud patrón, 49, 59  
 longitud del río Missouri, 162  
 Lorenz, E.N., 281  
 Love, E.R., 521, 543  
 Lovejoy, A.D., 565  
 Lovejoy, S., 163  
 Lukacs, E., 513  
 Luria, S., 516  
 Lusin, N., 40  
 Lydall, H.F., 486  
  
 Maddock, T., 232  
 Mai, T., 187  
 Maître, J., 484  
 Manheim, J.H., 584  
 manifiesto, 17  
 mapa de Bretaña, 24  
 Marcus, A., 424  
 Marcus, M.B., 496, 543  
 marina, 82  
 Marstrand, J.M., 510  
 martingala, 467-469, 550  
 masa-radio, exponentes distintos de D, 179, 187, 292  
 masa-radio, prefactor, 439, 441  
 masa-radio, relación  
   curvas de Koch, 67  
   galaxias, 126-127  
   movimiento browniano, 333  
   polvo de Cantor (errores), 114  
   Universo de Fournier, 128-130  
 materia interestelar, 524  
 Matheson, G., 525  
 Mattila, P., 510  
 Max, N.L., 43  
 Maxwell, J.C., 360, 579  
 McKean, H.P., 498, 520  
 McMahon, T.A., 229-230  
 mecánica cuántica, 339  
 mechones (de galaxias), 525  
 medición  
   arbitrariedad de los resultados de, 51  
   de la densidad de la materia global, 126  
   longitudes de costas, cap. 5  
   multiplicidad de los métodos de, 49  
 medida

- de Carathéodory, 507
- dependencia del radio (M(R)), 67, 115
- de Hausdorff, 506
- Mejia, J.M., 346
- Melzak, Z.A., 502
- membranas celulares, 165
- Mercader de Venecia*, 214
- mercados eficientes (precios en los), cap. 37
- meteoritos, 426-427
- mezcla, 537
- microgotitas de condensación, 164
- Menger, K., 32, 193, 198, 207, 571
- Metropolis, N., 263
- Milne, E.A., 295
- Miner, E.D., 118
- Minkowski, H., 54, 58, 500
- Minkowski
  - recubrimiento de, 499
  - salchicha de, 58
- modelo Saltzmann-Lorenz, 281
- modelos (aleatorios), cap. 21-22
- Moillet, A., 392
- Monin, A.S., 145
- monstruo del lago Ness, 28
- monstruos de Lebesgue-Osgood, 214-215
- monstruos, 18, 27, 61, 87, 189, 213
- Monticciolo, R., 188
- Moore, E.W., 93
- Mori, H., 281
- movimiento de Koch, 68
- movimientos brownianos, 16-7, 24, 27-30, 329-30, 408, 567-69
  - autoevitante, 342-43
  - fraccionario, 338, 351
  - como modelo de la bolsa, 467-68
  - como subordinado, 412-13
- $\mu$ -átomo/ $\mu$  molécula, 263
- $\mu$ -conjunto (mapa), 268
- Mueller, J.E., 162
- muecas, 143
- multiplicación de dimensión, 411
- Mumford, D., 256
- Munitz, M.K., 135
- Murray, C.D., 225
- música, 18, 44, 522
- mutantes bacterianos, 516
- Myrberg, P.J., 259, 263
- Natura non facit saltus*, 573-575
- Nelkin, M., 151
- Nelson, E., 339, 568
- Neuenschwander, E., 584
- neuronas, 231
- Newman, J.R., 561
- Newton, I., 18, 20, 532
- Nicoll, J.F., 187
- Ninham, B.W., 461
- no acotadas (por oposición a acotadas, fractales), 259
- no autosemejantes, fractales, cap. 15-20
- no escalantes, fractales, cap. 15-19
- no estacionarios, 345
- no euclídeo, 379, 505, C9
- no gaussianas, colinas, C12, C13
- no lagunares, fractales, 443, 524
- no uniformes, fractales, cap. 16
- North, J.D., 135, 295
- Norton, V.A., C16
- Novikov, E.A., 149, 306, 315-318
- nubes, 15, 28, 142-143, 163
- núcleo de un  $\mu$ -átomo, 263
- número de Reynolds, 143
- número medio de errores, 115, 401-403
- número-área, relación para las islas, 170, 176
- Nye, M.J., 568
- Obukhov, A.M., 148-149
- Occam, W. de, 31
- Oldeman, R.A.A., 228
- Oldham, K.B., 497
- Onsager, L., 148
- orden de ramificación, 196
  - ramificación cuasihomogénea, 198
  - ramificación homogénea, 198
- Orey, S., 496, 543
- orientación, 77, 101
- Osgood, W.F., 18, 213
- Osler, T.J., 497
- ovillo de hilo, 35-36
- Painlevé, P., 575-577
- paisajes brownianos, 374-375, C7-C15
- paisajes lacustres, 374-375, C9-C15
- Paley, R.E.A.C., 493
- panacea del comportamiento transitorio, 581
- panacea, 17, 580
- Pangaea/Panthalassia, 367-368
- papel de los gráficos, 41
- papel del observador, 52, 146
- paradas de vuelo
  - de Cauchy, 409-410

- de Lévy, 409, 412-413
- de Rayleigh, 407-408
- paradimensión, 224
- paradoja de Olbers, 134, 150, 532
- parcheado, C6-C7
- Pardé, M., 89
- paréntesis  $\square$  y  $\blacksquare$ , 111
- paréntesis de digresión  $\square$  y  $\blacksquare$ , 23-24
- Parodi, O., 253
- Partridge, E., 109
- Pascal, B., 18, 36
- paseo aleatorio, 340-341
  - autoevitante, 461
  - límite fractal, 458
- patológico, 18
- patrón, 49, 59
- Paumgartner, D., 166
- Peano, G., 566
- Peebles, P.J.E., 133, 296, 414, 435-436
- percolación
  - de Bernouilli, 183, 311-312
  - fractal, 311, 426
- perembaldosado, 74
- Perrin, J., 556, 568, 575
- persistencia, 353, 357, 494
- Peterson, B.A., 435
- peto del Faraón, 282
- Peyrière, J., 320, 528
- pinturas de los Grandes Maestros, 43
- pirámide de Koch, 200
- Pitágoras, 570
- plancton, 144
- Platón, 570
- Playa que Retroceda, 479
- pliegues/ausencia de pliegues, 334
- pliegues del cerebro, 164, 231
  - de Lévy, 397
- Poincaré, H., 27, 40, 320, 550, 551, 564, 570, 573, 575, 577-578, cap. 18
- polvo, 15, 109
  - Cantor, cap. 8
  - Fatou, 261
  - subordinado, 418
- polvos lineales, cap. 8, cap. 31
  - de Cantor, 111
  - conjunto de ceros, 340-341
- polvos en el espacio, cap. 9, cap. 32-35
  - aglutinado, 136-137
  - de Fatou, 133
  - Cauchy, 409-410
  - de galaxias, cap. 9
  - Lévy, 409, cap. 31
  - Lévy (circunnavegación del), 421
- Pólya, G., 90, 95, 515, 532-533
- Polytechnique (Ecole), 556-558
- Popper, K., 470
- porosidad indefinida de la madera, 24
- potamología, 89
- potenciales de Riesz (Marcel), 531
- potenciales y dimensión, 532
- prefactor de la distribución de los huecos, 438
- prefactor, 434, 439, 482
- pregrumos, 112
- principio cosmológico, 295
- principio escalante en economía, 470
- principios cosmográficos
  - condicional, 297
  - fuerte, 295
  - para el relieve de la Tierra, 368-369
- probabilidad crítica en la percolación de Bernouilli, 183
- problema N-cuerpos, 414
- proceso de nacimiento, 304, 401
- proceso gaussiano, cap. 25, cap. 27-28, cap. 30, C10
- proceso recurrente, 398
- proyecciones de las galaxias fractales sobre el cielo, 134
- Pruitt, W.E., 509, 520
- pseudoazar, 289
- puente browniano, 492
- pulgas, 560, 566
- pulmón, 166, 224, 228
- puntos de ramificación, 189-190
- puntos dobles
  - evitación de, 66
  - inevitabilidad de, 89-90
- puntos hiperbólicos, 70
- puntos loxodrómicos, 75
- puntos múltiples
  - evitación de, 66
  - inevitabilidad de, 89
- queso, 424, 429-432
- quimera, 27, 565-566
- Quinn, G.P., 187
- racimos
  - críticos, 186-187, 190
  - no críticos, 186
- racimos de coagulación grumosa, 180
- racimos por contacto que llenan el plano, 177

- racimos por contacto, cap. 13, 177  
 ráfagas de errores, 110  
 ráfagas de turbulencia, 145-147  
 Rall, W., 231  
 Ramanujan, S., 547  
 ramificación, cap. 14  
 Ramsey, N., 485  
 Rayleigh, Lord, 547  
 recesiones, 473  
 recubrimiento de un conjunto o su complementario, 499  
 recurrencia y azar, 289  
 recurrencia/no recurrencia, 352  
 red, 194, 332, cap. 27  
 regla de Rent, 166  
 regla, 69  
 regularidad, 68-69  
 relación número diámetro, 114-115, 171, 177  
 relación número-área para islas, 170, 176  
 relación número-tamaño para huecos, 114, 194  
 relaciones radio-medida  
   curvas de Koch, 68  
   polvos de Cantor, 116  
 relatividad, teoría de la, 133-134, 136  
 relieve browniano, cap. 28  
 relieve poissoniano, 365, 514  
 relieve terrestre, 43, 340-341  
 remolinos, 82  
 Rényi, A., 536-537  
 residuo sin clasificar, 53  
 resultados dimensionales paradójicos, 160  
 Reynolds, P.J., 187  
 Richardson, L.F., 37, 51, 53-54, 59-60, 148-149, 559, 588, C3  
 Richardson, Sir Ralph, 559  
 Richardson  
   cascada, 60, 82  
   efecto, 53  
   turbulencias, 60, 82  
 Riemann, B., 541, 569-570, 584  
 río Nilo, 553, 553-554  
 Rippl, 354  
 Rogers, C.A., 507  
 Roll, R., 473  
 Rose, N.J., 461  
 Rosen, E., 135  
 Rosenblatt, M., 499, 537  
 Roshko, A., 143  
 Ross, B., 497  
 Rossler, O.E., 259  
 Ruelle, D., 275  
 ruido(s), 109  
   afines, 360, 489  
   escalante, 351, 354, 360, 523  
   excedente, 110, 306, 397  
   gaussiano fraccionario discreto, 494  
   de Hurst, 354  
    $1/f$ , 351, 360, 523  
 Russell, B., 582  
 Russo, R.L., 166  
 Saffman, P.G., 152  
 salchicha de Minkowski, 58  
 Salem, R., 501, 521  
 salón de copo de nieve, 208  
 Sarma, G., 253  
 Scheffer, V., 155-156  
 Schnirelman, L., 54, 501  
 Schwartz, D., 165  
 Schwartz, H.A., 54, 501  
 Selety, F., 128, 131  
 secciones típicas de los fractales  
   por fractales, 307  
   por líneas, 194  
 semiestabilidad de Lamperti, 490, 513  
 semiestabilidad, 490  
 semilíneas de Koch, 67  
 semillas pseudoaleatorias, 290  
 Seneta, E., 304, 514  
 separados, 262, 268-269  
 serie aleatoria Fourier-Brown-Wiener, 493  
 series Rademacher, 543  
 serpenteos, 20, 162  
 Séze, L., 253  
 Shante, V.K.S., 183  
 Sierpinski, W., 18  
 Sierpinski  
   alfombra, 192, 206-207, 312, 438  
   esponja, 193  
   punta de flecha, 203-204  
   tamiz, 189, 203-204  
 simetría, 38, 294  
 Simon, B., 119  
 simplicidad, 68  
 Sinai, Ia.O., 281  
 Singh, A.N., 543, 584  
 singularidades de las ecuaciones, 153  
 sistemas dinámicos descomponibles, 280  
 sistemas dinámicos, cap. 20  
 Smale, S., 281  
 Smith, 541, 584  
 Smith, H.J.S., 569

Smythe, R.T., 183  
 Soderblom, L.A., 427  
 solenoide, 281  
 Soler, J., 565  
 Soneira, R.M., 296  
 Spanier, J., 497  
 Stanley, H.E., 187  
 Stapleton, H.B., 459  
 Stauffer, D., 183, 187  
 Stein, M.L., 263  
 Stein, P.R., 259, 263  
 Steinhaus, H., 52, 90  
 Stent, G., 40  
 Stewart, R.W., 149, 306, 315-318, 392, 588  
 Stieltjes, T.J., 62  
 Stommel, H., 561  
 Stone, E.C., 118  
 Strahler-Horton, esquema, 105  
 subcolaridad, cap. 34  
 subdimensiones/dimensiones subordinadas, 511, 512  
 subordinación, cap. 32  
 sucesos despreciables (no estándar), 298  
 suero, 112  
 Sulem, P.L., 151  
 superficies isoterma, 144, 391  
 Suwa, N., 228  
 Swift, J., 560, 566  
 Sykes, M.F., 464  
 Szegő, G.P., 532  
  
 Tago, E., 435  
 Takahashi, T., 228  
 Takens, F., 275  
 Tamarkin, J.D., 120, 504  
 tamiz  
   apoloniano, 243, 254  
   de Sierpinski, 189, 203-204  
 Taqqu, M., 499, 540  
 Taylor, G.I., 142, 149, 151, 559, 561  
 Taylor, S.J., 502, 506, 509-510, 520  
 tejer, 247  
 telaraña (fractal), 205  
 telarañas (intergalácticas), 524  
 telescopios, 137  
 temperatura  
   del discurso, 485  
   termodinámica, 578  
 temperaturas negativas, 522  
 Tennekes, H., 152  
 teorema de Liouville, 94  
 teorema del límite central, 409, 517  
 teoría de la relatividad, 133-134, 136  
 terágono, 61  
 términos correctivos, 35  
 termodinámica, 485, 578  
 ternario, conjunto (*véase* polvo de Cantor)  
 terreno erosionado, 387  
 teselación o embaldosado hiperbólico, 242  
 teselación, 74, 242-243  
 Tesnière, M., 484  
 textura, 397, cap. 34-35  
 Theotobocus, rey, 573-574  
 Thoma, R., 228  
 Thomae, S., 259, 264  
 Thomas, H.A., 354  
 Thompson, d'A.W., 17, 228-229, 548, 568  
 tiempo, 87  
 tiempos de relajación distribuidos, 580  
 Tihomirov, V.M., 501  
 Tissot, J., 574  
 Tongling, 343  
 topología  
   de los coágulos aleatorios, 309-311  
   limitaciones de, 34  
   de la turbulencia, 151  
 torre Eiffel, 190  
 Townsend, A.A., 145, 147  
 transición, 338, 441  
 trayectorias  
   browniana fraccionaria, 362  
   en oposición a las funciones, 330  
 tremas no solapantes y no aleatorias, 112, 201, 203, 211, 243  
 tremas solapantes y aleatorias  
   de calles, 404  
   circulares/discoidales, cap. 33  
   esféricas, cap. 33  
   intervalos, 400  
   no escalantes, 427  
   virtuales, 399-400  
 Tremblay, R., 497  
 triádico, conjunto (*véase* polvo de Cantor)  
 tribología, 371  
 truncación, 65-66, 127, 534  
 turbulencia, cap. 10-11  
   definición de, 146  
   lagunaridad de, 437  
 turbulencia de Burgers, 392  
 turbulencia homogénea, cap. 30  
  
 Ullam, S.M., 116, 259  
 ultravioleta, catástrofe, 541

- Urshell, H.D., 521, 543  
 Urysohn, P., 18, 32, 571, 573
- Van Ness, J.W., 351, 355, 494, 497  
 variación de los precios, cap. 37, 470
- Velarde, M.G., 281  
 velocidad, 28, 132  
 del viento, 561  
 venas y arterias, 213  
 venera, 265  
 ver es creer, 41, C2  
 Verdi, G., 567  
 viaje de aproximación, 420  
 Vilenkin, N.Ya., 27, 88  
 Volterra, V., 569  
 volutas sobre volutas, 143  
 von Neumann, J., 556  
 von Schweidler, E., 581  
 von Weizsäcker, C.F., 145, 148  
 Voss, R.F., 498, 523, C16  
 vuelo de Rayleigh, 408  
 Von Kannon, D., 188
- Wallenquist, A., 133  
 Wallis, J., 27  
 Wallis, J.R., 353-354, 538  
 Wallman, H., 32, 507, 571  
 Walsh, J.L., 563  
 Webbink, 127
- Weber, W., 579  
 Wegener, A., 367  
 Weibel, E., 166, 224, 227  
 Weierstrass, K., 18, 145, 540, 561, 575, 583  
 Wheeler, J.A., 193  
 Whittaker, E.T., 40  
 Whyburn, G.T., 199, 343  
 Whympfer, E., 363  
 Wiener, N., 16, 27, 58, 142, 490, 493, 549  
 Wiermann, J.C., 183  
 Wigner, E.P., 19  
 Wilson, T.A., 135  
 Wilson, A.G., 225  
 Windwer, 462  
 Wise, M.B., 339  
 Wright, J., C8  
 Wright, hermanos, 575
- Yaglom, A.M., 145, 498  
 Yoder, L., 498  
 Young, G.C., 521, 543, 584
- Zimmermann, M.H., 229  
 Zipf, G.K., 562-563, 586-587  
 zona autosemejante, 36, 127, 363  
 zonas de transición, 36  
 Zwicky, F., 435  
 Zygmund, A., 497, 504





**Benoît Mandelbrot** es conocido como el «padre de los fractales». Pero ¿qué es la geometría fractal?

Concedamos la palabra al propio **Mandelbrot**: «¿Por qué a menudo se describe la geometría como algo “frío” y “árido”? Sí, es incapaz de describir la forma de una nube, una montaña, una costa o un árbol, porque ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni el tronco de un árbol cilíndrico, ni un rayo rectilíneo. (...) Creo que muchas formas de la naturaleza son tan irregulares y fragmentadas que la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad, sino que ésta se nos revela completamente diferente. (...) La existencia de estas formas representa un desafío: (...) la investigación de la morfología de lo “amorfo”. (...) En respuesta a este desafío, concebí y desarrollé una **nueva geometría de la naturaleza** y empecé a aplicarla a una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo **fractales**. (...) Algunos **conjuntos fractales** [tienen] formas tan disparatadas que ni en las ciencias ni en las artes he encontrado palabras que los describieran bien. El lector puede hacerse una idea de ello ahora mismo con sólo echar una rápida mirada a las **ilustraciones de este libro**».

Y termina: «Contra lo que hubiera podido parecer en un principio, la mayoría de mis trabajos han resultado ser los dolores de parto de una **nueva disciplina científica**». Lo son, en efecto, de tal manera que esta nueva disciplina, **la geometría fractal de la naturaleza**, protagoniza hoy múltiples investigaciones en todos los campos de la ciencia.



Fundació "la Caixa"  
Museu de la Ciència

ISBN 84-8310-549-7



9 788483 105498

TUSQUETS  
EDITORES